

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12: 517.96

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ, ТЕМПЕРАТУРА ТА НАПРУЖЕНИЙ СТАН У СКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ ЗА УМОВ ЙОГО ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ

Богдан ДРОБЕНКО<sup>1</sup>, Карен КАЗАРЯН<sup>2</sup>, Зигмунт КАСПЕРСЬКИЙ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна  
<sup>2</sup>Інститут механіки НАН Вірменії,  
просп. Маршала Баграмяна, 24-б 375019 Єреван, Вірменія  
<sup>3</sup>Політехніка Опольська,  
вул. Станіслава Миколайчука, 5 45-271 Ополь, Польща

На основі запропонованої раніше математичної моделі опису фізико-механічних процесів в електропровідних тілах за умов дії зовнішніх електромагнітних полів розглянуто задачу про визначення електромагнітних і температурних полів, а також напружено-деформованого стану у скінченному сталевому циліндрі за умов його індукційної обробки.

*Ключові слова:* зв'язані поля, індукційний нагрів, термомеханічні процеси.

Електромагнітні поля (ЕМП) широко використовують у сучасних технологіях обробки твердих тіл, зокрема, при індукційному нагріві електропровідних тіл з метою підвищення параметрів їхньої міцності та надійності. Відомі класичні методики опису термомеханічної поведінки тіл при індукційному нагріві дали змогу провести конкретні дослідження лише для тіл канонічної форми (розглянуті лише одновимірні за просторовою координатою задачі) переважно в рамках моделі пружного тіла за незалежних від температури характеристик матеріалу. Необхідність проводити розрахунки високотемпературних режимів індукційної обробки термочутливих, здатних до пластичного деформування тіл неканонічної геометричної форми привели до побудови складних математичних моделей і використання універсальних числових підходів. У переважній більшості сучасних праць у цьому напрямі дослідники фокусують свою увагу на розгляді лише електромагнітних і теплових процесів [1-3].

Питанням розробки методології і методики числового моделювання термомеханічних процесів у здатних до пластичного деформування, термочутливих тілах складної форми з різними електропровідністю й здатністю до намагнічування та поляризації за умов дії зовнішнього ЕМП з урахуванням складної історії навантаження й здатності матеріалів зміцнюватись присвячені праці [4, 5]. Мета нашої праці – чисельно

промоделювати процес індукційного нагріву скінченного сталевого циліндра на підставі запропонованої у [4, 5] методики; оцінити збіжність і достовірність отриманих числових результатів шляхом порівняння їх з відомими аналітичними, а також чисельними розв'язками, отриманими на різних скінченно-елементних поділах циліндра за різних кроків часового інтегрування рівнянь електро-магніто-термопружно-пластичності; визначити параметри дискретної моделі, які без втрати точності числових розв'язків допомагають мінімізувати об'єми обчислень, а отже, і час розрахунку.

Розглянемо процес індукційної обробки вільного від механічного навантаження циліндричного тіла  $V$  завдовжки  $2L$  з радіусом  $R$  ( $V = \{ (r, z) : r \leq R, |z| \leq L \}$ ), що перебуває в коаксіальному з ним індукторі, який моделює циліндрична поверхня з радіусом  $R_i$  завдовжки  $2L_i$  ( $r = R_i, |z| \leq L_i$ ) за заданої у ній густини струму

$$\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, J_0(1 - e^{-\xi t}) \sin 2\pi\omega t, 0), \quad r = R_i, \quad |z| \leq L_i,$$

де  $\omega$  – частота;  $J_0(1 - e^{-\xi t})$  – амплітуда (параметр  $\xi$  характеризує плавність виходу на усталений режим). У початковий момент часу ЕМП у тілі й середовищі немає та заданий розподіл  $T_0(r, z)$  температури. Тіло перебуває за умов конвективного теплообміну (з коефіцієнтом  $\beta$ ) із зовнішнім середовищем, температура якого  $T_S$ .

ЕМП у системі тіло – зовнішнє середовище та температурне й механічні поля у тілі описуємо відповідно системою рівнянь Максвелла, теплопровідності і співвідношеннями неізотермічної термопружно-пластичної течії [4]. Відповідно до запропонованої методики [4] задачу розв'язуємо у два етапи: на першому – розв'язуємо зв'язану задачу електродинаміки і теплопровідності; на другому – на підставі обчислених значень температури і пондеромоторних сил визначаємо напружений стан тіла.

