ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2010. *Ser. Mech. Math. 2010.*
Вип. 72. С. 263–274 *Is. 72. P. 263–274*

УДК 517.9

КОНСТРУКТИВНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРА РОЗСІЯННЯ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Юрій СИДОРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Запропоновано конструктивний метод побудови операторів перетворення та розсіяння у випадку вироджених даних розсіяння для нестаціонарної системи Дірака, який ґрунтується на бінарних перетвореннях типу Дарбу. Знайдено зв'язок між результатами, отриманими в цій праці, та результатами Л. Нижника з теорії обернених задач розсіяння.

Ключові слова: бінарні перетворення Дарбу, оператор розсіяння, система Дірака.

1. Вступ. Ми розглянемо нестаціонарну гіперболічну систему рівнянь Дірака вигляду

$$LY=0,\quad Y=\begin{pmatrix} Y_1(x,\,y)\\ Y_2(x,\,y)\end{pmatrix},\quad L=\alpha\partial_y-\sigma_3\partial_x+U=\begin{pmatrix}\alpha\partial_y-\partial_x & u_1(x,\,y)\\ u_2(x,\,y) & \alpha\partial_y+\partial_x\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3=diag\,(1,\,-1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \partial_x:=\tfrac{\partial}{\partial x},\quad \partial_y:=\tfrac{\partial}{\partial y},\tag{1}$$

де $\mathbb{R}_+\ni\alpha$ – деяка додатна стала, а комплекснозначні функції (потенціали) $u_1(x,\ y)$, $u_2(x,\ y)$ достатньо швидко спадають на нескінченностях.

Пряму й обернену задачі розсіяння для системи (1), де $y:=t$ (еволюційна змінна), $\alpha=1$ досліджував вперше Л.П. Нижник в [1]. В цій праці були описані властивості оператора розсіяння S, що визначається співвідношенням

$$b=Sa,\tag{2}$$

де $b=\begin{pmatrix}b_1(y+\alpha x)\\ b_2(y-\alpha x)\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}a_1(y+\alpha x)\\ a_2(y-\alpha x)\end{pmatrix}$ є асимптотиками розв'язку $Y=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}$ системи (1)

$$\begin{aligned} &Y_1(x,\,y) = a_1(y+\alpha x) + o(1)\,, \;\; Y_2(x,\,y) = b_2(y-\alpha x) + o(1)\,, \quad x \to +\infty; \\ &Y_1(x,\,y) = b_1(y+\alpha x) + o(1)\,, \;\; Y_2(x,\,y) = a_2(y-\alpha x) + o(1)\,, \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, що асимптотичні рівності (3) еквівалентні до таких:

$$\begin{aligned} &Y_1(x,\,y) = a_1(y+\alpha x) + o(1)\,, \;\; Y_2(x,\,y) = a_2(y-\alpha x) + o(1)\,, \quad y \to -\infty; \\ &Y_1(x,\,y) = b_1(y+\alpha x) + o(1)\,, \;\; Y_2(x,\,y) = b_2(y-\alpha x) + o(1)\,, \quad y \to +\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Функції a і b (2) є, очевидно, розв'язками незбуреної ($u_1 \equiv u_2 \equiv 0$) системи (1), а з фізичного погляду, це асимптотики хвиль, що падають на потенціал U (1) і хвиль, які пройшли потенціальний бар'єр, відповідно. Саме $a_1(y+\alpha x)$ – асимптотика хвилі, що "приходить з $+\infty$", а $a_2(y-\alpha x)$ – асимптотика хвилі, яка "приходить з $-\infty$".

Оператор розсіяння S (2) переводить розв'язки незбуреної системи

$$L_0 Y_0 = 0, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} Y_{10}(y+\alpha x) \\ Y_{20}(y-\alpha x) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

в розв'язки цієї ж системи (5) і є прикладом інваріантного ($[S, L_0] := SL_0 - L_0 S = 0$) оператора автоперетворень типу Беклунда-Дарбу.

