

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгій СУЛИМ², Назар ОЛІЯРНИК²

¹ Ян“Ц“ў Ј«нУеЈ«а“Ј“ў зФуЈУ@Ј“ў ЯЈУГЂ§ж“зЂз
ГЯа “ГУГж“ЦЉ5 43018 Ян“Ц сЦ§« Ј«

² “ГУГж“Ц“ўЈ«нУеЈ«а“Ј“ў ЯЈУГЂ§ж“зЂзУГЂЈМ«Ј« ‘§«ЈЦ« ,
ГЯа сЈУГЂ§ж“зЂзж“Ц« 1 79000 “ГУГсЦ§« Ј«

Застосовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності, задачу антиплаского деформування анізотропного тіла з тонкою неоднорідністю зведено до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь, числове розв'язування яких виконано за схемою методу граничних елементів. Розглянуто тіло з прямолінійною неоднорідністю та неоднорідністю вздовж дуги кола. Проведено обчислення КІН для різних значень кута розхилу дугоподібного включення в ізотропній та анізотропній матрицях. Порівняно отримані запропонованим методом результати з даними аналітичного розв'язку. Досліджено вплив міри анізотропії матеріалу тіла та жорсткості включення на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: антипласка деформація, метод граничних елементів, тонке включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. **Вступ.** Усі сучасні конструкційні матеріали зазвичай містять різні неоднорідності, що породжені недосконалістю процесів виготовлення та обробки або навмисне впроваджуються в матеріал для зміни його фізико-механічних властивостей, забезпечення належної міцності чи виконання певних специфічних функцій. До таких неоднорідностей належать волокна, накладки, заповнені газом, рідкою чи твердою субстанціями порожнини, тріщини, тонкі включення тощо. Вони породжують високу концентрацію механічних напружень та істотні градієнти різноманітних фізичних полів (температури, напруженості електричного та магнітного поля) поблизу своїх вершин (торців), що має вплив на зміну деформаційних та інших процесів, а відтак, зумовлює зміну характеристик міцності та експлуатаційних властивостей матеріалу, або й передчасне руйнування. З іншого боку, при проектуванні композиційних матеріалів важливим завданням є оцінювання інтенсивності напружень для запобігання руйнуванню відповідних конструкційних елементів.

Стрімкий розвиток технологій дає змогу комп'ютерно моделювати матеріали з тонкими неоднорідностями, серед яких найбільшу увагу приділяють тонким включенням і тріщинам. У цьому разі за основу беруть теоретичні методи (прямі та спеціальні) дослідження тіл із дефектами. Прямий підхід [1, 2] розглядає включення як об'єкт із певною товщиною, що дає змогу досліджувати різноманітні задачі для обмежених і безмежних тіл із прямолінійними та викривленими неоднорідностями. Проте його

ефективність суттєво залежить від використаних способів опису тонкостінних елементів. У спеціальному підході [3–6] на підставі застосування принципу спряження континуумів різної вимірності включення заступають математичним розрізом уздовж його середньої поверхні з заданими на ньому певними крайовими умовами – умовами взаємодії. Такий підхід (поєднання принципу спряження з використанням умов взаємодії) продуктивний для розв’язування задач для прямолінійних включень у безмежних тілах, смугах тощо, тобто для задач, у яких геометричні параметри, вид і спосіб навантажування дають змогу записати зручну для подальших обчислень систему інтегральних рівнянь. Ефективним видається поєднання ключових елементів цих двох підходів. Тому ми запропонували аналітично-числовий метод розв’язування задачі антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими включеннями, що поєднує метод граничних елементів і принцип спряження континуумів різної вимірності [3].

2. Формулювання задачі. Розглянемо пружне циліндричне анізотропне тіло зі стрічковим пружним включенням, твірні якого паралельні до твірних не обмеженого у цьому напрямі тіла. Тіло навантажене зусиллями, що діють паралельно до його твірних. Вважатимемо, що механічні поля та навантаження, які виникають у тілі та включенні, не змінюються з плином часу та вздовж напрямку, паралельного до твірної тіла. Між тілом і включенням виконуються умови ідеального механічного контакту.

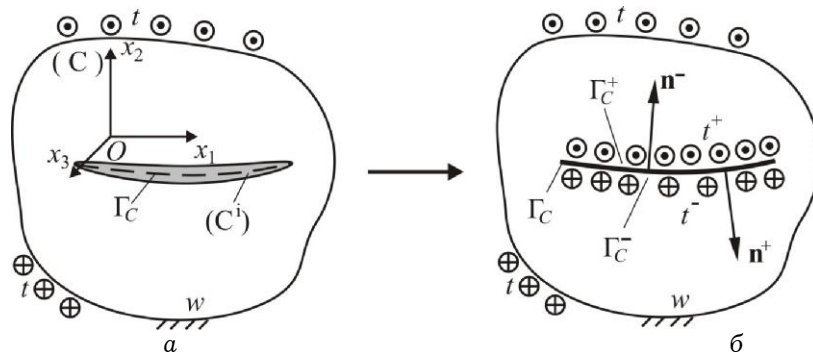


Рис. 1. Схеми задачі та підходу моделювання тонкого включення за принципом спряження