Попередньо замінивши нескінченний простір скінченою областю  $\Omega$  з достатньо віддаленою від тіла і заданих струмів межею, застосуємо стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [6] до рівнянь Максвелла і теплопровідності. Задача про визначення електромагнітного та температурного полів зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь [4]

$$\mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{T}}_h(t) + \mathbf{L}_0 \mathbf{T}_h(t) = \mathbf{f}_T, \quad \mathbf{T}_h(0) = \mathbf{T}_h^0, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{E}}_h(t) + \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_h(t) + \mathbf{M}_0 \mathbf{E}_h(t) = \mathbf{f}_E, \quad \mathbf{E}_h(0) = \mathbf{E}_h^0(0) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

стосовно невідомих значень вектора напруженості  $\mathbf{E}_h$  електричного поля і температури  $\mathbf{T}_h$  у вузлах скінченно-елементного поділу тіла. Матрично-

векторні характеристики задачі (1) – (2) обчислені шляхом підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [4].

Методика числового розв'язування такої задачі з застосуванням різних кроків інтегрування рівнянь (1) та (2) за часом описана у праці [5].

Застосування методу скінченних елементів до задачі другого етапу (визначення напруженого стану тіла на підставі рівнянь термопружно-пластичності) приводить до системи нелінійних алгебричних рівнянь [4], яку розв'язуємо за допомогою методу змінних параметрів пружності (метод Ньютона-Рафсона) [7].

У [8] розглянуто задачу про індукційний нагрів довгого циліндра за припущення, що його пружно-пластичне деформування добре описує умова течіння Треска – Сен-Венана, а матеріал (сталь X18H9T) є ідеально пружно-пластичним, нестисливим.

Розглянемо цю саму задачу для скінченного циліндра ( $R = 0,01$  м;  $L = 0,04$  м). Кількісні дослідження проведемо за таких значень параметрів:  $R_i = 0,0105$  м;  $L_i = 0,042$  м;  $J_0 = 10^6 = 60$  кА/м<sup>2</sup>;  $\omega = 8 = 30$  кГц;  $T_0 = T_S = 20^\circ\text{C}$ ;  $\beta = 13$  (10<sup>4</sup>) Вт/(м<sup>2</sup>К);  $\xi = 10^{-5}$ .

Обчислення виконаємо з використанням різних часових кроків і поділів області  $\Omega$  на скінченні елементи. Зокрема, розглянемо поділи області тіла  $V$  на 3x12, 5x20, 10x40, 20x80 елементів. Розміри елементів у середовищі в напрямі від тіла зростають (див. рис. 1). Кроки чисельного інтегрування рівнянь за часом будемо вибирати з множини  $\{T_\omega / 16; T_\omega / 32; T_\omega / 64 \dots\}$ , де  $T_\omega = 2\pi\omega^{-1}$ . Щоб дослідити вплив заміни нескінченного простору на скінченну область  $\Omega$ , розв'яжемо розглядувану задачу для різних областей  $\Omega$  (які задаватимемо парою параметрів  $\{R_0, L_0\}$ , див. рис. 1). Отримувані розв'язки будемо порівнювати між собою та з аналітичним розв'язком задачі [8]. На границі  $S'$  області  $\Omega$ , якою наблизимо нескінченний простір, будемо вимагати зникання поля ( $E_\varphi = 0$ ).

Аналіз одержаних результатів показав, що вже при п'яти ізопараметричних скінченних елементах [7] по товщині циліндра (рис. 1, б) за кроку дискретизації за часом  $\Delta t_E = T_\omega / 16$  отримуємо достатньо точні розв'язки. Ізолінії напруженості електричного поля у системі циліндр-середовище в момент часу  $t = 7,109$  с (момент вимкнення індуктора в [8]) за цих параметрів дискретної моделі задачі зображені на рис. 2 ( $R_0 = 0,05$  м;  $L_0 = 0,1$  м).