В [1] було доведено, що антидіагональні елементи матричних розмірностей (2×2) операторів $S - I := F$, $S^{-1} - I := G$ є операторами Фредгольма, а діагональні елементи – оператори Вольтерра. Можливість факторизації оператора розсіяння S так званими операторами перетворень (що переводять розв'язки незбуреної системи (5) у розв'язки системи Дірака (1)) допомагає отримати аналоги рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана. Ці рівняння оберненої задачі є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду, що зв'язують ядра оператора розсіяння і операторів перетворень. Оператори перетворень дають змогу відновити потенціали $u_1(x,\,y)$, $u_2(x,\,y)$ системи Дірака (1) за заданими даними розсіяння. При вироджених даних розсіяння (вироджених ядрах оператора розсіяння S) оператори перетворень і потенціали системи (1) можуть бути знайдені явно. Відповідні формули отримали в Розділі 3.

Мета нашої праці – знайти в явному вигляді оператори перетворення оберненої задачі для системи Дірака (1) і відповідного їм оператора розсіяння з виродженими даними розсіяння. Ми пропонуємо конструктивний алгоритм їхньої побудови, що ґрунтується на розробленій в [2-4] теорії бінарних перетворень типу Беклунда-Дарбу.

Подібні результати для системи рівнянь Дірака в конусних змінних були отримані в [5], де також проаналізували їхнє співвідношення з дослідженнями Л.П. Нижника [6].

Одним із головних завдань роботи також є доведення того, що розв'язки оберненої задачі розсіяння збігаються з потенціалами системи Дірака (1), отриманими методом бінарних перетворень (див. Розділ 3, Твердження 2).

Зауважимо, що метод бінарних перетворень має алгебризований характер, тому отримані явні формули для потенціалів (19) і (54) правильні і при $\alpha = i \in i\mathbb{R}$. У цьому випадку вихідна система (1) стає еліптичною і не підпадає під методику [1].

Робота організована так. В Розділі 2 стисло вводяться необхідні поняття і означення з теорії бінарних перетворень для системи Дірака (1).

Основні результати статті містяться в Розділі 3.

В розділі 4 ми зробили деякі зауваження про результати, які отримали в цій праці, так і ті, які з різних причин (в тім числі, щоб суттєво не збільшити обсяг статті) не розкриті в основному тексті. Ми сподіваємось у наступних публікаціях повернутись до цих питань.

2. Вихідні положення. Конструкція загальних бінарних перетворень для довільних еволюційних операторів запропонована в [2-4], а для випадку оператора Дірака (1) відповідні побудови проведені в [7].

Подамо деякі з них. Нехай:

1) $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x, y) \\ Y_2(x, y) \end{pmatrix}$ – довільний розв'язок системи (1);

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\ y) \\ \varphi_2(x,\ y) \end{pmatrix} \tag{6}$$

– деяка фіксована розмірності $(2 \times K)$ матриця розв'язків системи (1);

2)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,\ y) \\ \psi_2(x,\ y) \end{pmatrix} \tag{7}$$

– фіксована матриця розв'язків транспонованої системи

$$L^{\tau}\psi = 0, \tag{8}$$

$$L^{\tau} = -\alpha\partial_y + \sigma_3\partial_x + U^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\alpha\partial_y + \partial_x & u_2(x,\ y) \\ u_1(x,\ y) & -\alpha\partial_y - \partial_x \end{pmatrix}.$$

Матричні $(K \times K)$ функції $P[\psi,\ \varphi] := \alpha\psi^{\mathrm{T}}\varphi$, $Q[\psi,\ \varphi] = \psi^{\mathrm{T}}\sigma_3\varphi$ задовольняють співвідношення

$$P_y = Q_x, \tag{9}$$

наслідком чого є існування (з точністю до сталої) матричного потенціалу

$$\Omega = \Omega[\psi,\ \varphi], \qquad d\Omega[\psi,\ \varphi] = Pdx + Qdy, \tag{10}$$

$$\Omega = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} Pdx + Qdy.$$

Оператор загальних бінарних перетворень типу Дарбу W, побудований з використанням систем функцій φ, ψ (6)-(9), та його обернений W^{-1} згідно з результатами [2-4] набувають, відповідно, вигляду

$$W = I - \varphi\ \Delta^{-1}\Omega[\psi,\ \cdot], \tag{11}$$

$$W^{-1} = I + \varphi\ \Omega\left[\psi\left(\Delta^{\mathrm{T}}\right)^{-1},\ \cdot\right],$$

де $\Delta := C + \Omega[\psi,\ \varphi]$, $C \in Mat_{K\times K}(\mathbb{C})$ – деяка стала комплексна матриця розмірності $(K \times K)$.

