ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 38–65 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 38–65*

УДК 517.956

ГЛОБАЛЬНА ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Володимир КИРИЛИЧ [1], **Андрій ФІЛІМОНОВ** [2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

[2] *Московський державний університет шляхів сполучення, вул. Образцова, 15 127994 Москва, Росія*

Методами характеристик і стисних відображень визначено глобальну класичну розв'язність узагальненої задачі Валле-Пуссена з невідомими внутрішніми межами для виродженої квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Ключові слова: гіперболічні системи, метод характеристик, стисні відображення, задача Валле-Пуссена.

Доведено існування та єдиність класичного розв'язку на всій додатній часовій осі задачі Валле-Пуссена за просторовою змінною з вільними внутрішніми межами для виродженої сингулярної квазілінійної одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Огляд літератури щодо задачі Валле-Пуссена наведено в [1]. Узагальнені задачі Валле-Пуссена (внутрішні лінії задання додаткових умов є невідомими) виникають у багатьох прикладних процесах [2-4]. Коректність глобального узагальненого та класичного розв'язків невиродженої квазілінійної гіперболічної задачі з фіксованими межами досліджували в [5-7].

Локальна та глобальна розв'язність гіперболічних задач з невідомими межами (гіперболічні задачі Стефана) наведена в [8, 9].

1. **Формулювання задачі та основні припущення**.

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) \,|\, 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T_0\}$, де $l > 0$, $T_0 > 0$ - деякі константи. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v),\ i = 1,\ldots,m, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v),\ j = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

$$\dot{s}_j = r_j(t,s(t),u(s_j(t),t),v(s_j(t),t)),\ j = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

де $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$, $s = (s_1,\ldots,s_n)$.

Задамо початкові та крайові умови

$$u(x,0) = \alpha(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$s_j(0) = c_j,\ j = 1,\ldots,n,\ 0 \le c_j \le l, \tag{5}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t,u(0,t)),\ i \in I_+^0 = \{i \mid sgn(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{6}$$

$$u_i(l,t) = \gamma_i^l(t,u(l,t)),\ i \in I_-^l = \{i \mid sgn(\lambda_i(l,0,0,0)) = -1\}. \tag{7}$$

Додаткові умови на невідомих лініях мають вигляд

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t),\ j = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

де функції $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, γ_i^0 $(i \in I_+^0)$, γ_i^l $(i \in I_-^l)$ і константи c_j $(j = 1,\ldots,n)$ є заданими. Позначивши $w = (u,v)$, розглянемо такі множини:

$$D(T_0,P_0) = \Pi(T_0) \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^1(T_0,P_0) = [0,T_0] \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^2(T_0,P_0) = [0,T_0] \times [0,l]^n \times \{w \mid w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

де $P_0 > 0$ - деяка стала, $[0,l]^n \in \mathbb{R}^n$.

Припускаємо, що виконуються такі умови.

A1. В області $D^1(T_0,P_0)$ для $i = 1,\ldots,m$

$$sgn(\lambda_i(0,t,u,v)) = const,\quad sgn(\lambda_i(l,t,u,v)) = const. \tag{9}$$

A2. Функції $\lambda_i(x,t,w), f_i(x,t,w)$ для $i = 1,\ldots,m$, $q_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ визначені в області $D(T_0,P_0)$, а функції $r_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ визначені в області $D^2(T_0,P_0)$. Всі ці функції обмежені за модулем деякими константами Λ, F, Q, R, відповідно. Крім того, функції $q_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ неперервні за t.

A3. Існують невід'ємні, підсумовані на $[0,T_0]$ (і $[0,l]$ відповідно) функції $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $F_1(t), F_2(t), R_1(t), R_2(t), (Q_2(x)$, причому $Q_2(x)$, крім того, підсумована в квадраті) такі, що майже для всіх $t \in [0,T_0]$ $(x \in [0,l])$ при

$$(x_1,t,w_1) \in D(T_0,P_0),\ (x_2,t,w_2) \in D(T_0,P_0),\ (x^1,t,w_1) \in D^2(T_0,P_0),$$

$(x^2,t,w_2) \in D^2(T_0,P_0)$ (і при $(x,t,w_1) \in D(T_0,P_0)$, $(x,t,w_2) \in D(T_0,P_0)$ відповідно) для $i = 1,\ldots,m$ та $j = 1,\ldots,n$ виконуються нерівності

$$
\begin{gathered}
|\lambda_i(x_1,t,w_1)-\lambda_i(x_2,t,w_2)|\le\Lambda_1(t)\,|x_1-x_2|+\Lambda_2(t)\,|w_1-w_2|,\\
|f_i(x_1,t,w_1)-f_i(x_2,t,w_2)|\le F_1(t)\,|x_1-x_2|+F_2(t)\,|w_1-w_2|,\\
|r_j(x^1,t,w_1)-r_j(x^2,t,w_2)|\le R_1(t)\,|x^1-x^2|+R_2(t)\,|w_1-w_2|,\\
|q_j(x,t,w_1)-q_j(x,t,w_2)|\le Q_2(x)\,|w_1-w_2|.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

A4. Функції $\lambda_i(x,t,w)$, $f_i(x,t,w)$, $r_j(x,t,w)$, $q_j(x,t,w)$ вимірні в області $D(T_0,P_0)$ для всіх $i=1,\mathrm{K},m$ та $j=1,\mathrm{K},n$ відповідно.

A5. Виконуються умови узгодження нульового порядку

$$
\begin{aligned}
\gamma_i^0(0,\alpha(0)) &= \alpha_i(0),\ i\in I_+^0,\\
\gamma_i^l(0,\alpha(l)) &= \alpha_i(l),\ i\in I_-^l.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A6. Функції $(x,t,u,v)\to q_j(x,t,u,v),\ j=1,\mathrm{K},n$ не залежать від тих v_k, для яких $c_k\ne c_j$.

A7. Функції $r_j(t,0,u,v)\ge 0$, якщо $c_j=0$, і нехай $r_j(t,l,u,v)\le 0$ при $c_j=l$.

A8. Нехай існує невід'ємна підсумована на $[0,l]$ функція $\tau\to M(\tau)$ така, що

$$|q_j(x,t,w)|\le M(x)\,|v|,\ j=1,\mathrm{K},n.$$

Крім того, припускаємо, що квадрат $M(\tau)$ також є підсумованою функцією.

A9. Функції $x\to\alpha_i(x),\ i=1,\mathrm{K},m,$ ліпшицеві з константою A_1 та обмежені за модулем зверху константою A.

A10. Функції $(t,u)\to\gamma_i^0(t,u)\ (i\in I_+^0)$, $(t,u)\to\gamma_i^l(t,u)\ (i\in I_-^l)$, $t\to\beta_j(t)$ локально ліпшицеві за t,u з константами Γ_1,Γ_2 і B_1 відповідно.

A11. Нехай $\gamma_i^0(t,u),\ i\in I_+^0,$ не залежить від тих u_k, для яких $k\in I_+^0$, а $\gamma_i^l(t,u),\ i\in I_-^l,$ не залежить від тих u_k, для яких $k\in I_-^l$. Нехай $T\in(0,T_0]$.