При заміні нескінченного простору на скінчену область  $\Omega$  з параметрами  $R_0 \geq 0,05$  м та  $L_0 \geq 0,1$  м у циліндрі отримуємо практично ідентичні розв'язки. У перерізі  $z = 0$  вони збігаються (в межах 1%) з аналітичним розв'язком одновимірної задачі [8]. З подальшим зменшенням  $R_0 < 0,05$  м і  $L_0 < 0,1$  м числові розв'язки у циліндрі починають відрізнятися. На рис. 3 показано розподіл напруженості електричного поля в перерізі  $z = 0$  областей  $\Omega$ , які задавали такими парами параметрів  $\{R_0, L_0\}$ :  $\{0,1$  м;  $0,15$  м} (крива 1);  $\{0,05$  м;  $0,1$  м} (2);  $\{0,025$  м;  $0,08$  м} (3).

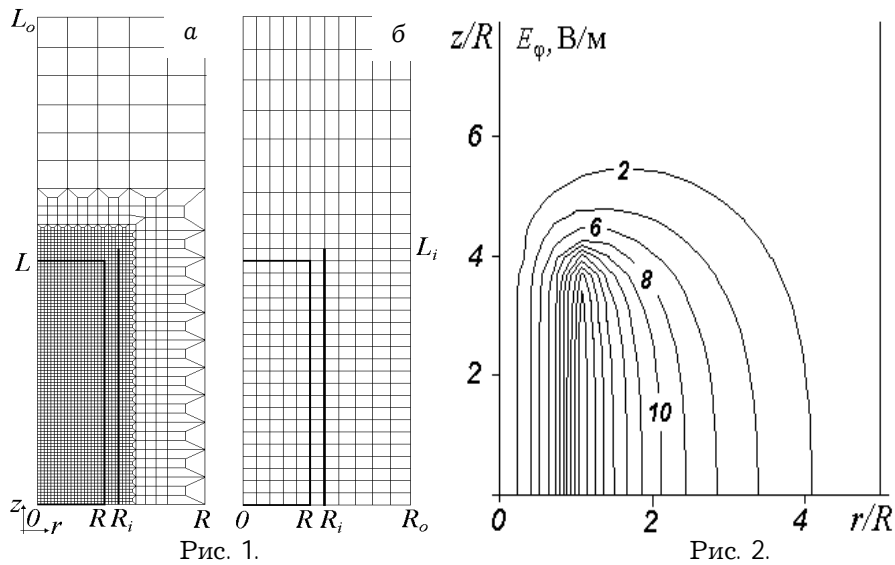


Рис. 1.

Рис. 2.

Якщо вибрати довжину індуктора приблизно на 5% більшою за довжину циліндра, то отримаємо достатньо рівномірний розподіл температури по всій його довжині. Вплив країв на розподіл температурного поля в циліндрі за цієї умови буде мінімальним. На рис. 4 зображено розподіли температури на поверхні циліндричного тіла (уздовж його твірної) у момент часу  $t = 7,109$  с залежно від довжин індуктора  $L_i$ : 0,04м (крива 1); 0,04125м (2); 0,0418м (3); 0,0425м (4); 0,045м (5) та 0,05м (6).

На рис. 5 показано відповідно ізолінії амплітуд коливань складових  $E_\varphi$ ,  $H_z$ ,  $H_r$  напруженостей електричного й магнітного полів, розподілу температури  $T$  і еквівалентних напружень  $\bar{\sigma}$  у циліндрі у момент часу  $t = 7,109$  с. Як бачимо, зона крайового ефекту у випадку електромагнітного поля і температури доволі незначна і охоплює область порядку половини радіусу циліндра. Для напружень вона дещо більша ( $\approx 1,5R$ ). У центральній частині циліндра розподіли усіх параметрів практично незалежні від координати  $z$  і добре узгоджуються з відповідними розв'язками [8] (різниця не перевищує 1%).

З погляду часових затрат не раціонально з тим самим часовим кроком продовжити обчислення електромагнітного, температурного та механічного полів; крок інтегрування рівняння теплопровідності й пружно-пластичності за часом можна брати набагато більшими [5]. У цьому разі джерелами в правій частині рівняння теплопровідності й об'ємними силами у рівняннях рівноваги приймаємо усереднені за період  $T_\omega$  коливання електромагнітної хвилі тепловиділення і пондеромоторні сили (якщо кроки числового інтегрування рівнянь електродинаміки  $(\Delta t_E)$ , теплопровідності  $(\Delta t_T)$  і

пружно-пластичності ( $\Delta t_M$ ) за часом рівні, джерелами і об'ємними силами є миттєві значення тепловиділень і пондеромоторних сил).