Твердження 1. *[7] 1. При перетворенні подібності*

$$L \to \widehat{L} := WLW^{-1} \tag{12}$$

з оператором бінарних перетворень типу Дарбу (11) оператор $\widehat{L}$ є оператором Дірака з потенціалами

$$\widehat{u}_1 = u_1 - 2\varphi_1\Delta^{-1}\psi_2^{\mathrm{T}}, \quad \widehat{u}_2 = u_2 + 2\varphi_2\Delta^{-1}\psi_1^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

2. Довільний розв'язок $Y(x,\ y)$ системи Дірака (1) переходить у розв'язок $\widehat{Y}(x,\ y)$ системи Дірака

$$\widehat{L}\widehat{Y} = 0 \tag{14}$$

з потенціалами $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$ (13) за формулою

$$\widehat{Y} = WY. \tag{15}$$

Нехай тепер $Y_0 = (Y_{10}(y+\alpha x),\ Y_{20}(y-\alpha x))^{\mathrm{T}}$ – довільний розв'язок, а

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y+\alpha x) \\ \varphi_2(y-\alpha x) \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1(y+\alpha x) \\ \psi_2(y-\alpha x) \end{pmatrix} \tag{16}$$

– фіксовані $(2 \times K)$ матричні розв'язки незбурених систем

$$L_0 Y_0 = 0, \quad L_0\varphi = 0, \quad L_0^{\tau}\psi = 0. \tag{17}$$

Наслідком Твердження 1 є таке. Функція

$$Y := WY_0, \tag{18}$$

де W – оператор загальних бінарних перетворень (11) побудований за системами функцій φ, ψ (16)-(17) є загальним розв'язком нестаціонарної гіперболічної системи (1), з потенціалами u_1, u_2 вигляду

$$u_1 = -2\varphi_1\Delta^{-1}\psi_2^{\mathrm{T}}, \quad u_2 = 2\varphi_2\Delta^{-1}\psi_1^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

тобто

$$L = WL_0W^{-1} = \alpha\partial_y - \sigma_3\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Зауваження 1. Оператор W (11) залежить від вибору сталої матриці C та від конкретної реалізації потенціалу $\Omega[\psi,\ \varphi]$ (10).

Прийнявши в формулах (9)-(10) $x_0 = x$; $y_0 = -\infty$, отримаємо

$$\Omega_1[\psi,\ \varphi] = \int_{-\infty}^{y} \left[\psi_1^{\mathrm{T}}(s+\alpha x)\ \varphi_1(s+\alpha x) - \psi_2^{\mathrm{T}}(s-\alpha x)\ \varphi_2(s-\alpha x)\right] ds. \tag{21}$$

Прийнявши $x_0 = x$; $y_0 = +\infty$, отримаємо

$$\Omega_2[\psi,\varphi] = \int_{+\infty}^{y} \left[\psi_1^{\mathrm{T}}(s+\alpha x)\ \varphi_1(s+\alpha x) - \psi_2^{\mathrm{T}}(s-\alpha x)\ \varphi_2(s-\alpha x)\right] ds. \tag{22}$$

Для Твердження 1 правильний такий наслідок.

Наслідок 1. *Правильними є такі співвідношення*

$$L = W_1 L_0 W_1^{-1} = W_2 L_0 W_2^{-1}, \tag{23}$$

де оператори бінарних перетворень W_1, W_2 *у розгорнутій формі мають вигляд*

$$W_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1 \Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds & -\varphi_1 \Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \\ \varphi_2 \Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds & -\varphi_2 \Delta_1^{-1} \int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$W_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1 \Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds & -\varphi_1 \Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \\ \varphi_2 \Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds & -\varphi_2 \Delta_2^{-1} \int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \end{pmatrix}, \tag{25}$$

де

$$\Delta_1(\tau + \alpha x, z - \alpha x) := C_1 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} \psi_1^{\top} \varphi_1(s + \alpha x) ds - \int\limits_{-\infty}^{z} \psi_2^{\top} \varphi_2(s - \alpha x) ds,$$

$$\Delta_2(\tau + \alpha x, z - \alpha x) := C_2 + \int\limits_{+\infty}^{\tau} \psi_1^{\top} \varphi_1(s + \alpha x) ds - \int\limits_{+\infty}^{z} \psi_2^{\top} \varphi_2(s - \alpha x) ds;$$