Введемо позначення

$$\delta=\min_j\min\{c_j,\ l-c_j\ |\ c_j\ne 0, c_j\ne l\}.$$

Якщо $c_j\ne 0$ і $c_j\ne l$, то для таких j приймемо

$$
\begin{aligned}
D_j^0 &= \{(x,t)\in\Pi(T)\ |\ 0\le x\le c_j-RT; 0\le t\le T\},\\
D_j^l &= \{(x,t)\in\Pi(T)\ |\ c_j+RT\le x\le l; 0\le t\le T\},
\end{aligned}
$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^l) = \{(x,t) \in \Pi(T) \mid c_j - RT \le x \le c_j + RT; 0 \le t \le T\}.$$

Якщо ж $c_j = 0$, то приймемо

$$D_j^0 = \varnothing,$$
$$D_j^l = \{(x,t) \in \Pi(T) \mid c_j + RT \le x \le l; 0 \le t \le T\},$$
$$D_j^c = \Pi(T) \setminus D_j^l.$$

Аналогічні міркування, коли $c_j = l$. Позначимо

$$\|v\| = \max_j \max\{\max_{D_j^0}(|v_j(x,t)| exp(-H(c_j - RT - x))), \max_{D_j^c} |v_j(x,t)|,$$
$$\max_{D_j^l}(|v_j(x,t)| exp(-H(x - c_j - RT)))\},$$
$$\|u\| = \max_{\Pi(T)} |u|, \|w\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}, \|s\| = \max_{[0,T]} |s|,$$

де константа $H > 0$ буде вибрана пізніше.

Розглянемо простір $\mathbb{E}$ неперервних функцій $w : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$, причому функції $(x,t) \to u(x,t)$ будемо вважати ліпшицевими за x,t, а функції $(x,t) \to v(x,t)$ - ліпшицевими за x. Нехай $\mathbb{E}_0(T)$ - куля $\|w\| \le P_0$ в цьому просторі.

Через $\mathbb{E}_1(T,L)$ позначимо множину функцій $(u,v) \in \mathbb{E}_0(T)$ таких, що константи Ліпшиця для функції $(x,t) \to u(x,t)$ (за x,t) і для функції $(x,t) \to v(x,t)$ (за x) обмежені зверху величиною $L > 0$.

Розв'язок задачі

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t,w(x,t)), \; i = 1,\ldots,m, \\ x(\breve{t}) = \breve{x}, w \in \mathbb{E}_0(T) \end{gathered} \tag{12}$$

будемо називати характеристикою i-ї сім'ї, що відповідає функції w, і позначати через $\varphi_i(t;\breve{x},\breve{t},w)$, а розв'язок задачі

$$\begin{gathered} \frac{ds_j}{dt} = r_j(t,s(t),w(s_j(t),t)), \; j = 1,\ldots,n, \\ s_j(0) = c_j, w \in \mathbb{E}_0(T) \end{gathered} \tag{13}$$

будемо позначати через $s_j(t;w)$ і називати j-ю внутрішньою границею.

На підставі умов A2- A4 та за умови, що $w \in \mathbb{E}_0(T)$, функції λ_i, r_j задовольняють умови Каратеодорі, тому узагальнені (абсолютно неперервні) розв'язки задач (12), (13) існують, єдині та можуть бути продовжені до границі прямокутника $\Pi(T)$.

Через $\chi_i(\breve{x},\breve{t},w)$ позначимо найменше значення аргументу t, для якого визначений розв'язок $\varphi_i(t;\breve{x},\breve{t},w)$.

Для $i = 1,\ldots,m$ введемо множини:

$$\Pi_i^{\alpha}(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x,t,w) = 0\},$$

$$\Pi_i^{0}(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w);x,t,w) = 0\},$$

$$\Pi_i^{l}(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) \mid \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w);x,t,w) = l\},$$

а для $i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$ позначимо

$$\mathsf{R}_i[w](x,t) = \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0;x,t,w)), & i = \overline{1,m}, \quad (x,t) \in \Pi_i^{\alpha}(w), \\ \gamma_i^0(\chi_i(x,t,w),u(0,\chi_i(x,t,w))), & i \in I_+^0, \quad (x,t) \in \Pi_i^0(w), \\ \gamma_i^l(\chi_i(x,t,w),u(l,\chi_i(x,t,w))), & i \in I_-^l, \quad (x,t) \in \Pi_i^l(w); \end{cases} \tag{14}$$

$$\mathsf{I}_i[w](x,t) = \int_{\chi_i(x,t,w)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))d\tau, \tag{15}$$

$$\mathsf{A}_i[w](x,t) = \mathsf{R}_i[w](x,t) + \mathsf{I}_i[w](x,t),\ i = 1,\ldots,m, \tag{16}$$

$$\mathsf{B}_j[w](x,t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t;w)}^{x} q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi,\ j = 1,\ldots,n. \tag{17}$$

Означення. Нехай неперервна функція $w = (u,v) : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$ задовольняє систему

$$\begin{cases} u_i(x,t) = \mathsf{A}_i[w](x,t), & i = 1,\ldots,m, \\ v_j(x,t) = \mathsf{B}_j[w](x,t), & j = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{18}$$

причому u - ліпшицева за x,t, а v - ліпшицева за x.

Тоді w будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)-(8).

Інтегруванням вздовж характеристик легко показати, що класичний (гладкий) розв'язок задачі (1)-(8) є одночасно її узагальненим неперервним розв'язком.

Нехай $\mathsf{S} = (\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{A}_m,\mathsf{B}_1,\ldots,\mathsf{B}_n)$.

Припускаємо, що виконуються також такі умови.

A12. Існують такі константи $\varepsilon_0 \in (0, \mathbf{l})$ і $\Lambda_0 > 0$, що всі значення $\lambda_i(x,t,w)(i \in I_+^0)$ при $0 \le x \le \varepsilon_0$ і $-\lambda_i(x,t,w)(i \in I_-^1)$ при $\mathbf{l} - \varepsilon_0 \le x \le \mathbf{l}$ не менші величини Λ_0 при $(t,w) \in D^1(T_0, P_0)$.

Надалі через M_h $(h = 1, \mathrm{K})$ позначатимемо константи, які не зростають при зростанні L. Зауважимо таке: оскільки ми завжди вибиратимемо величину $T > 0$ достатньо малою, то інтеграли вигляду $\int_0^T LF_2(\tau)d\tau$ можна вважати обмеженими. Тому у вирази для констант M_h можуть входити і ці інтеграли.

Позначимо через $\tilde{\mathrm{IE}}(T)$ підпростір простору $\mathrm{IE}(T)$, утворений функціями $w(x,t) = \{u(x,t), v(x,t)\}$, які неспадні за аргументом x.

Припускаємо тепер, що всі функції λ_i, f_i, q_j, r_j визначені в $D(T_0,\infty) = \Pi(T_0) \times \mathrm{IR}^{m+n}$ і для кожного $P_0 > 0$ виконуються умови **A**1-**A**12, а також умови.

B1. Функції $\lambda_i(x,t,u,v)(i = 1, \mathrm{K}, m)$ неспадні за x,u,v для кожного фіксованого t.

B2. Функції $\gamma_i^0(i \in I_+^0), \gamma_i^1(i \in I_-^1)$ не залежать від u, тому можна вважати, що константа $\Gamma_2 = 0$.

B3. Функції $\alpha_i(x)(i = 1, \mathrm{K}, m)$ неспадні.

B4. Функції $\gamma_i^0(t)(i \in I_+^0)$ – незростаючі, а функції $\gamma_i^1(t)(i \in I_-^1)$ – неспадні функції за t.

B5. Функції $f_i(x,t,u,v)(i = 1, \mathrm{K}, m)$ неспадні за x,u,v при фіксованому t, причому

$$f_i(x,t,u,v) \ge 0, i \in I_+^0, (x,t,u,v) \in D(T_0,\infty),$$
$$f_i(x,t,u,v) \le 0, i \in I_-^1, (x,t,u,v) \in D(T_0,\infty);$$

якщо ж $i \notin I_+^0 \cup I_-^1$, то обмеження на знак $f_i(x,t,u,v)$ немає.

B6. Функції $q_j(x,t,u,v) \ge 0 (j = 1, \mathrm{K}, n)$ при $(x,t,u,v) \in D(T_0,\infty)$.