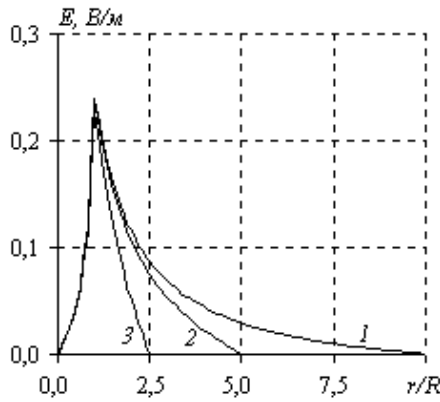


Рис. 3.

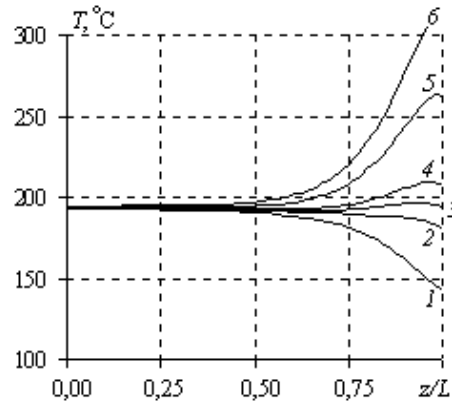


Рис. 4.

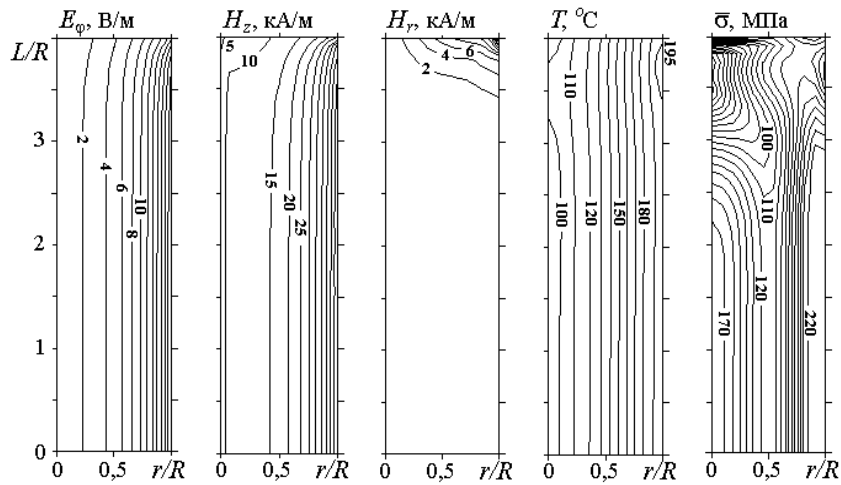


Рис. 5.

На рис. 6 кривими 1-4 показано розподіли температури вздовж радіуса в перерізі  $z = 0$  циліндра в момент часу  $t = 7$  с, отримані відповідно при розрахунках з кроками  $\Delta t_T = 0,209 \cdot 10^{-6}$  с ( $T_w / 16$ ); 1 с ( $\approx 10^5 T_w$ ); 3,5 с ( $\approx 10^6 T_w$ ); 7 с (криві 1-2 практично накладаються одна на одну). На рис. 7 зображено розподіли осьових  $\sigma_{zz}$  і кільцевих  $\sigma_{\varphi\varphi}$  напружень у довгому циліндрі ( $t = 7,109$  с), отримані в замкненому вигляді в [8]. На цьому самому рисунку з метою порівняння зірочками нанесені розв'язки у перерізі  $z = 0$  скінченного циліндра при його поділі  $5 \times 20$  елементів (див. рис. 1, б) і кроці інтегрування рівнянь термопружно-пластичності  $\Delta t_M = 7,109$  с. Бачимо,

що розрахунки температурного поля і напруженого стану для цієї задачі можна вести з кроками  $\Delta t_T \approx 10^7 \Delta t_E$ ,  $\Delta t_M = 2\Delta t_T$  без практичної втрати точності, що дає змогу одержати розв'язки просторово двовимірних задач за реальні (досить короткі) часові проміжки. Зокрема, розв'язування такої двовимірної за просторовими змінними нестационарної задачі за оптимально скінченно-елементного поділу і кроці  $\Delta t_T = 1$  с займає 4 с часу процесора ATHLON-2000. Час розв'язування цієї задачі з кроком  $\Delta t_T = T_w / 16$  становить величину приблизно у сім порядків більшу.