$\Delta_1(y + \alpha x, y - \alpha x) := \Delta_1 = C_1 + \Omega_1[\psi, \varphi]$, $\Delta_2(y + \alpha x, y - \alpha x) := \Delta_2 = C_2 + \Omega_2[\psi, \varphi]$.
Внаслідок рівності $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ *сталі* C_1 *і* C_2 *зв'язані співвідношенням*

$$C_2 \quad = \quad C_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[\psi_1^{\mathrm{T}}(s + \alpha x)\, \varphi_1(s + \alpha x) - \psi_2^{\mathrm{T}}(s - \alpha x)\, \varphi_2(s - \alpha x) \Big] ds. \tag{26}$$

3. Основна частина.

3.1. Метод бінарних перетворень. Ми будуємо оператор розсіяння S (2) у вигляді

$$S = \widehat{W}_2^{-1} \widehat{W}_1, \tag{27}$$

де $\widehat{W}_1$, $\widehat{W}_2$ - пара спеціальних операторів перетворень, які пов'язують асимптотики $a\,(x,\ y)$, $b\,(x,\ y)$ (див. формули (4)) з розв'язком $Y\,(x,\ y)$ системи Дірака (1)

$$Y = \widehat{W}_1 a, \tag{28}$$

$$Y = \widehat{W}_2 b. \tag{29}$$

Нагадаємо, що оператор S (27) діє в просторі розв'язків незбуреної системи (5) інваріантно (є автоперетворенням Беклунда-Дарбу)

$$[S,\ L_0] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{W}_1 L_0 \widehat{W}_1^{-1} = \widehat{W}_2 L_0 \widehat{W}_2^{-1} = L. \tag{30}$$

Зауважимо, що операторів перетворень є безліч. Наприклад, якщо

$$W L_0 W^{-1} = L, \tag{31}$$

то і $(WA)\, L_0\, (WA)^{-1} = L$, де оператор A є довільним автоперетворенням незбуреного оператора L_0

$$A L_0 A^{-1} = L_0 \qquad ([A,\ L_0] = 0)\,.$$

Для побудови спеціальних операторів перетворень (28), (29) ми використовуватимемо загальні бінарні перетворення Розділу 2, а саме, знайдені там оператори W_1, W_2 (24), (25).

За попереднім зауваженням (див. формулу (35)) ми визначаємо оператори $\widehat{W}_1$, $\widehat{W}_2$ у формі

$$\widehat{W}_1 := W_1 S_1, \quad \widehat{W}_2 := W_2 S_2, \tag{32}$$

де оператори автоперетворень S_1 і S_2 знаходять з асимптотичних умов

$$\begin{aligned}(\widehat{W}_1 a)_1 &= (W_1 S_1 a)_1 \xrightarrow[y\to-\infty]{y+\alpha x=const} a_1(y+\alpha x),\\ (\widehat{W}_1 a)_2 &= (W_1 S_1 a)_2 \xrightarrow[y\to-\infty]{y-\alpha x=const} a_2(y-\alpha x),\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}(\widehat{W}_2 b)_1 &= (W_2 S_2 b)_1 \xrightarrow[y\to+\infty]{y+\alpha x=const} b_1(y+\alpha x),\\ (\widehat{W}_2 b)_2 &= (W_2 S_2 b)_2 \xrightarrow[y\to+\infty]{y-\alpha x=const} b_2(y-\alpha x).\end{aligned} \tag{34}$$