B7. Існує невід'ємна неперервна на $\max\{[0,T_0],[0,\mathbf{l}]\}$ функція $\tilde{M}(t)$ така, що в області $D(T_0,\infty)$ виконуються нерівності:

$$| f_i(x,t,u,v) | \le \tilde{M}(t) | w |, | r_j(s,t,w) | \le \tilde{M}(t) | s |, i = 1, \mathrm{K}, m; j = 1, \mathrm{K}, n.$$

Крім того, нехай функція $M(\tau)$ з умови **A**8 неперервна.

B8. Припускаємо, що функції $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $Q_2(x)$ обмежені зверху відповідно константами Λ_1, Λ_2, F_1, F_2, R_1, R_2, Q_2.

B9. Нехай для функцій $r_j, j = 1,\mathbf{K},n$, функція $\tilde{M}(t)$ задовольняє рівність $\tilde{M}(t) = pt$, де величина $p > 0$ буде зазначена пізніше.

При виконанні умови **B**9 отримаємо

$$\max_j |s_j(t;w) - c_j| \le \mathbf{l}\int_0^t p\tau d\tau e^{\int_0^t p\tau d\tau} = \mathbf{l}\frac{pt^2}{2}e^{\frac{pt^2}{2}} \le \mathbf{l}\frac{pT_0^2}{2}e^{\frac{pT_0^2}{2}}. \tag{19}$$

Позначимо $h(p) = \mathbf{l}\frac{pT_0^2}{2}e^{\frac{pT_0^2}{2}}$. Тоді для довільного $\delta > 0$ існує таке достатньо мале $p > 0$, що $h(p) < \delta$.

Вважатимемо тепер, що додатково виконуються ще такі умови.

A13. Функції $\lambda_i(x,t,w), f_i(x,t,w), \alpha_i(x)$, $i = 1,\mathbf{K},m$, $\gamma_i^0(t,u)$ $(i \in I_+^0)$, $\gamma_i^1(t,u)$ $(i \in I_-^l)$, $q_j(x,t,w), r_j(x,t,w), \beta_j(t)$ $(j = 1,\mathbf{K},n)$ неперервно диференційовні в тих областях, де вони були визначені, і, крім того, λ_i та f_i задовольняють умову Ліпшиця за t з деякими константами Λ_3, F_3 відповідно, а q_j задовольняє умову Ліпшиця за t з константою Q_3 і за x з константою Q_1, а також $Q_2\mathbf{l} < 1$. Нехай, нарешті, функції $f_i(x,t,w)$, $\lambda_i(x,t,w)(i = 1,\mathbf{K},m)$, $r_j(x,t,w)(j = 1,\mathbf{K},n)$ задовольняють таку саму умову, що і функції $q_j(x,t,w)(j = 1,\mathbf{K},n)$ у припущенні A6, і, крім того, функції $q_j(x,t,w)(j = 1,\mathbf{K},n)$ не залежать від тих u_k, для яких $c_k \ne c_j$.

A14. Частинні похідні $(f_i)'_x, (f_i)'_t, (f_i)'_{v_j}, (f_i)'_{u_i}$ $(i = 1,\mathbf{K},m; j = 1,\mathbf{K},n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathrm{IE}_0(T)$ за змінними x,t,w відповідно з константами F_1^1, F_3^1, F_2^1, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою F^1.

Позначимо: $\breve{F}_1 = \max\{F_1, F_2, F_3, F_1^1, F_2^1, F_3^1\}$, $\breve{F} = \max\{F, F^1\}$.

A15. Частинні похідні $(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_t, (\lambda_i)'_{v_j}, (\lambda_i)'_{u_i}$ $(i = 1,\mathbf{K},m; j = 1,\mathbf{K},n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathrm{IE}_0(T)$ за змінними x,t,w відповідно з константами $\Lambda_1^1, \Lambda_3^1, \Lambda_2^1$, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Λ^1.

Позначимо: $\breve{\Lambda}_1 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1^1, \Lambda_2^1, \Lambda_3^1\}$, $\breve{\Lambda} = \max\{\Lambda, \Lambda^1\}$.

A16. Частинні похідні $(q_j)'_x, (q_j)'_t, (q_j)'_{v_i}, (q_j)'_{u_i}$ $(i = 1,\mathbf{K},m; j = 1,\mathbf{K},n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathrm{IE}_0(T)$ за змінними t,w

відповідно з константами Q_1^1, Q_2^1, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Q^1.

Позначимо: $\breve{Q}_1 = \max\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_1^1, Q_2^1\}$, $\breve{Q} = \max\{Q, Q^1\}$.

A17. Похідні $\alpha_i'(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ є ліпшицевими з константою A_1^1 при $0 \le x \le \mathbf{l}$.

Позначимо: $A^1 = \max\limits_{[0,\mathbf{l}]} |\alpha'(x)|$, $\breve{A}_1 = \max\{A_1, A_1^1\}$; $\breve{A} = \max\{A, A^1\}$.

A18. Похідні $\beta_j'(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ є ліпшицевими з константою B_1^1 при $0 \le t \le T$.

Позначимо: $B^1 = \max\limits_{[0,T]} |\beta'(x)|$, $\breve{B}_1 = \max\{B_1, B_1^1\}$; $\breve{B} = \max\{B, B^1\}$.

A19. Частинні похідні $(\gamma_i^0)_t'$, $(\gamma_i^0)_{u_j}'$ $(i \in I_+^0, j \notin I_+^0)$, $(\gamma_i^{\mathbf{l}})_t'$, $(\gamma_i^{\mathbf{l}})_{u_j}'$ $(i \in I_-^{\mathbf{l}}, j \notin I_-^{\mathbf{l}})$ задовольняють умову Ліпшиця в області $[0,T] \cup \mathbb{E}_0(T)$ за аргументами t і u відповідно з константами Γ_1^1 та Γ_2^1.

Позначимо: $\breve{\Gamma} = \max\limits_{[0,T] \cup \mathbb{E}_0(T)} \{|(\gamma_i^0)_t'|, |(\gamma_i^0)_{u_j}'|, |(\gamma_i^{\mathbf{l}})_t'|, |(\gamma_i^{\mathbf{l}})_{u_j}'|\}$, $\breve{R}_1 = \max\{R_1, R_2\}$.

A20. Виконуються умови узгодження першого порядку

$$
\begin{gathered}
(\gamma_i^0)_t'(0, \alpha(0)) + \sum_{j \notin I_+^0} (\gamma_i^0)_{u_j}'(0, \alpha(0)) \times \\
\times [f_j(0, 0, \alpha(0), v(0,0)) - \lambda_j(0, 0, \alpha(0), v(0,0))\alpha_j'(0)] = \\
= f_i(0, 0, \alpha(0), v(0,0)) - \lambda_i(0, 0, \alpha(0), v(0,0))\alpha_i'(0), \quad i \in I_+^0;
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
(\gamma_i^{\mathbf{l}})_t'(0, \alpha(\mathbf{l})) + \sum_{j \notin I_-^{\mathbf{l}}} (\gamma_i^{\mathbf{l}})_{u_j}'(0, \alpha(\mathbf{l})) \times \\
\times [f_j(\mathbf{l}, 0, \alpha(\mathbf{l}), v(\mathbf{l},0)) - \lambda_j(\mathbf{l}, 0, \alpha(\mathbf{l}), v(\mathbf{l},0))\alpha_j'(\mathbf{l})] = \\
= f_i(\mathbf{l}, 0, \alpha(\mathbf{l}), v(\mathbf{l},0)) - \lambda_i(\mathbf{l}, 0, \alpha(\mathbf{l}), v(\mathbf{l},0))\alpha_i'(\mathbf{l}), \quad i \in I_-^{\mathbf{l}}.
\end{gathered} \tag{21}
$$