«а» жзеГЯ—@ : §J н° : ж§- ЪJJ—сеJз°JЯЯГМ §УJe Г°ГУ§JежзУЗ, 7, 8], жзе§Г е аУJУ«жзЯ Г ефПа“ зеJсе JТефJe§УрJежзУз«Q Г аЯ@Г е §е ,а-фЯ Гса—@JJ- -Q ,ТеГЪз§°@° ў е-’%Qз (§°ж. 1, «), « сеJз«QзJУ J«: §Я ЪJJ-з« : Ъ§ЪПЪЪJJ-: Ъ§ЪJЪеЪЛ« -Ъ§Ъ Гс+ УГс- ўе,е жЪ§ЪJ е :еГЪ§JУ Гс (§°ж. 1, -). р«Q «ф«@» Гефз “ж-фе Г° J«@ЪJJ-J«: §Я ЪЪ-фЪ е§Г еГ«Je,е жз«JЯзУ» §е §УеГ (Я феГ жЪ§ЪJ е :еГЪ§JУГс), J« -сеГЯ ГЪсе§° J«: §Я ЪJ У: Ъ§ЪПЪЪJ ГУJ—в“ж-жз§°-се:ефУJe. ўУж-

Розмістимо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ у серединній площині тіла (див. рис. 1). Вісь Ox_3 спрямуємо паралельно до твірної поверхні тіла. Визначальні співвідношення антиплатоскої задачі для анізотропного тіла [9, 10] запишемо у вигляді

$$\sigma_{3j} = C_{jk}w_{,k} \quad (j, k = 1, 2), \quad (1)$$

де σ_{3j} – ненульові компоненти тензора напружень; $w \equiv u_3$ – компонента вектора переміщень $(0; 0; u_3)$; $C_{11} = c_{55}$, $C_{12} = C_{21} = c_{45}$, $C_{22} = c_{44}$ – модулі пружності матеріалу. У формулах прийнято правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється.

Рівняння рівноваги [9, 10] у випадку антиплатоскої задачі набудуть вигляду

$$\sigma_{3j,j} + f_3 = 0, \quad (2)$$

де f_3 – поздовжня складова прикладених до тіла об'ємних сил. Підставивши (1) у (2), отримаємо

$$C_{jk}w_{,jk} + f_3 = 0. \quad (3)$$

Однорідний розв'язок рівняння (3) знайдемо, використовуючи формалізм Stroh [10]. Вважаючи, що

$$w = aF(x_1 + px_2), \quad (4)$$

та підставивши (4) в (3), отримаємо таке рівняння щодо невідомих сталих:

$$[Q + 2Rp + Tp^2]a = 0. \quad (5)$$

Тут $Q = C_{11}$, $T = C_{22}$, $R = C_{12} = C_{21}$ – коефіцієнти, що аналогічні відповідним матрицям Stroh у плоскій задачі.

Після диференціювання (4) з урахуванням співвідношень (1) отримаємо подання напружень

$$\sigma_{31} = -\varphi_2, \quad \sigma_{32} = \varphi_1,$$

через функцію напружень

$$\varphi = bF(x_1 + px_2),$$

де $b = (R + pT)a = -(Q + pR)a / p$.

Надалі під час розв'язування задачі для зручності використовуватимемо комплексні коефіцієнти a , b та p замість модулів пружності C_{jk} . Відповідно до [10] ці сталі можна визначити з задачі на власні вектори і власні значення формалізму Stroh

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{N}\mathbf{x} &= p\mathbf{x}, \\ \mathbf{N}^T\mathbf{h} &= p\mathbf{h}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\mathbf{N}_1 = \mathbf{R}/T$, $\mathbf{N}_2 = 1/T$, $\mathbf{N}_3 = \mathbf{R}^2/T - \mathbf{Q}$; $\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^T$ і $\mathbf{h} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^T$ відповідно правий і лівий власні вектори матриці \mathbf{N} , що нормуються умовою $\xi^T \boldsymbol{\eta} = 1$.

На підставі розв'язування задачі (6) отримаємо два комплексні власні значення $p_1 = p$ та $p_2 = \bar{p}$ і відповідні їм комплексно спряжені власні вектори $\xi_1 = \bar{\xi}_2$. Оскільки величини \mathbf{w} та φ набувають лише дійсних значень, то загальний розв'язок задачі відповідно до [10] запишемо так:

$$\mathbf{w} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{aF}(\mathbf{x}_1 + p\mathbf{x}_2)], \quad \varphi = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{bF}(\mathbf{x}_1 + p\mathbf{x}_2)]. \quad (7)$$

Із використанням формалізму Stroh функції Гріна для зосередженої сили, прикладеної в точці $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ тіла, набудуть вигляду [10]

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}[\mathbf{a}^2 \ln \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{x})], \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{\mathbf{ab}(\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 p)}{\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \right], \quad (8)$$

де $\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1 + px_2 - (\xi_1 + p\xi_2)$.