Розпишемо умови (33) у явному вигляді

$$\begin{aligned}(W_1S_1a)_1 &= \{(S_1)_{11}a_1 + (S_1)_{12}a_2\}(y+\alpha x) - \varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\times\\ &\times\{(S_1)_{11}a_1 + (S_1)_{12}a_2\}(s+\alpha x)ds + \varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}\times\\ &\times\int_{-\infty}^{y}\psi_2^{\mathrm{T}}\{(S_1)_{21}a_1 + (S_1)_{22}a_2\}(s-\alpha x)ds \xrightarrow[y\to-\infty]{y+\alpha x=const}\\ &\xrightarrow[y\to-\infty]{y+\alpha x=const} \{(S_1)_{11}a_1 + (S_1)_{12}a_2\}(y+\alpha x) - \varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}(y+\alpha x,-\infty)\times\\ &\times\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\{(S_1)_{11}a_1 + (S_1)_{12}a_2\}(s+\alpha x)ds = a_1(y+\alpha x).\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}(W_1S_1a)_2 &= \{(S_1)_{21}a_1 + (S_1)_{22}a_2\}(y-\alpha x) - \varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}\times\\ &\times\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\{(S_1)_{11}a_1 + (S_1)_{12}a_2\}(s+\alpha x)ds + \varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}\times\\ &\times\int_{-\infty}^{y}\psi_2^{\mathrm{T}}\{(S_1)_{21}a_1 + (S_1)_{22}a_2\}(s-\alpha x)ds \xrightarrow[y\to-\infty]{y-\alpha x=const}\\ &\xrightarrow[y\to-\infty]{y-\alpha x=const} \{(S_1)_{21}a_1 + (S_1)_{22}a_2\}(y-\alpha x) + \varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}(-\infty,y-\alpha x)\times\\ &\times\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\{(S_1)_{21}a_1 + (S_1)_{22}a_2\}(s-\alpha x)ds = a_2(y-\alpha x).\end{aligned} \tag{36}$$

З умов (35) та (36) отримуємо таку систему для елементів оператора S_1:

$$\begin{cases}\left(I - \varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}(y+\alpha x,-\infty)\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds\right)(S_1)_{11}a_1(y+\alpha x) = a_1(y+\alpha x),\\ \left(I - \varphi_1(y+\alpha x)\Delta^{-1}(y+\alpha x,-\infty)\int_{-\infty}^{y}\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds\right)(S_1)_{12}a_2(y-\alpha x) = 0,\\ \left(I - \varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}(-\infty,y-\alpha x)\int_{-\infty}^{y}\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds\right)(S_1)_{21}a_1(y+\alpha x) = 0,\\ \left(I + \varphi_2(y-\alpha x)\Delta^{-1}(-\infty,y-\alpha x)\int_{-\infty}^{y}\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds\right)(S_1)_{22}a_2(y-\alpha x) = a_2(y-\alpha x).\end{cases} \tag{37}$$

Використавши теорему про бінарні перетворення інтегродиференціального оператора [11], знаходимо явний вигляд оператора S_1

$$S_1 = I + \begin{pmatrix} \varphi_1 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, -\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds; \ 0 \\ 0; \ -\varphi_2 \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Аналогічно знаходимо оператор S_2

$$S_2 = I + \begin{pmatrix} \varphi_1 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, +\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds; \ 0 \\ 0; \ -\varphi_2 \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds \end{pmatrix}. \tag{39}$$

З формул (32) отримуємо такі оператори перетворень $\widehat{W}_1$, $\widehat{W}_2$:

$$\widehat{W}_1 = I + \begin{pmatrix} (\widehat{W}_1)_{11} & (\widehat{W}_1)_{12} \\ (\widehat{W}_1)_{21} & (\widehat{W}_1)_{22} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

де

$$(\widehat{W}_1)_{11} = -\varphi_1 \Delta^{-1} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \varphi_2 ds \right) \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, -\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_1)_{12} = \varphi_1 \Delta^{-1} \Delta(-\infty, y-\alpha x) \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_1)_{21} = -\varphi_2 \Delta^{-1} \Delta(y+\alpha x, -\infty) \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, -\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_1)_{22} = -\varphi_2 \Delta^{-1} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}} \varphi_1 ds \right) \int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds.$$

$$\widehat{W}_2 = I + \begin{pmatrix} (\widehat{W}_2)_{11} & (\widehat{W}_2)_{12} \\ (\widehat{W}_2)_{21} & (\widehat{W}_2)_{22} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Тут

$$(\widehat{W}_2)_{11} = -\varphi_1 \Delta^{-1} \left(\int\limits_{+\infty}^{y} \psi_2^{\mathrm{T}} \varphi_2 ds \right) \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, +\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_2)_{12} = \varphi_1 \Delta^{-1} \Delta(+\infty, y-\alpha x) \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_2)_{21} = -\varphi_2 \Delta^{-1} \Delta(y+\alpha x, +\infty) \int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, +\infty)\psi_1^{\mathrm{T}} \cdot ds,$$

$$(\widehat{W}_2)_{22} = -\varphi_2\Delta^{-1}\Big(\int\limits_{+\infty}^{y} \psi_1^{\mathrm{T}}\varphi_1 ds\Big)\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds.$$