A21. Нехай існує невід'ємна неперервна функція $\tau \to M^1(\tau)$ така, що

$$
\begin{gathered}
|(q_j)_t'(x,t,w)| \le M^1(x)\,|v|\; j = 1, \ldots, n; \\
|(q_j)_{u_i}'(x,t,w)| \le M^1(x)\,|v|\; j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, m.
\end{gathered}
$$

Розглянемо простір $\breve{\mathbb{E}}_0(T)$ вектор-функцій $\breve{w} = (u, u^1, v, v^{(2)}) : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{2m+2n}$, де $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $u^1 = (u_1^1, \ldots, u_m^1)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $v^{(2)} = (v_1^{(2)}, \ldots, v_n^{(2)})$, причому кожна компонента вектор-функцій u, u^1 та v

є ліпшицевою за двома змінними, а кожна компонента вектор-функції $\boldsymbol{v}^{(2)}$ є ліпшицевою за $\boldsymbol{x}$, причому $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbb{E}_0(\boldsymbol{T})$ і, крім того, $\boldsymbol{v}$ ліпшицева за $\boldsymbol{t}$. Нехай виконуються умови

$$\| \boldsymbol{w}^1 \| = \max\{\| \boldsymbol{u}^1 \|, \| \boldsymbol{v}^{(2)} \|\} \le \boldsymbol{P}_0^1, \quad \boldsymbol{v}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{t}}, \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial \boldsymbol{x}} \right\| \le \boldsymbol{Q},$$

де $\boldsymbol{P}_0^1$ - деяка стала, причому будемо вважати, що $\boldsymbol{Q} \le \boldsymbol{P}_0^1$, $\| \boldsymbol{u}^1 \| = \max | \boldsymbol{u}_i^1 |$,

$$\| \boldsymbol{v}^{(2)} \| = \max_{\boldsymbol{j}} \max\{\max_{\boldsymbol{D}_j^0} | \boldsymbol{v}_j^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) | \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{RT} - \boldsymbol{x})}, \max_{\boldsymbol{D}_j^c} | \boldsymbol{v}_j^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) |,$$
$$\max_{\boldsymbol{D}_j^1} | \boldsymbol{v}_j^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) | \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{RT})}\}.$$

Позначимо $\tilde{\boldsymbol{P}}_0 = \max\{\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_0^1\}$, $\| \tilde{\boldsymbol{w}} \| = \max\{\| \boldsymbol{w} \|, \| \boldsymbol{w}^1 \|\}$.

У просторі $\tilde{\mathbb{E}}_0(\boldsymbol{T})$ введемо метрику $\tilde{\rho}$ за формулою

$$\tilde{\rho}(\tilde{\boldsymbol{w}}_1, \tilde{\boldsymbol{w}}_2) = \max\{\rho(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2), \rho^1(\boldsymbol{w}_1^1,\boldsymbol{w}_2^1)\},$$

де $\rho(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2) = \max\{\max_{\Pi(\boldsymbol{T})} \| \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \|, \max_{\Pi(\boldsymbol{T})} \| \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \|\}$,

$$\rho^1(\boldsymbol{w}_1^1,\boldsymbol{w}_2^1) = \max\{\max_{\Pi(\boldsymbol{T})} \| \boldsymbol{u}_1^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{u}_2^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \|, \max_{\Pi(\boldsymbol{T})} \| \boldsymbol{v}_1^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{v}_2^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \|\}.$$

Нехай $\boldsymbol{L}_1^1(\boldsymbol{u}^1)$, $\boldsymbol{L}_2^1(\boldsymbol{u}^1)$ константи Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{t}$ відповідно для функції $\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$, а $\boldsymbol{L}_1^1(\boldsymbol{v}^{(2)})$ константа Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ для функції $\boldsymbol{v}^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$. Позначимо $\tilde{\boldsymbol{L}} = \max\{\boldsymbol{L}, \max\{\boldsymbol{L}_1^1(\boldsymbol{u}^1), \boldsymbol{L}_2^1(\boldsymbol{u}^1), \boldsymbol{L}_1^1(\boldsymbol{v}^1)\} = \boldsymbol{L}^1\}$, де замість $\boldsymbol{L}$ візьмемо константу Ліпшиця для функцій $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$, з урахуванням ліпшицевості функції $\boldsymbol{v}$ за $\boldsymbol{t}$.

Позначимо через $\tilde{\mathbb{E}}_1(\boldsymbol{T},\tilde{\boldsymbol{L}})$ множину функцій $\tilde{\boldsymbol{w}} \in \tilde{\mathbb{E}}_0(\boldsymbol{T})$, для яких константами Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{t}$ відповідно слугують $\boldsymbol{L}$ для $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{L}^1$ для $\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{v}^{(2)}$ (для функції $\boldsymbol{v}^{(2)}$ ліпшицевість тільки за $\boldsymbol{x}$).

Введемо такі позначення для $(\boldsymbol{i} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{m}, \boldsymbol{j} = 1,\mathbf{K},\boldsymbol{n})$:

$$\boldsymbol{v}_j^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{q}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}); \quad \| \boldsymbol{v}^1 \| \le \boldsymbol{Q};$$
$$\boldsymbol{u}_i^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})) - \lambda_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}))\boldsymbol{u}_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}); \tag{22}$$
$$\varphi_i^1(\tau;\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{w}}) = \exp\int_{\boldsymbol{t}}^{\tau}[(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}),\theta,\boldsymbol{w}(\varphi_i(\theta;\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{w}),\theta)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(\lambda_i)'_{v_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))v_r^1(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)]d\theta; \tag{23}$$

$$\chi_i^1(x,t,\tilde{w}) = \begin{cases} -\dfrac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\tilde{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))}, & (x,t)\in\Pi_i^0(w), \\ -\dfrac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\tilde{w})}{\lambda_i(\mathbf{l},\chi_i(x,t,w),w(\mathbf{l},\chi_i(x,t,w)))}, & (x,t)\in\Pi_i^{\mathbf{l}}(w). \end{cases} \tag{24}$$

Зауваження 1. Якщо розв'язок задачі (1)-(8) є гладким, то: $u^1 = u_x$, $u^{(2)} = u_t$, $\varphi_i^1(\tau;x,t,\tilde{w}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_i(\tau;x,t,w)$, $\chi_i^1(x,t,\tilde{w}) = \dfrac{\partial}{\partial x}\chi_i(x,t,w)$, $v^1 = v_x$, $v^{(2)} = v_t$.

Тепер розглянемо систему, яку отримуємо з (16)-(17) формальним диференціюванням системи (16) за x, а системи (17) за t, замінюючи u_x на u^1, v_x на v^1 та всіма іншими відповідними замінами на підставі зауваження 0.1. До одержаної системи приєднуємо систему (16)-(17). Тоді з урахуванням (18) матимемо

$$u_i(x,t) = \mathrm{R}_i[w](x,t) + \mathrm{I}_i[w](x,t), \quad i = 1,\mathrm{K},m, \tag{25}$$

$$u_i^1(x,t) = \mathrm{R}_i^1[\tilde{w}](x,t) + \mathrm{I}_i^1[\tilde{w}](x,t) + \mathrm{Y}_i^1[\tilde{w}](x,t), \quad i = 1,\mathrm{K},m, \tag{26}$$

$$v_j(x,t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t;w)}^{x} q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi; \quad j = 1,\mathrm{K},n, \tag{27}$$

$$v_j^{(2)}(x,t) = \beta_j'(t) + \mathrm{I}_{1j}^1[\tilde{w}](x,t) + \mathrm{Y}_{1j}^1[w](t), \quad j = 1,\mathrm{K},n. \tag{28}$$