Зумовлені зосередженою силою $\mathbf{f}_3 \delta(\xi)$ у точці $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ тіла переміщення \mathbf{w} і дотичне напруження $\mathbf{t} = \sigma_{3j} \mathbf{n}_j$ у точці $\mathbf{x}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ на поверхні з нормаллю $\mathbf{n}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ можна визначити з урахуванням (8) за допомогою таких залежностей:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{f}_3, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{f}_3, \quad (9)$$

де $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака.

Переміщення у тілі \mathcal{S} з межею $\Gamma \equiv \partial \mathcal{S}$ і розрізом Γ_C визначають з такої тотожності Сомільяни [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) d\mathcal{S}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (10)$$

Надалі вважатимемо, що масових сил немає, тобто $\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$. Тоді

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Спрямовуючи внутрішню точку \mathbf{x} до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та вважаючи, що у точці \mathbf{y} крива Γ є гладкою, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно крайових функцій \mathbf{w} та \mathbf{t} на межі тіла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{w}(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_c^+} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (12)$$

де позначення RPV означає величину невластивого інтеграла; CPV – головне значення інтеграла.

Спрямовуючи внутрішню точку \mathbf{x} до точки $\mathbf{y} \in \Gamma_c$ розрізу Γ_c та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ_c є гладкою, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно крайових функцій $\Sigma \mathbf{t}$ та $\Delta \mathbf{w}$ на розрізі Γ_c

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{w}(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

При числовому моделюванні розрізів чи включень із точками зламу осьової лінії інтегральне рівняння (13) можна використовувати, усунувши в обчислювальній схемі потрапляння точки колокації \mathbf{y} у точку зламу.

Диференціюючи (13) за \mathbf{y}_k , використавши закон Гука (1) та враховуючи, що $\mathbf{n}_i^+ = -\mathbf{n}_i^-$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{n}_j^+ \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла, а $\mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ та $\mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – ядра інтегралів (14)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}_{jk} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}_k} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} \mathbf{p}) \frac{\mathbf{a} \mathbf{b}}{\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right], \\ \mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}_{jk} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}_k} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} \mathbf{p}) \frac{\mathbf{b}^2 (\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 \mathbf{p})}{[\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Припустимо, що модель включення $\mathbf{F}_k(\Delta \mathbf{t}, \Sigma \mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}, \Sigma \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ ($k = 1, 2$) дає змогу знайти крайові функції $\Sigma \mathbf{w}$ та $\Delta \mathbf{t}$ у явній формі, тобто

$$\Sigma \mathbf{w}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^w(\mathbf{y}, \Sigma \mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}), \quad \Delta \mathbf{t}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^t(\mathbf{y}, \Sigma \mathbf{t}, \Delta \mathbf{w}). \quad (16)$$

Тоді сформульована задача зводиться до визначення з системи інтегральних рівнянь (12)–(14) та (16) невідомих стрибків переміщень $\Delta \mathbf{w}$ і

напружень $\Delta\sigma_{3n} = (\sigma_{3j}^+ - \sigma_{3j}^-)\mathbf{n}_j^+ = \sigma_{3j}^+\mathbf{n}_j^+ + \sigma_{3j}^-\mathbf{n}_j^- = \Sigma\mathbf{t}$ на математичному розрізі Γ_C і не заданих крайовими умовами функцій \mathbf{w} чи \mathbf{t} на межі Γ тіла.

3. **Модель тонкого включення.** Розглянемо деякий поперечний переріз у включення. Введемо локальну систему координат $O\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\mathbf{x}'_3$, де вісь $O\mathbf{x}'_1$ спрямована вздовж вектора нормалі \mathbf{n}^+ . З урахуванням залежності $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{\pm}$ умови ідеального механічного контакту між дефектом і тілом виглядають як $\mathbf{w}^\pm = \mathbf{w}^{i\pm}$, $\mathbf{t}^\pm = -\mathbf{t}^{i\pm}$, де верхній прямий індекс «і» позначає величини, пов'язані з включенням.

Відповідно до (1) напруження у включенні з урахуванням позначень (5) дорівнюють

$$\sigma_{31} = \mathbf{Q}^i\mathbf{w}_{,1} + \mathbf{R}^i\mathbf{w}_{,2}, \quad \sigma_{32} = \mathbf{R}^i\mathbf{w}_{,1} + \mathbf{T}^i\mathbf{w}_{,2}. \quad (17)$$

Інтегруючи (17) за товщиною включення, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{31} d\mathbf{h} &= \mathbf{Q}^i[\mathbf{w}(\mathbf{h}) - \mathbf{w}(-\mathbf{h})] + \mathbf{R}^i \int_{-h}^h \mathbf{w}_{,2} d\mathbf{h}, \\ \int_{-h}^h \sigma_{32} d\mathbf{h} &= \mathbf{R}^i[\mathbf{w}(\mathbf{h}) - \mathbf{w}(-\mathbf{h})] + \mathbf{T}^i \int_{-h}^h \mathbf{w}_{,2} d\mathbf{h}. \end{aligned} \quad (18)$$

Враховуючи рівняння рівноваги (2) та умову контакту $\mathbf{t}^\pm = -\mathbf{t}^{i\pm}$ на підставі принципу спряження одержимо

$$\int_{-h}^h \sigma_{31} d\mathbf{h} = \mathbf{P}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{y}) = -\mathbf{P}^0 + \int_{y_0}^y \Sigma\mathbf{t}(\mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad (19)$$