Безпосередньо з факторизації (27) знаходимо явний вигляд операторів S та S^{-1}

$$S = I + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

де

$$F_{11} = -\varphi_1\Delta^{-1}(y+\alpha x, +\infty)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^{\mathrm{T}}\varphi_2 ds\Big)\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, -\infty)\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

$$F_{12} = \varphi_1\Delta^{-1}(y+\alpha x, +\infty)\Delta(-\infty, +\infty)\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

$$F_{21} = -\varphi_2\Delta^{-1}(+\infty, y-\alpha x)\Delta(+\infty, -\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s+\alpha x, -\infty)\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds, \tag{43}$$

$$F_{22} = -\varphi_2\Delta^{-1}(+\infty, y-\alpha x)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^{\mathrm{T}}\varphi_1 ds\Big)\int\limits_{-\infty}^{y} \Delta^{-1}(-\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds.$$

$$S^{-1} = I + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Тут

$$G_{11} = \varphi_1\Delta^{-1}(y+\alpha x, -\infty)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^{\mathrm{T}}\varphi_2 ds\Big)\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(s+\alpha x, +\infty)\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

$$G_{12} = -\varphi_1\Delta^{-1}(y+\alpha x, -\infty)\Delta(+\infty, -\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(+\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds, \tag{45}$$

$$G_{21} = \varphi_2\Delta^{-1}(-\infty, y-\alpha x)\Delta(-\infty, +\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s+\alpha x, +\infty)\psi_1^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

$$G_{22} = \varphi_2\Delta^{-1}(-\infty, y-\alpha x)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^{\mathrm{T}}\varphi_1 ds\Big)\int\limits_{+\infty}^{y} \Delta^{-1}(+\infty, s-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}\cdot ds.$$

3.2. Метод оберненої задачі розсіяння. Коефіцієнти (потенціали) $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ системи Дірака (1) однозначно визначають даними розсіяння (парою операторів (F_{21}, G_{12}) або (F_{12}, G_{21})). Зокрема, у випадку вироджених ядер операторів коефіцієнти $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ можна знайти явно. Нехай ядра операторів F_{21}, G_{12} набувають вигляду

$$\begin{aligned} F_{21}(\eta-\alpha x,\xi+\alpha x) &= f_2(\eta-\alpha x)g_1^\top(\xi+\alpha x),\\ G_{12}(\eta+\alpha x,\xi-\alpha x) &= f_1(\eta+\alpha x)g_2^\top(\xi-\alpha x). \end{aligned} \tag{46}$$

Коефіцієнти u_1, u_2 визначають за допомогою рівностей

$$u_1(x,y) = -2A_{+12}(x,y,y), \quad u_2(x,y) = 2A_{-21}(x,y,y), \tag{47}$$

де функції $A_{+12}(x,y,\xi)$, $A_{-21}(x,y,\xi)$ задовольняють системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_{-11}(x,y,\xi) - \int\limits_{-\infty}^{y} A_{+12}(x,y,\eta)F_{21}(\eta-\alpha x,\xi+\alpha x)d\eta = 0, & \xi \geqslant y,\\ A_{+12}(x,y,\xi) - \int\limits_{y}^{+\infty} A_{-11}(x,y,\eta)G_{12}(\eta+\alpha x,\xi-\alpha x)d\eta = G_{12}(\eta-\alpha x,\xi+\alpha x), & \xi \leqslant y, \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} A_{+22}(x,y,\xi) - \int\limits_{y}^{+\infty} A_{-21}(x,y,\eta)G_{12}(\eta+\alpha x,\xi-\alpha x)d\eta = 0, & \xi \leqslant y,\\ A_{-21}(x,y,\xi) - \int\limits_{-\infty}^{y} A_{+22}(x,y,\eta)F_{21}(\eta-\alpha x,\xi+\alpha x)d\eta = F_{21}(y-\alpha x,\xi+\alpha x), & \xi \geqslant y. \end{cases} \tag{49}$$