Тут введено такі позначення:

$$\mathrm{R}_i^1[\tilde{w}](x,t) = \begin{cases} [(\gamma_i^0)_t'(\chi_i(x,t,w),u(0,\chi_i(x,t,w))) + \sum\limits_{j\in I_+^0}(\gamma_i^0)'_{u_j}(\chi_i(x,t,w), \\ u(0,\chi_i(x,t,w)))u_j^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w))]\chi_i^1(x,t,\tilde{w}), (x,t)\in\Pi_i^0(w); \\ \alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w))\varphi_i^1(0;x,t,\tilde{w}), (x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(w); \\ [(\gamma_i^{\mathbf{l}})_t'(\chi_i(x,t,w),u(\mathbf{l},\chi_i(x,t,w))) + \sum\limits_{j\in I_-^{\mathbf{l}}}(\gamma_i^{\mathbf{l}})'_{u_j}(\chi_i(x,t,w), \\ u(\mathbf{l},\chi_i(x,t,w)))u_j^{(2)}(\mathbf{l},\chi_i(x,t,w))]\chi_i^1(x,t,\tilde{w}), (x,t)\in\Pi_i^{\mathbf{l}}(w); \end{cases} \tag{29}$$

$$
\mathsf{Y}_i^1[\tilde{w}](x,t) = \begin{cases} -f_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))\chi_i^1(x,t,\tilde{w}), & (x,t)\in \Pi_i^0(w); \\ 0, & (x,t)\in \Pi_i^{\alpha}(w); \\ -f_i(l,\chi_i(x,t,w),w(l,\chi_i(x,t,w)))\chi_i^1(x,t,\tilde{w}), & (x,t)\in \Pi_i^l(w). \end{cases} \qquad (30)
$$

$$
\mathsf{I}_i^1[\tilde{w}](x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t,w)}^{t} [(f_i)'_x(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)) +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{m}(f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{n}(f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))\, v_k^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)]\varphi_i^1(\tau;x,t,\tilde{w})d\tau, \qquad (31)
$$

$$
\mathsf{I}_{1j}^1[\tilde{w}](x,t) = \int\limits_{s_j(t;w)}^{x} [(q_j)'_t(\xi,t,w(\xi,t)) + \sum_{i:c_i=c_j}(q_j)'_{u_i}(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t) +
$$

$$
+\sum_{k:c_k=c_j}(q_j)'_{v_k}(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]d\xi, \qquad (32)
$$

$$
\mathsf{Y}_{1j}^1[w](t) = r_j(t,s(t),w(s_j(t),t))q_j(s_j(t;w),t,w(s_j(t;w),t)). \qquad (33)
$$

Розглянемо оператор $\tilde{\mathcal{S}} = (\mathcal{S},\mathcal{S}^1)$, визначений на $\tilde{\mathbb{E}}_0(T)$, значення якого $\tilde{\mathcal{S}}[\tilde{w}] = (\mathcal{S}[w],\mathcal{S}^1[\tilde{w}])$ на функціях $\tilde{w} = (w,w^1)$ обчислюють за правилом

$$
\mathcal{S} = (\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_m;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_n);
$$

$$
\mathcal{S}^1 = (\mathcal{A}_1^1,\mathcal{A}_2^1,\ldots,\mathcal{A}_m^1;\mathcal{B}_1^1,\mathcal{B}_2^1,\ldots,\mathcal{B}_n^1);
$$

$$
\mathcal{A}_i[w](x,t) = \mathcal{R}_i[w](x,t) + \mathsf{I}_i[w](x,t); \quad i = 1,\ldots,m, \qquad (34)
$$

$$
\mathcal{B}_j[w](x,t) = \beta_j(t) + \int\limits_{s_j(t;w)}^{x} q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi; \quad j = 1,\ldots,n, \qquad (35)
$$

$$
\mathcal{A}_i^1[\tilde{w}](x,t) = \mathcal{R}_i^1[\tilde{w}](x,t) + \mathsf{I}_i^1[\tilde{w}](x,t) + \mathsf{Y}_i^1[\tilde{w}](x,t); \quad i = 1,\ldots,m, \qquad (36)
$$

$$
\mathcal{B}_j^1[\tilde{w}](x,t) = \beta_j'(t) + \mathsf{I}_{1j}^1[\tilde{w}](x,t) + \mathsf{Y}_{1j}^1[w](t); \quad j = 1,\ldots,n. \qquad (37)
$$

Позначимо також $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_m;\mathcal{A}_1^1,\mathcal{A}_2^1,\ldots,\mathcal{A}_m^1)$; $\tilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\ldots,\mathcal{B}_n;\mathcal{B}_1^1,\mathcal{B}_2^1,\ldots,\mathcal{B}_n^1)$.

2. **Достатні умови глобальної гладкої розв'язності задачі**.

Позначимо через $\overset{\circ}{\mathbb{E}}_0(T)$ підпростір простору $\tilde{\mathbb{E}}_0(T)$, утворений вектор-функціями $\tilde{w} = (u,u^1,v,v^{(2)})$ такими, що $w(x,t) = \{u(x,t),v(x,t)\}$ є неспадними функціями за аргументом x і, крім того, $u^1(x,t) \geq 0$. Через $\overset{\circ}{\breve{E}}_1(T,\breve{L})$ позначатимемо відповідний підпростір простору $\breve{E}_1(T,\breve{L})$ і, нарешті, позначимо

$$\overset{\circ}{E}_2(T,\breve{L},P,P^1) =$$
$$= \{\breve{w} \in \overset{\circ}{E}_1(T,\breve{L}) \mid \max\{\| u - \alpha(x) \|, \| v \|\} \leq P; \max\{\| u^1 - \alpha^1(x) \|, \| v^2 \|\} \leq P^1\}.$$

Припускаємо тепер, що всі функції $\lambda_i, f_i, q_j, r_j, \lambda'_x, \lambda'_{u_i}, \lambda'_{v_j}, \lambda'_t, f^1_x, f'_{u_i}, f'_{v_j}$, $f'_t, q'_x, q'_{u_i}, q'_{v_j}, q'_t$ визначені в $D(T_0,\infty)$ і для кожного $P_0 > 0$ та $P^1_0 > 0$ виконуються умови **A**1- **A**21, а також умови **B**1- **B**9, причому умова **B**7 правильна не тільки для функцій f_i, а й для функцій $(f_i)'_t$, $(f_i)'_t$, $(f_i)'_{u_k}$, $(f_i)'_{v_j}$.

Зауважимо, що при виконанні умови **B**2, умови узгодження першого порядку (20), (21) матимуть вигляд

$$(\gamma^0_i)'_t = f_i(0,0,\alpha(0),v(0,0)) - \lambda_i(0,0,\alpha(0),v(0,0))\alpha'_i(0),\ i \in I^0_+; \tag{38}$$

$$(\gamma^1_i)'_t = f_i(1,0,\alpha(1),v(1,0)) - \lambda_i(1,0,\alpha(1),v(1,0))\alpha'_i(1),\ i \in I^1_-; \tag{39}$$

$$R^1_i[\breve{w}](x,t) = \begin{cases} (\gamma^0_i)'_t(\chi_i(x,t,w))\chi^1_i(x,t,\breve{w}), & (x,t) \in \Pi^0_i(w), \\ \alpha'_i(\varphi_i(0;x,t,w))\varphi^1_i(0;x,t,\breve{w}), & (x,t) \in \Pi^\alpha_i(w), \\ (\gamma^1_i)'_t(\chi_i(x,t,w))\chi^1_i(x,t,\breve{w}), & (x,t) \in \Pi^1_i(w). \end{cases} \tag{40}$$

Зауваження 2. На підставі умови **B1** функції $(\lambda_i)'_x$, $(\lambda_i)'_{u_k}$, $(\lambda_i)'_{v_j}$ задовольняють нерівності $(\lambda_i)'_x \geq 0$, $(\lambda_i)'_{u_k} \geq 0$, $(\lambda_i)'_{v_j} \geq 0$ для кожного фіксованого t і, крім того, згідно з **B**6, $v^1 \geq 0$. Тоді, оскільки $\tau \leq t$, матимемо

$$\varphi^1_i(\tau;x,t,\breve{w}) = \exp\int_t^\tau [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)) +$$
$$+\sum_{k=1}^m (\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))u^1_k(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta) +$$
$$+\sum_{r=1}^n (\lambda_i)'_{v_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))v^1_r(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)]d\theta \leq 1.$$

Отже, в усіх подальших оцінках можна прийняти $M_1 = 1$.