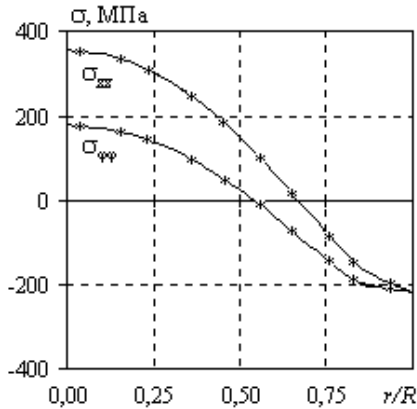


Рис. 6.

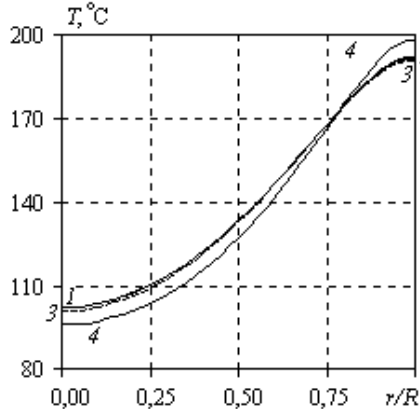


Рис. 7.

Отож, враховуючи інваріантність методу скінченних елементів щодо геометрії області, граничних умов і характеристик матеріалу та покрокове проходження історії зміни електромагніто-термомеханічного стану тіла в часі, запропонована у [4, 5] методика моделювання процесів індукційного нагріву електропровідних тіл допомагає розраховувати електромагнітні, температурні і механічні поля у просторово двовимірних тілах за досить короткі проміжки часу з урахуванням реальних властивостей матеріалів. Цю методику можна використати для побудови оптимальних режимів індукційного нагріву виробів з електропровідних матеріалів, приймаючи за критерій оптимальності максимальне відхилення напружень чи температурних розподілів у тілі від заданих (бажаних) і проводячи керування за рахунок вибору величини струму, його частоти, геометричних параметрів індукторів, їхньої відстані від термооброблюваного тіла тощо.

1. Dolezel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axisymmetric bodies // Journal of Materials Processing Technology. 2005. Vol. 161/ № 2. P. 269–275.
2. Kawaguchi H., Enokizono M., Todaka T. Thermal and magnetic field analysis of induction heating problems // Journal of Materials Processing Technology. – 2005. – Vol. 161, № 2. – P. 193–198.

3. Nemkov V., Goldstein R. Computer simulation for fundamental study and practical solutions to induction heating problems // COMPEL: Intern. J. Computations and Math. in Electrical and Electronic Eng. 2003. Vol. 22, № 1. – P. 181–191.
4. *Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладної математики та інформатики. 2004. № 8. С. 97–111.
5. *Гачкевич О., Дробенко Б., Касперський З.* Про один підхід до чисельного моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки. 2005. – Вип. 1. – С. 62–65.
6. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. London: Butterworth Heinemann, 2000.
8. *Бурак Я.И., Галапац Б.П., Колодий Б.И.* Упругопластическое равновесие бесконечного цилиндра при индукционном нагреве // Прикладная механика. 1968. – Т. 4, №1. – С. 167–178.

ELECTROMAGNETIC FIELD, TEMPERATURE  
AND STRESS STATE IN FINITE CYLINDER  
SUBJECTED TO INDUCTION HEATING

Bogdan Drobenko<sup>1</sup>, Karen Kazaryan<sup>2</sup>, Zigmund Kasperskiy<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine

<sup>2</sup>Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,  
Marshal Bagramyan Str., 24-b 375019 Yerevan, Armenia

<sup>3</sup>Technical University of Opole,  
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5 45-271 Opole, Poland

The problem of determination of electromagnetic and temperature fields and strength-stress state of finite steel cylinder subjected to induction heating is considered on the basis of proposed earlier mathematical model of thermo-mechanical processes in electrically conductive solids subjected to external electromagnetic fields.

Key words: coupled fields, induction heating, thermomechanical processes.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2007  
Прийнята до друку 19.11.2008