Системи (48)-(49), отримані в [1], є рівняннями типу Марченка-Гельфанда-Левітана і у випадку вироджених ядер (46) розв'язуються явно. Після нескладних технічних обчислень ми отримуємо розв'язки систем (48)-(49) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_{-11}(x,y,\xi) = f_1(y+\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times\\ \times\left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right) g_1^\top(\xi+\alpha x), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} A_{+12}(x,y,\xi) = f_1(y+\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times\\ \times g_2^\top(\xi-\alpha x), \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} A_{-21}(x,y,\xi) = -f_2(y-\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times\\ \times g_1^\top(\xi+\alpha x), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} A_{+22}(x,y,\xi) = -f_2(y-\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times\\ \times\left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right) g_2^\top(\xi-\alpha x). \end{aligned} \tag{53}$$

З рівності (47) одержимо зображення для потенціалів u_1, u_2

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= -2f_1(y+\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times \\ &\quad \times g_2^\top(y-\alpha x), \\ u_2(x,y) &= -2f_2(y-\alpha x)\left[I - \left(\int\limits_{y}^{+\infty} g_1^\top f_1(\tau+\alpha x)d\tau\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{y} g_2^\top f_2(\tau-\alpha x)d\tau\right)\right]^{-1}\times \\ &\quad \times g_1^\top(y+\alpha x). \end{aligned} \tag{54}$$

3.3. Еквівалентність результатів, отриманих двома методами. Нехай у формулі (26) C_1 – довільна невироджена стала матриця розмірності $(K \times K)$.

Зробимо заміну функцій φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 на f_1, f_2, g_1, g_2 так, щоб виконувалась рівність відповідних ядер (43), (45) та (46).

$$\begin{gathered} f_2(\eta-\alpha x) = -\varphi_2(\eta-\alpha x)\Delta^{-1}(+\infty,\eta-\alpha x)\Delta(+\infty,-\infty), \\ g_1^\top(\xi+\alpha x) = \Delta^{-1}(\xi+\alpha x,-\infty)\psi_1^{\mathrm{T}}(\xi+\alpha x), \\ f_1(\eta+\alpha x) = -\varphi_1(\eta+\alpha x)\Delta^{-1}(\eta+\alpha x,-\infty)\Delta(+\infty,-\infty), \\ g_2^\top(\xi-\alpha x) = \Delta^{-1}(+\infty,\xi-\alpha x)\psi_2^{\mathrm{T}}(\xi-\alpha x). \end{gathered} \tag{55}$$

Правильним є таке твердження.

Твердження 2. *Після заміни змінних (55) потенціали u_1, u_2 (19) збігаються з відповідними потенціалами u_1, u_2 (54), отриманими на підставі рівнянь Марченка-Гельфанда-Левітана.*

Доведення. Доведення проводимо шляхом безпосереньої перевірки. □

4. Закінчення. Теорію операторів загальних бінарних перетворень W [2-4] розробляли для інтегрування нелінійних рівнянь математичної фізики, які допускають диференціальні та інтегродиференціальні зображення Лакса-Захарова-Шабата (див., наприклад, [8-10]). У цій праці, а також у [5] ми продемонстрували як оператори перетворень (і оператори розсіяння) оберненої задачі можна отримати, враховуючи теорію загальних бінарних перетворень.

Зауважимо, що точні розв'язки нелінійних рівнянь Лакса, які можна отримати за допомогою рівнянь оберненої задачі типу Марченка-Гельфанда-Левітана, можна також отримати і за допомогою загальних бінарних перетворень, позаяк відповідні оператори (32) відрізняються тільки інваріантним множником (автоперетворенням незбуреної системи).

Зазначимо також, що, зробивши в зображеннях (40)-(41) відповідну заміну змінних під знаками інтегральних операторів, неважко перейти до зображення $\widehat{W}_1$, $\widehat{W}_2$ як інтегральних вольтерівських операторів за змінною x. У цьому разі зображення розв'язку $Y\,(x,\ y)$ системи Дірака (1) у вигляді (28)-(29) будуть автоматично задовольняти асимптотичні умови (3), відповідно.