Зауваження 3. З умов **B**1- **B**6 та формул (40), (26), (30), (31) отримуємо, що $A_i^1[\breve{w}](x,t) \geq 0$ і $v_j^1(x,t) \geq 0$ ($i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$).

Лема 1. Нехай $\breve{w}(x,t)$ - неперервний розв'язок задачі $\breve{w} = S\breve{w}$ у прямокутнику $\Pi(T_0)$. Тоді у разі виконання умов **A**8, **B**2 і **B**7 правильна така апріорна оцінка розв'язку:

$$\| \breve{w}(x,t) \| \leq \breve{H}, \tag{41}$$

де $\breve{H}$ - деяка стала.

Доведення. За зазначених припущень на функції $w(x,t)$, очевидно, справджуються такі нерівності:

$$\| u(x,t) \| \leq C;$$
$$\| v(x,t) \| \leq Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}. \tag{42}$$

Позначимо

$$H_1 = \max\{\max_i\{| (f_i)'_x (0,0,0) |; \max_k | (f_i)'_{u_k} (0,0,0) |; \max_j | (f_i)'_{v_j} (0,0,0) |\};$$
$$\max_i | \lambda_i (0,0,0) |; \max_j\{| (q_j)'_t (0,0,0) |; \max_{i:c_i = c_j} | (q_j)'_{u_i} (0,0,0) |;$$
$$\max_{k;c_k = c_j} | (q_j)'_{v_k} (0,0,0) |\}\}. \tag{43}$$

Тоді з формули (40) випливає, що для $(x,t) \in \Pi(T_0)$ виконуються нерівності

$$| R_i^1[\breve{w}](x,t) | \leq \max\{A^1; \Lambda_0^{-1}\}. \tag{44}$$

Крім того, використовуючи оцінку (42), а також умови **A**8, **B**7, для $(x,t) \in \Pi(T_0)$ отримаємо

$$| Y_i^1[\breve{w}](x,t) | \leq \Lambda_0^{-1}\tilde{M}(t) | w | \leq \Lambda_0^{-1} \max_{0\leq t\leq T_0} \tilde{M}(t) \max\{C; Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}\};$$
$$| Y_{1j}^1[\breve{w}](x,t) | \leq \tilde{M}(t) | s | M(s) | v | \leq \max_{0\leq t\leq T_0} \tilde{M}(t) l \max_{0\leq x\leq l} M(x) Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}. \tag{45}$$

Нарешті, для $(x,t) \in \Pi(T_0)$ матимемо

$$| I_i^1[\breve{w}](x,t) | \leq \int_{\chi_i(x,t,w)}^{t} [| (f_i)'_x (\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau, w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)) -$$
$$-(f_i)'_x (0,0,0) | + | (f_i)'_x (0,0,0) | +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(|(f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))-(f_i)'_{u_j}(0,0,0)|+$$

$$+|(f_i)'_{u_j}(0,0,0)|)u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(|(f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))-(f_i)'_{v_k}(0,0,0)|+$$

$$+|(f_i)'_{v_k}(0,0,0)|)v_k^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)]d\tau \le T_0H_1+\int_{\chi_i(x,t,w)}^{t}[\tilde{F}_1H_2+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(\tilde{F}_1H_2+H_1)\,|u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|+\sum_{k=1}^{n}(\tilde{F}_1H_2+$$

$$+H_1)\,|v_k^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|]d\tau \le T_0(H_1+\tilde{F}_1H_2+(H_1+\tilde{F}_1H_2)n\times$$

$$\times\int_0^{l}M(\xi)d\xi Be^{\int_0^{l}M(\xi)d\xi})+\int_{\chi_i(x,t,w)}^{t}\sum_{j=1}^{m}(\tilde{F}_1H_2+H_1)\,|u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|\,d\tau, \tag{46}$$

де $H_2 = l + T_0 + \max\{C;Be^{\int_0^{l}M(\xi)d\xi}\}$.

Отож, об’єднуючи (44), (45) і (46), одержимо

$$|u_i^1(x,t)| \le H_3+\int_{\chi_i(x,t,w)}^{t}\sum_{j=1}^{m}(\tilde{F}_1H_2+H_1)\,|u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|\,d\tau, \tag{47}$$

де

$$H_3 = \max\{A^1;\Lambda_0^{-1}\}+\Lambda_0^{-1}\max_{0\le t\le T_0}\tilde{M}(t)\max\{C;Be^{\int_0^{l}M(\xi)d\xi}\}+T_0(H_1+\tilde{F}_1H_2+$$

$$+(H_1+\tilde{F}_1H_2)n\int_0^{l}M(\xi)d\xi Be^{\int_0^{l}M(\xi)d\xi}).$$

Звідси, перейшовши у формулі (47) до максимуму по i та максимуму по (x,t) під інтегралом ($0\le\xi\le x$; $0\le t\le\tau$), застосувавши після цього лему Гроуолла і перейшовши до максимуму по всіх $(x,t)\in\Pi(T_0)$, матимемо

$$\|u^1(x,t)\| \le H_3e^{\int_0^{T_0}m(\tilde{F}_1H_2+H_1)d\tau} = H_3e^{T_0m(\tilde{F}_1H_2+H_1)} = H_4. \tag{48}$$

На підставі (48) та формули (22) отримаємо

$$|l_{1j}^1[\tilde{w}](x,t)| \le lH_1+\int_{s_j(t;w)}^{x}[\tilde{Q}_1H_2+\sum_{i:c_i=c_j}(\tilde{Q}_1H_2+H_1)\,|u_i^{(2)}(\xi,t)|+$$

$$+\sum_{k:c_k=c_j}(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)\,|\,v_k^{(2)}(\xi,t)\,|\,d\xi \le l(H_1+\tilde{Q}_1 H_2+m(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)\times$$

$$\times[\max_{0\le t\le T_0}\tilde{M}(t)\max\{C;Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}\}+H_4(\tilde{\Lambda}_1 H_2+H_1)])+$$

$$+\int_{s_j(t;w)}^{x}\sum_{k:c_k=c_j}(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)\,|\,v_k^{(2)}(\xi,t)\,|\,d\xi. \tag{49}$$

Звідси, використовуючи (45) і (49), згідно з (28) матимемо

$$|\,v_j^{(2)}(x,t)\,|\le H_5+\int_{s_j(t;w)}^{x}\sum_{k:c_k=c_j}(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)\,|\,v_k^{(2)}(\xi,t)\,|\,d\xi, \tag{50}$$

де

$$H_5 = B^1+\max_{0\le t\le T_0}\tilde{M}(t)\,l\max_{0\le x\le l}M(x)Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}+$$

$$+l(H_1+\tilde{Q}_1 H_2+m(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)[\max_{0\le t\le T_0}\tilde{M}(t)\max\{C;Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}\}+H_4(\tilde{\Lambda}_1 H_2+H_1)]).$$