де \mathbf{s} – дугова координата на математичному розрізі Γ_C ; \mathbf{P}^0 – сила прикладена у точці \mathbf{y}_0 лівого кінця включення. Відповідно до теореми про середнє значення

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{31} d\mathbf{h} &= 2h\sigma_{31}^{\text{avr}} \approx \mathbf{h}(\mathbf{y})[\mathbf{t}^i(\mathbf{h}) - \mathbf{t}^i(-\mathbf{h})] = \mathbf{h}(\mathbf{y})\Delta\mathbf{t}(\mathbf{y}), \\ \int_{-h}^h \mathbf{w}_{,2} d\mathbf{h} &= 2h\mathbf{w}_{,2}^{\text{avr}} \approx \mathbf{h}(\mathbf{y})[\mathbf{w}_{,2}(\mathbf{h}) + \mathbf{w}_{,2}(-\mathbf{h})] = \mathbf{h}(\mathbf{y})\Sigma\mathbf{w}_{,2}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (20)$$

З рівнянь (19), (20) і співвідношень (18), нехтуючи взаємодією механічних полів у нормальних та дотичних напрямках стосовно серединної лінії включення, отримаємо таку модель тонкої неоднорідності:

$$\Delta\mathbf{t}(\mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{Q}^i(\mathbf{y})}{\mathbf{h}(\mathbf{y})}[\Delta\mathbf{w}(\mathbf{y}) + \Delta\mathbf{w}^*(\mathbf{y})], \quad \Sigma\mathbf{w}(\mathbf{y}) = 2\mathbf{w}^0 + \int_{y_0}^y \frac{\mathbf{P}(\mathbf{y}) + \mathbf{P}^*(\mathbf{y})}{\mathbf{T}^i(\mathbf{y})\mathbf{h}(\mathbf{y})}d\mathbf{s}, \quad (21)$$

де $\Delta \mathbf{w}^*(\mathbf{y})$, $\mathbf{P}^*(\mathbf{y})$ – коригувальні функції.

Для обчислення середнього значення \mathbf{w}^0 переміщення лівого торця включення до отриманих співвідношень треба долучити рівняння рівноваги включення

$$\mathbf{P}^n + \mathbf{P}^0 - \int_{\Gamma_c^+} \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (22)$$

де \mathbf{P}^n – сила, прикладена до правого торця включення.

4. **Застосування методу граничних елементів.** Систему інтегральних рівнянь (12)–(14) разом із рівняннями (21), (22) розв'язуватимемо методом граничних елементів [11, 12]. Для цього криві Γ та Γ_c апроксимуємо за допомогою, відповідно, \mathbf{n} та \mathbf{n}_c прямолінійних відрізків – граничних елементів Γ_q . На кожному елементі виберемо по три вузлові точки: одну в центрі, а інші дві на відстані 1/3 довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний граничний елемент). Тоді точка колокації завжди потраплятиме на гладку ділянку утвореного апроксимацією контуру, тобто висунуті до рівнянь (12)–(14) умови будуть забезпечені. Крайові функції \mathbf{t} , \mathbf{w} , $\Sigma \mathbf{t}$ та $\Delta \mathbf{w}$ апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями.

Отож, інтегральні рівняння (12)–(14) разом із моделлю включення (21), (22) зводяться до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення вузлових значень крайових функцій \mathbf{t} , \mathbf{w} , $\Sigma \mathbf{t}$ та $\Delta \mathbf{w}$.

Базові функції на граничних елементах, що не прилягають до кінців включення, задаються інтерполяційними поліномами Лагранжа для системи вузлів $\xi_p = \{-2/3; 0; 2/3\}$.

Для підвищення точності запропонованого методу і зручного визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень треба застосувати спеціальні методи для моделювання кінців включення. Зокрема, відповідно до [11] для цього доцільно використати такі системи базових функцій:

для розривів переміщень

$$\phi_p^{\Delta \mathbf{w}} = \Phi_{p1}^{\Delta \mathbf{w}} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta \mathbf{w}} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta \mathbf{w}} \rho^{3/2}, \quad (p = 1, 2, 3) \quad (23)$$

і для стрибків напружень

$$\phi_p^{\Sigma \mathbf{t}} = \Phi_{p1}^{\Sigma \mathbf{t}} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma \mathbf{t}} + \Phi_{p3}^{\Sigma \mathbf{t}} \sqrt{\rho}, \quad (p = 1, 2, 3), \quad (24)$$

де $\rho = 1 \pm \xi$; $|\xi| \leq 1$ – параметр розташування точки на елементі; $\Phi_{pj}^{\Delta \mathbf{w}}$ та $\Phi_{pj}^{\Sigma \mathbf{t}}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь $\phi_p(\xi_p) = 1$, $\phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0$, де ξ_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Базові функції (23) і (24) дають змогу з високою точністю обчислювати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень \mathbf{K}_{31} і \mathbf{K}_{32} за формулами [11]

$$\mathbf{K}_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \Delta \mathbf{w}(s), \quad \mathbf{K}_{32} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (25)$$

де $\mathbf{L} = -2\sqrt{-\mathbf{b}^2}$ – дійсне число, що відповідає тензору Барнет – Лоте \mathbf{L} у випадку плоскої анізотропії.