Якщо на розв'язки незбурених систем φ, ψ (6)-(7) накласти допустиму редукцію $\psi = \bar{\varphi}$, то оператор Дірака L (1) з потенціалами (19) (коли вибрати як сталу матрицю C_1 довільну ермітову ($C_1^* = C_1$)) буде косоермітовим $\big(L^* := \overline{L^\tau} = -L\big)$, $u_2\,(x,\ y) =$

$-\bar{u}_1(x,\ y)$. В цьому випадку з формул (42)-(44) неважко отримати, що оператори S і S^{-1} задовольняють умову унітарності $SS^* = I \quad \left(S^* = S^{-1}\right)$.

Зауважимо також, що при $\alpha \in \mathbb{R}$' та при $\alpha \in i\mathbb{R}$ за відповідної лінійної еволюції за змінною $t \in \mathbb{R}$ розв'язків $\varphi_1(y+\alpha x;t)$, $\psi_1(y+\alpha x;t)$, $\varphi_2(y-\alpha x;t)$, $\psi_2(y-\alpha x;t)$ потенціали (19) та (54) задовольняють різні типи нелінійних систем Деві-Стюардсона DS-1, DS-2 (див., наприклад, [3,13]).

Ми плануємо розповсюдити метод цієї статті на інші задачі розсіяння, зокрема для загальної гіперболічної системи рівнянь [6], яка тісно пов'язана з системою нелінійної взаємодії n-хвиль [12].

1. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. / *Нижник Л.П.* – К., 1973. – 182 с.
2. *Sydorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operatos and Darboux-like transformations / *Sydorenko Yu.M.* // Mat. studii. – 2003. – Vol. 19, №2. – P. 181-192.
3. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи / *Сидоренко Ю.М.* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №11. – С. 1531-1550.
4. *Sydorenko Yu.* Generalized Binary Darboux-like Theorem for Constrained Kadomtsev-Petviashvili (cKP) Flows / *Sydorenko Yu.* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – Vol. 50, Part 1. – P. 470-477.
5. *Починайко М.Д.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу / *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* // Укр. мат. журнал – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1097-1115.
6. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / *Нижник Л.П.* – К., 1991.
7. *Pochynayko M.D.* Darboux transformations and scattering operator for nonstationary system of Dirac equations / *Pochynayko M.D., Sydorenko Yu.M.* // Мат. студії. – 2006. – Т. 26, №1. – С. 86-90.
8. *Сидоренко Ю.М.* Інтегрування нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга / *Сидоренко Ю.М., Беркела Ю.Ю.* // Мат. студії. – 2002. – Т. 18, №1. – С. 57-68.
9. *Починайко М.Д.* Інтегрування деяких (2+1)-вимірних інтегровних систем методом оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу / *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* // Мат. студії. – 2003. – Т. 20, №2. – С. 119-132.
10. *Беркела Ю.* Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування / *Беркела Ю., Сидоренко Ю.* // Мат. студії. – 2005. – Т. 23, №1. – С. 31-51.
11. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса / *Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.* // Вісн. Київ. ун-ту. Серія мат. та мех. – 2009. – Вип. 22. – С. 32-35.
12. Солитоны. Под ред. *Буллафа Р., Кодри Ф.* – М., 1983.
13. *Самойленко В.Г.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона / *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №2. – С. 252-264.

A CONSTRUCTIVE METHOD OF FINDING A SCATTERING OPERATOR FOR NON-STATIONARY HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS

Yuriy SYDORENKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

A constructive method of finding operators of transformations and scattering in case of the degenerate scattering data is proposed. This method is based on binary Darboux-like transformations for non-stationary Dirac system. A connection between the results obtained in this work and the results in the inverse scattering problem obtained by L. Nizhnik is found.

Key words: binary Darboux transformations, scattering operator, system of Dirac Equations.

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Юрий СИДОРЕНКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Предложено конструктивный метод построения операторов преобразования и рассеяния в случае вырожденных данных рассеяния, который базируется на бинарных преобразованиях типа Дарбу для нестационарной системы Дирака. Установлено связь между результатами этой работы и результатами Л. Нижника по теории обратных задач рассеяния.

Ключевые слова: бинарные преобразования Дарбу, оператор рассеяния, система Дирака.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010