У формулі (50) переходимо до максимуму по j і застосовуємо лему Гронуолла. Після того, перейшовши до максимуму по $(x,t)\in\Pi(T_0)$, одержимо оцінку

$$\|\,v^{(2)}(x,t)\,\|\le H_5 e^{l(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)n}. \tag{51}$$

Тепер, використовуючи формули (48), (51) і (42), остаточно приходимо до бажаного результату з константою $\tilde{H}$, яка визначається рівністю

$$\tilde{H} = \max\{H_4;H_5 e^{l(\tilde{Q}_1 H_2+H_1)n};C;Be^{\int_0^l M(\xi)d\xi}\}. \tag{52}$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. У прямокутнику $\Pi(T)$ функції $\mathrm{A}_i^1[\tilde{w}](x,t)$ та $\mathrm{S}[w](x,t)$ задовольняють умову Ліпшиця за x відповідно з константами

$$L_x^{\mathrm{A}^1} = \max\{L_{\alpha x}^{\mathrm{A}^1};L_{\gamma x}^{\mathrm{A}^1}\},$$

$$L_x^{\mathrm{S}} = A_1+\Lambda_0^{-1}\Gamma_1+(F_1+L_x F_2)T+F\Lambda_0^{-1}+Q, \tag{53}$$

де вигляд сталих $L_{\alpha x}^{\mathrm{A}^1}$ і $L_{\gamma x}^{\mathrm{A}^1}$ буде вибрано в процесі доведення леми.

Доведення. У прямокутнику $\Pi(T)$ функція $\mathrm{A}[w](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_x^{\mathrm{A}} = A_1+\Lambda_0^{-1}\Gamma_1+(F_1+L_x F_2)T+F\Lambda_0^{-1}, \tag{54}$$

а для функції $\mathsf{S}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ константою Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ можна вважати величину

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{S}} = \boldsymbol{A}_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}\Lambda_0^{-1} + \boldsymbol{Q}. \tag{55}$$

Аналогічно, для функції $\mathsf{B}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ константою Ліпшиця за $\boldsymbol{t}$ можна вважати величину

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathsf{B}} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{RQ} + \mathbf{l}(\boldsymbol{Q}_3 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}). \tag{56}$$

В $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\alpha}(\boldsymbol{w})$ функція $\mathsf{A}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ з константою

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\alpha\boldsymbol{x}}^{\mathsf{A}^1} &= \boldsymbol{A}_1^1 + \boldsymbol{A}^1\boldsymbol{N}_2(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}_{10}(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T} = \\ &= \boldsymbol{A}_1^1 + (\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_{10})(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T}.\end{aligned} \tag{57}$$

Зауваження 4. Через $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{i}}$ $(\boldsymbol{i} = 1,\ldots)$ надалі позначатимемо сталі, залежні тільки від вихідних даних задачі, тобто від констант $\breve{\Lambda}$, Λ_0, $\breve{\Lambda}_1$, $\breve{\boldsymbol{F}}$, $\breve{\boldsymbol{F}}_1$, $\breve{\Gamma}$, $\breve{\Gamma}_1$, $\breve{\boldsymbol{A}}$, $\breve{\boldsymbol{A}}_1$, $\boldsymbol{T}_0$, $\breve{\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\breve{\boldsymbol{B}}$, $\breve{\boldsymbol{B}}_1$, $\breve{\boldsymbol{R}}$, $\breve{\boldsymbol{R}}_1$, $\breve{\boldsymbol{Q}}$, $\breve{\boldsymbol{Q}}_1$, і не залежні від $\boldsymbol{T}$, $\breve{\boldsymbol{L}}$, розуміючи при цьому, що у записі зазначених сталих враховано всі необхідні перетворення, згідно з зауваженням 0.2.

В $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\alpha}(\boldsymbol{w})$ функція $\mathsf{A}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{t}$ з константою

$$\boldsymbol{L}_{\alpha\boldsymbol{t}}^{\mathsf{A}^1} = \Lambda\boldsymbol{L}_{\alpha\boldsymbol{x}}^{\mathsf{A}^1} + \boldsymbol{N}_{13};\ \boldsymbol{N}_{13} = (\boldsymbol{F}^1 + \boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m} + \boldsymbol{Qn})). \tag{58}$$

Очевидно, що в $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{0}(\boldsymbol{w})$ та в $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{l}}(\boldsymbol{w})$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}&|\,\mathsf{R}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{t}) - \mathsf{R}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{t})\,| \le [\Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1 + \Gamma^1\boldsymbol{N}_7(1+\breve{\boldsymbol{L}})]\,|\,\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\,|;\\ &|\,\mathsf{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{t}) - \mathsf{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{t})\,| \le \boldsymbol{N}_{17}(1+\breve{\boldsymbol{L}})\,|\,\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\,|;\\ &|\,\mathsf{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{t}) - \mathsf{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{t})\,| \le [\boldsymbol{N}_{10}(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T} + \Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_{13}]\,|\,\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\,|,\end{aligned} \tag{59}$$

де $\boldsymbol{N}_{17} = \Lambda_0^{-2}\breve{\boldsymbol{F}}_1 + \boldsymbol{FN}_7$, а константа $\breve{\boldsymbol{L}}$ утворена константами $\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}}$ та $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}$.

Отже, в $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{0}(\boldsymbol{w})$ і в $\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{l}}(\boldsymbol{w})$ функція $\mathsf{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ $(\boldsymbol{i} = 1,\ldots,\boldsymbol{m})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ з константою

$$\boldsymbol{L}_{\gamma\boldsymbol{x}}^{\mathsf{A}^1} = \Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1 + \Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_{13} + \boldsymbol{N}_{10}(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T} + (\Gamma^1\boldsymbol{N}_7 + \boldsymbol{N}_{17})(1+\breve{\boldsymbol{L}}), \tag{60}$$

де в константу $\breve{\boldsymbol{L}}$ входять $\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}}$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}$.

Отож, отримуємо, що в прямокутнику $\Pi(\boldsymbol{T})$ функція $\mathsf{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ $(\boldsymbol{i} = 1,\ldots,\boldsymbol{m})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ з константою

$$L_x^{A^1} = \max\{L_{\alpha x}^{A^1}; L_{\gamma x}^{A^1}\}. \qquad (61)$$

Крім того, в $\Pi(T)$ функція $A_i^1[\breve{w}](x,t)$ $(i = 1,\ldots,m)$ є ліпшицевою за t з константою

$$L_t^{A^1} = \Lambda L_x^{A^1} + N_{13}, \qquad (62)$$

а функція $B^1[\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_x^{B^1} = N_{21} = Q^1(1 + P_0^2 + nP_0^1), \qquad (63)$$

де $P_0^2 = F + \Lambda P_0^1$.

В $\Pi(T)$ також виконується нерівність

$$\begin{aligned} | A_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x) | \le [&A_1^1\Lambda + A^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn) + F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn) + \\ &+\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1 + F_3 + F_2 L_t) + A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1} + A^1\Lambda_0^{-1}(\Lambda_3 + \Lambda_2 L_t) + \\ &+A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn)]T + A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn)]T, \end{aligned} \qquad (64)$$

а для оператора B^1 правильна оцінка

$$\begin{aligned} \| B^1[\breve{w}](x,t) \| \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1 e^{H1}) + \\ +[(1 + m(F + \Lambda P_0^1))\max_x M(x)P_0 + Q^1 nP_0^1]H^{-1}. \end{aligned} \qquad (65)$$

З формул (60)-(62) робимо висновок про те, що в загальному випадку $L_x^{A^1} \ge L^1$ і, крім того, якщо замість L_x взяти величину

$$L_x = A_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1 T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q, \qquad (66)$$

а замість L_t величину

$$L_t = \Lambda L_x + F + L_t^B, \qquad (67)$$

де $L_t^B = \dfrac{B_1 + RQ + lQ_3}{1 - lQ_2}$, то за умови, що $LT < 1$ і $lQ_2 < 1$, отримаємо нерівність $L^S \le L$. Лему 2 доведено.