5. Числові результати. Прямолінійне включення. Для ілюстрації точності й ефективності запропонованого методу розглянемо задачу про тонке прямолінійне пружне включення у безмежному середовищі за його всебічного зсуву сталими напруженнями $\sigma_{xz}^\infty = \sigma_{yz}^\infty = \tau$ на нескінченності. Схема задачі зображена на рис. 2. У розрахунках вважали, що товщина $2h$ включення дорівнює 0,001 його довжини $2a$, тобто $h = 0,001a$. Відносна жорсткість неоднорідності характеризується параметром $k = G^i/c_{44}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу включення. Коригувальні функції $\Delta \mathbf{w}^*(\mathbf{y})$, $\mathbf{P}^*(\mathbf{y})$ та торцеві сили \mathbf{P}^0 , \mathbf{P}^n вважали нульовими.

Обчислені запропонованим підходом значення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) зіставлені з результатами розрахунку тонкого прямокутного включення відповідних розмірів за допомогою регуляризаційного МГЕ [2] із визначенням узагальнених КІН методом апроксимації [13]. Результати обчислення обома методами нормованих узагальнених КІН $\mathbf{K}_{3i}^* = \mathbf{K}_{3i}/\sqrt{\pi a}$ зображені на рис. 2. Суцільні лінії відповідають застосуванню запропонованого методу, а штрихові – прямого підходу. Розглянуто випадок ізотропного (крива 1) та анізотропного ($c_{45} = 0$, $c_{55}/c_{44} = 10$, крива 2) матеріалу.

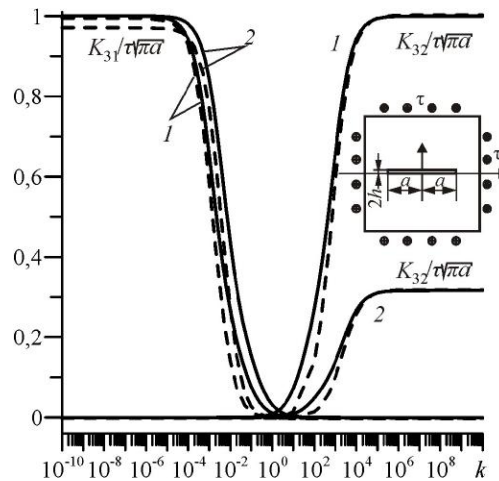


Рис. 2. Узагальнені КІН для тонкого включення за всебічного зсуву ізотропного (1) та анізотропного (2) матеріалу

Коли значення відносної жорсткості включення k наближається до нуля (тріщина) чи безмежності (абсолютно жорстке включення) відхилення отриманих запропонованим методом узагальнених КІН від аналітичного розв'язку для тріщини чи жорсткого включення [3] менше за 0,04% для ізотропного та анізотропного випадків. Відхилення результатів прямого підходу значно більші і становлять 1,5 % для ізотропного та 3,5 % для анізотропного матеріалу (однак прямий метод враховує також реальну, ненульову товщину неоднорідності, а точні аналітичні розв'язки отримано для товщини нульової).

Для проміжних значень відносної жорсткості включення запропонований підхід дає порівняно з прямим підходом трохи більші значення узагальнених КІН. Це пояснюється нехтуванням коригувальних функцій і впливом проміжної асимптотики на метод апроксимації [13].

Перевагою запропонованого підходу є суттєве зменшення загальної кількості граничних елементів (21 проти 311), використаних для моделювання задачі.

Включення вздовж дуги кола в ізотропному середовищі. Розглянемо задачу про тонке пружне включення уздовж дуги кола в ізотропному середовищі. Схема задачі зображена на врізці до рис. 3. Товщина включення дорівнює 0,01 довжини хорди, що поєднує кінці дуги, тобто $h = 0,01a$. Відносна жорсткість неоднорідності характеризується параметром $k = G^i/c_{55}$, де G^i – модуль зсуву матеріалу включення. Коригувальні функції вважають нульовими. Тіло навантажене на безмежності зусиллями $\sigma_{xz}^\infty = \tau$, $\sigma_{yz}^\infty = 0$. Залежність нормованих узагальнених КІН $K_{3i}^* = K_{3i}/\tau\sqrt{\pi a}$ від відносної жорсткості k включення

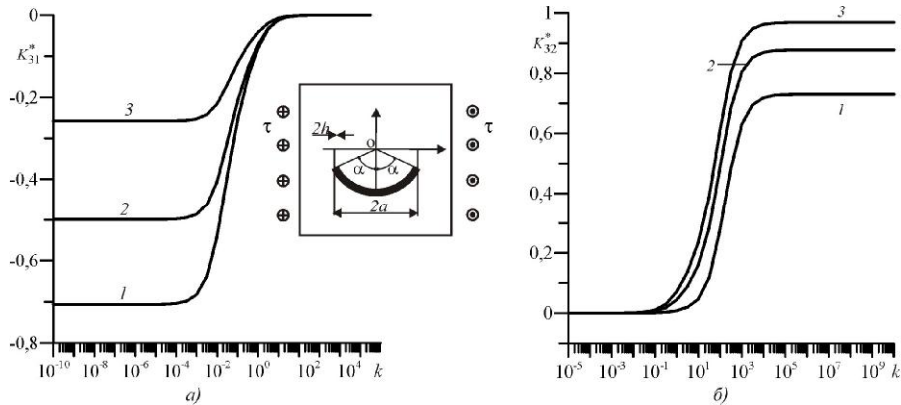


Рис. 3. Нормовані узагальнені КІН K_{31}^* (а) та K_{32}^* (б) для включення уздовж дуги кола в ізотропному середовищі

для певних значень параметра α зображено на рис. 3. Криві 1, 2, 3 відповідають таким значенням α : $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi/3$ та $\alpha = \pi/6$. Для дискретизації серединної лінії (перерізу поверхні) включення використано 41 граничний елемент.

Результати обчислень отримані за допомогою аналітичного розв'язку (АР) [14] та запропонованого варіанту методу граничних елементів для різних значень параметрів α , σ_{3j}^∞ та \mathbf{k} подані в табл. 1. Отримані методом граничних елементів значення узагальненого КІН для тріщини відхиляються від аналітичного розв'язку [14] не більше, як на 0,25%. Для абсолютно жорсткого включення ця похибка дещо більша, проте не перевищує 3,3%. Зі збільшенням кількості граничних елементів удвічі це відхилення зменшується до 1,3%, а при збільшенні утричі – до 0,7%.

Таблиця 1

α	\mathbf{K}_{31}^* , $\mathbf{k} = 10^{-10}$						\mathbf{K}_{32}^* , $\mathbf{k} = 10^{10}$					
	$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$			$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$		
	АР	МГЕ	$D^*,\%$	АР	МГЕ	$D^*,\%$	АР	МГЕ	$D^*,\%$	АР	МГЕ	$D^*,\%$
$\pi/2$	-0,7071	-0,7063	0,11	0,7071	0,7086	0,21	0,7071	0,7304	3,29	0,7071	0,7043	0,39
$\pi/3$	-0,5	-0,4990	0,20	0,8660	0,8666	0,06	0,8660	0,8775	1,32	0,5	0,4923	1,54
$\pi/6$	-0,2588	-0,2582	0,23	0,9659	0,9659	-	0,9659	0,9692	0,34	0,2588	0,2532	2,16

* D – відхилення результатів отриманих МГЕ від аналітичного розв'язку (АР).

Включення уздовж дуги кола в анізотропному середовищі. Поряд із задачею для ізотропного середовища дослідимо застосування запропонованого методу для розв'язування задачі про тонке пружне включення уздовж дуги кола в анізотропному середовищі. Геометричні та механічні параметри включення такі самі, як і в попередньому прикладі. Схему задачі зображено на врізці до рис. 3. Конкретизуючи формулювання задачі, вважаємо, що тіло ортотропне, тобто $\mathbf{c}_{45} = \mathbf{0}$. Міру анізотропії характеризуватимемо параметром $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{44}/\mathbf{c}_{55}$. У цьому разі вважатимемо, що тіло навантажене зусиллями $\sigma_{xz}^\infty = \tau$, $\sigma_{yz}^\infty = \mathbf{0}$.

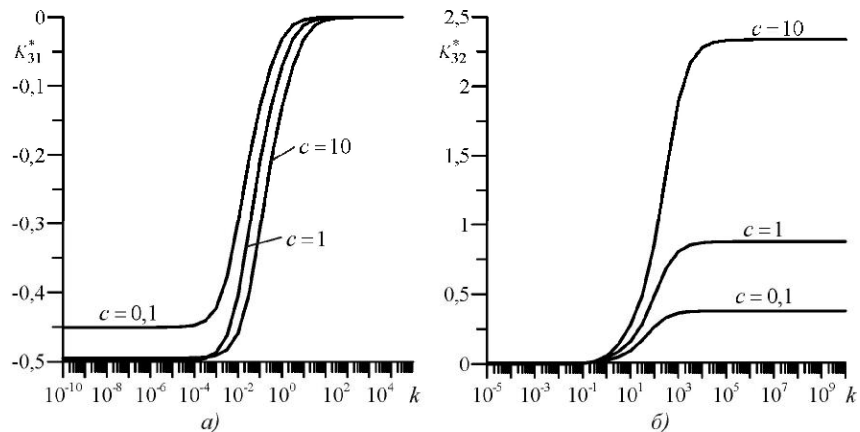


Рис. 4. Нормовані узагальнені КІН K_{31}^* (а) та K_{32}^* (б) у разі ізотропії ($c = 1$) та анізотропії ($c = 0,1$ та $c = 10$) матриці при $\alpha = \pi / 6$

Для виявлення впливу ортотропії на узагальнені КІН розглянуто окремо випадки $c = 0,1$ та $c = 10$ порівняно з випадком ізотропії ($c = 1$). Ці залежності у разі $\alpha = \pi / 6$ для тріщини зображені на рис. 4, а, а для абсолютно жорсткого включення – на рис. 4, б. Отримані методом граничних елементів результати для анізотропної матриці при $c = 0,1$ та $c = 10$, а також результати аналітичного розв'язку у разі ізотропії подані в табл. 2.

Таблиця 2

		$K_{31}^*, k = 10^{-10}$						$K_{32}^*, k = 10^{10}$					
		$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$			$\sigma_{xz} = 1, \sigma_{yz} = 0$			$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 1$		
α		Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$	Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$	Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$	Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$	Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$	Ізотро- пія	МГЕ, $D^*,\%$
$\pi/2$	$c = 0,1$	-0,707	-0,601	-15,0	0,707	1,113	+57,4	0,707	0,358	-49,4	0,707	1,902	+169,0
	$c = 10$		-0,730	+3,3		0,455	-35,6		1,560	+120,7		0,230	-67,5
$\pi/3$	$c = 0,1$	-0,5	-0,450	-10,0	0,866	1,192	+37,6	0,866	0,381	-56,0	0,5	1,420	+184,0
	$c = 10$		-0,494	-1,2		0,735	-15,1		2,337	+169,9		0,151	-69,8
$\pi/6$	$c = 0,1$	-0,258	-0,249	-3,5	0,965	1,129	+17,0	0,965	0,360	-62,7	0,258	0,784	+203,9
	$c = 10$		-0,258	-		0,934	-3,2		2,957	+206,4		0,079	-69,4

* D —відхилення результатів отриманих МГЕ від аналітичного розв'язку (АР).

Аналізуючи отримані для анізотропної матриці числові результати, можна простежити певні закономірності. У випадку тріщини максимальне відхилення значення КІН дорівнює 58% і досягається при $\alpha = \pi/2$. У разі

$\alpha \rightarrow 0$ значення K_{31} для анізотропної матриці прямує до значення K_{31} ізотропної матриці, тобто у разі вирівнювання тріщини вплив анізотропії помітно зменшується або його взагалі немає. За наявності в тілі абсолютно жорсткого включення простежується суттєвий вплив анізотропії середовища. При $\alpha = \pi/2$ досягається мінімальне відхилення значення КІН K_{32} , яке дорівнює 50%. За подальшого вирівнювання осі включення (зі збереженням відношення h/a) залежно від прикладеного навантаження та міри анізотропії відбувається збільшення чи зменшення значення КІН K_{32} приблизно втричі порівняно з відповідним K_{32} для ізотропного середовища.

Ще одним параметром, поряд із кутом α , що має вплив на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень є параметр c міри анізотропії. При $c < 1$ значення КІН K_{31} та K_{32} за дії навантаження $\sigma_{xz}^\infty = \tau$; $\sigma_{yz}^\infty = 0$ менші, а за дії навантаження $\sigma_{xz}^\infty = 0$; $\sigma_{yz}^\infty = \tau$ – більші за відповідні КІН для ізотропної матриці. Коли $c > 1$ ситуація протилежна: значення K_{31} та K_{32} збільшуються при навантаженні $\sigma_{xz}^\infty = \tau$; $\sigma_{yz}^\infty = 0$ та зменшуються для навантаження $\sigma_{xz}^\infty = 0$; $\sigma_{yz}^\infty = \tau$. Отже, зміна параметра c дає змогу значно зменшувати значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, що є важливим для створення нових матеріалів.

6. Висновки. Ми запропонували ефективну схему методу граничних елементів для розв'язування задач антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями, яка допомогла майже у десять разів зменшити кількість граничних елементів, потрібних для застосування прямого регуляризаційного МГЕ. Розглянуто задачі про прямолінійне включення у безмежному середовищі та про включення уздовж дуги кола в ізотропному та анізотропному матеріалах. Для першої задачі похибка методу порівняно з аналітичним розв'язком для тріщини чи абсолютно жорсткого включення навіть для малої кількості використаних граничних елементів не перевищує 0,04%. Тобто, отримані цими обома методами результати майже ідентичні. Для неоднорідності уздовж дуги кола похибка запропонованого методу при ізотропії середовища менша за 3,5% (табл. 1) – збільшуючи кількість граничних елементів цю похибку можна зменшити. Величина кута α розхилу неоднорідності має різний вплив на числові результати, а саме: зменшення кута α зменшує відхилення між значеннями КІН для ізотропної та ортотропної матриць у випадку тріщини, і навпаки, збільшує це відхилення у разі абсолютно жорсткого включення. В ортотропному матеріалі на зміну (збільшення, зменшення) значень узагальнених КІН разом із параметром α впливає також міра ортотропії, що зображено на рис. 4. Врахування взаємозв'язку між коефіцієнтами інтенсивності напружень і властивостями матеріалу,

зокрема й орієнтацією головних осей ізотропії, є дуже важливим. Належно підбираючи механічні характеристики матеріалу, орієнтацію включень (арматури) можна досягти часто й дуже суттєвого зниження значень КІН.

Список використаної літератури

1. *Йяа°Г Ч. бѢяа-§° еГ«Ј» зезе ЈУжз СеГѢ“-Ј° фа- «ф«® зѢѢУ : §Я ЈежзУ зеЈѢжзУЈЈГ° жз§ЯѢзЯ§«Г°/ Ч йяа°Г , е. Ѣ«жзѢ§Ј«Ѣ/ УжЈ “ГѢ. ЯЈ-зЯ йѢ§ Ѣ§°Ѣа. Г«зѢГ. з« УЈ е§Г. – °. : 13. – 2007. – й. 142–150.*
2. *Йяа°Г Ч. р. «жжжЯ«ЈЈ- ГѢѢѢя , §«Ј° ®° и ѢѢГѢЈѢУ фе «Ј«аУЯ «Јз° : ае жѢ фѢ е§Г«нУ «ЈУез§е: Ј° и зѢ У зеЈѢжзУЈЈГ° жз§ЯѢзЯ§«Г°/ Чр. йяа°Г , е.ы. Ѣ«жзѢ§Ј«Ѣ/ ы«з. ГѢѢѢ з« У.-ГѢ. : еа -. – 2008. – 51. – j 4. – й. 136–144.*
3. *Йяа°Г Ч. р. яжѢГ° Г«зѢГ«з°®Је зѢѢУ зѢ§Іе: §Я Је §ѢЈеГ«, ° фѢ е§ГѢЈГ° и зГѢѢѢ и зѢ зеЈѢГ° ГѢа—ѢЈЈ-Г° / Чр. йяа°Г . – ые Је, §« У.— “ГѢ: ЦежѢЈе-Г° ф«Г° ® Ѣ нѢЈз§э р” , 2007.*
4. *“ЈЈн“Ѣ» . э«: §Я ѢѢ-фѢ е§Г еГ° Ѣ жз«Ј: §Я Је, е зѢ» зеЈѢГ° ГѢа—ѢЈЈ-Г°/ . °ЈЈ н“Ѣ» е. й«ГЯа« // ‘ У.-Г«з. ГѢѢѢ—Г«ЈЈ- з« УЈ. зѢЈеае, У. – 2008. – j 7. – й. 21–29.*
5. *ѢѢжз§°, «®е. й. с Г еГ° зѢаеГе,е ѢеЈз«ѢзЯ зГѢѢѢ и зѢ / е.й. ѢѢжз§°, «®// Це: . щэ сѢ йб. йѢ§ щ – 1963. – j 7. – й. 872–874.*
6. *Ѣе: еГ . Ч. еЈнѢЈз§н°- Ј«: §- ѢЈѢ Г-а° ° езжѢ Г- Ѣеж-зеЈѢе Я §Яе,е ГѢа—ѢЈ- : §° Ге фѢѢѢ° ЈѢжж° еЈ«§ЈеѢ ГеаЈЈ : §ефеа“Је,е жфГ, « / . Ч Ѣе: еГ, щѢ. ыѢѢѢѢѢ // рѢ§Ѣз ° : §°а«ф»- ГѢи«Ј°Ѣ», 2005. – Ц: . 41. – й. 184–192.*
7. *ѢѢжз§°, «®е. й. с жѢГ°- жѢѢѢ Ј«: §- ѢЈѢ ° : Ѣ§ѢѢѢЈѢѢ Ј« зеЈѢжзѢЈѢ ГѢа—ѢЈ° Г жае- ЈеѢ ж§ѢѢ/ е.й. ѢѢжз§°, «®// ЦеѢ. щэ с ййб. йѢ§ щ, 1982. – j 12. – й. 29–31.*
8. *ІѢ§Ѣ«ЈеГ Ч. Ѣ. ыѢѢѢ ГѢѢ Ј° и ° ГЈЯз§ѢЈЈи §« ае ѢЈѢ Г зѢѢ° Я §Яежз° / ЧѢ. ІѢ§Ѣ«ЈеГ // ыѢи«Ј°Ѣ» фѢ е§Г°§ЯѢГѢи зѢѢ ° ѢеЈжз§ЯѢ Ѣ. ы.: ы«- ° Јежз§ѢЈ°Ѣ 1975. – й. 502–507.*
9. *ѢиЈ°нѢѢ Ѣ. Ч. рѢѢ°- Я §Яежз° «Ј° ез§е: Је,е зѢа« / й.Ч ѢиЈ° нѢѢѢ. – ы.: з«ЯѢ», 1977.*
10. *Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press, 1996.*
11. *Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – 35, j . 4. – P. 678-690.*

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE ANTIPLANE SHEAR OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH THIN INHOMOGENEITIES

Iaroslav PASTERNAK¹, Heorhiy SULYM², Nazar OLIYARNYK²

*¹National Technical University of Lutsk,
L'vivska Str., 75 79060 Lutsk, Ukraine*

*²Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the coupling principle for continua of different dimension the problem of antiplane shear of a solid containing a thin inhomogeneity is reduced to the system of singular integral equations, which are solved numerically by the boundary element method. Solids containing thin line or curved inhomogeneities are considered. SIF for different values of the central angle of the arc inhomogeneity in isotropic and anisotropic media are calculated. The results obtained by the proposed method are compared with the analytical solutions. The influence of the anisotropy of the solid and the inclusion's rigidity the stress intensity factors is studied.

Key words: antiplane shear, boundary element method, thin inclusion, generalized stress intensity factors.

йз«зз- J«фУ-а « фе § Псеа Ё У 24.11.2011
Ў § ° ў J-з« фе д § Я □ Я 31.05.2012