Доведемо тепер, що при виконанні всіх перелічених тут умов оператор $\breve{S}\breve{S}$ відображає кулю $\overset{o}{\mathrm{IE}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ в себе.

Лема 3. Для деяких $P, P^1, \breve{L}$ і $H > 0$ оператор $\breve{S}\breve{S}$ відображає кулю $\overset{o}{\mathrm{IE}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ в себе.

Доведення. Згідно з лемою 1 виберемо деяке $P_0^1 > \max\{H_5;\ H_5 e^{1(\breve{Q}_1 H_2 + H_1)n}\}$ і позначимо $P^1 = P_0^1 - \max\{H_5; H_5 e^{1(\breve{Q}_1 H_2 + H_1)n}\}$.

Із формули (57) отримуємо, що для $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^{\alpha}(w)$ функція $A^1[\breve{S}\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_{\alpha x}^{A^1\breve{S}} = A_1^1 + (A^1 N_2 + N_{10})(1 + \breve{L}_x^{S})T, \tag{68}$$

де $\breve{L}_x^{S} = \max\{L_x; L_{\alpha x}^{A^1}; L_{\gamma x}^{A^1}; L_x^{B^1}\}$.

Нехай тепер $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$ (або $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^1(w)$). Оскільки аргументами операторів на цьому кроці є функції $\breve{S}\breve{w}$, то матимемо оцінку

$$\begin{aligned}
&| \chi_i^1(x_1,t,\breve{S}\breve{w}) - \chi_i^1(x_2,t,\breve{S}\breve{w}) | \le \Lambda_0^{-1} \, | \varphi_i^1(\chi_i(x_1,t,Sw); x_1,t,\breve{S}\breve{w}) - \\
&\varphi_i^1(\chi_i(x_2,t,Sw); x_2,t,\breve{S}\breve{w}) | + \Lambda_0^{-2} \, | \lambda_i(0,\chi_i(x_1,t,Sw), Sw(0,\chi_i(x_1,t,Sw))) - \\
&-\lambda_i(0,\chi_i(x_2,t,Sw), Sw(0,\chi_i(x_2,t,Sw))) | \le \Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \breve{L}^{S} T) \, | x_1 - x_2 | + \\
&+\Lambda_0^{-2}[\Lambda_3 + \Lambda_2 L_t^{S}] \, | \chi_i(x_1,t,Sw) - \chi_i(x_2,t,Sw) | \le \\
&\le (\Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \breve{L}^{S} T) + \Lambda_0^{-3} \breve{\Lambda}_1 (1 + L_t^{S})) \, | x_1 - x_2 | .
\end{aligned} \tag{69}$$

Тому

$$\begin{aligned}
&| R_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_1,t) - R_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_2,t) | \le | (\gamma_i^0)_t'(\chi_i(x_1,t,Sw)) \chi_i^1(x_1,t,\breve{S}\breve{w}) - \\
&-(\gamma_i^0)_t'(\chi_i(x_2,t,Sw)) \chi_i^1(x_2,t,\breve{S}\breve{w}) | \le \Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1 \, | x_1 - x_2 | + \Gamma^1(\Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \breve{L}^{S} T) + \\
&+\Lambda_0^{-3} \breve{\Lambda}_1 (1 + L_t^{S})) \, | x_1 - x_2 | .
\end{aligned} \tag{70}$$

Далі

$$\begin{aligned}
&| Y_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_1,t) - Y_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_2,t) | \le \Lambda_0^{-1}(F_3 + F_2 L_t^{S}) \, | \chi_i(x_1,t,Sw) - \\
&-\chi_i(x_2,t,Sw) | + F \, | \chi_i^1(x_1,t,\breve{S}\breve{w}) - \chi_i^1(x_2,t,\breve{S}\breve{w}) | \le \Lambda_0^{-2} \breve{F}_1 (1 + L_t^{S}) \, | x_1 - x_2 | + \\
&+F(\Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \breve{L}^{S} T) + \Lambda_0^{-3} \breve{\Lambda}_1 (1 + L_t^{S})) \, | x_1 - x_2 | .
\end{aligned} \tag{71}$$

Нарешті,

$$\begin{aligned}
&| I_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_1,t) - I_i^1[\breve{S}\breve{w}](x_2,t) | \le \\
&\le [\Lambda_0^{-1}(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) + N_{10}(1 + \breve{L}_x^{S})T] \, | x_1 - x_2 | .
\end{aligned} \tag{72}$$

Тепер, об'єднуючи (70)-(72), отримаємо, що функція $A_i^1[\breve{S}\breve{w}](x,t)$ в $\Pi_i^0(w)$ (або в $\Pi_i^1(w)$) задовольняє умову Ліпшиця за x з константою

$$L_{\gamma x}^{A^1 S} = \Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1 + \Gamma^1(\Lambda_0^{-1} N_5 (1 + \breve{L}^{S} T) + \Lambda_0^{-3} \breve{\Lambda}_1 (1 + L_t^{S})) + \Lambda_0^{-2} \breve{F}_1 (1 + L_t^{S}) +$$

$$+\boldsymbol{F}(\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_5(1+\breve{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{S}}\boldsymbol{T})+\Lambda_0^{-3}\breve{\Lambda}_1(1+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{S}}))+\Lambda_0^{-1}(\boldsymbol{F}^1+\boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}))+$$
$$+\boldsymbol{N}_{10}(1+\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{S}})\boldsymbol{T}. \qquad (73)$$

Отже, у прямокутнику $\Pi(\boldsymbol{T})$ функція $\mathrm{A}^1[\mathrm{S}\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{x}$ з константою

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{A}^1\mathrm{S}} = \max\{\boldsymbol{L}_{\alpha\boldsymbol{x}}^{\mathrm{A}^1\mathrm{S}};\boldsymbol{L}_{\gamma\boldsymbol{x}}^{\mathrm{A}^1\mathrm{S}}\}. \qquad (74)$$

Далі в $\Pi(\boldsymbol{T})$ функція $\mathrm{A}^1[\mathrm{S}\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ задовольняє умову Ліпшиця за $\boldsymbol{t}$ з константою

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{A}^1\mathrm{S}} = \Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{A}^1\mathrm{S}}+\boldsymbol{N}_{13}, \qquad (75)$$

а функція $\mathrm{B}^1[\mathrm{S}\breve{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ є ліпшицевою за $\boldsymbol{x}$ з константою

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{B}^1\mathrm{S}} = \boldsymbol{Q}^1(1+\boldsymbol{P}_0^2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_0^1). \qquad (76)$$

Зауваження 5. Оскільки $\boldsymbol{L} > \boldsymbol{A}_1$, а $\boldsymbol{L}^1 > \boldsymbol{A}_1^1$, то можна вважати, що $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T} < 1$ і $\boldsymbol{A}_1^1\boldsymbol{T} < 1$.

Якщо з самого початку, враховуючи зауваження 0.5, вибрати замість $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^1$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}$ і $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}$ величини

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1 = \max\{\boldsymbol{A}_1^1;\breve{\boldsymbol{b}}_7\Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}\}+\breve{\boldsymbol{b}}_{12};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^1 = \Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1+\boldsymbol{N}_{13};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_1+\Lambda_0^{-1}\Gamma_1+\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}\Lambda_0^{-1}+\boldsymbol{Q};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}} = \Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}};\\
\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{S}} = \max\{\boldsymbol{A}_1;\boldsymbol{A}_1^1;\breve{\boldsymbol{b}}_4(1+\breve{\boldsymbol{L}})\}+\breve{\boldsymbol{b}}_1;\\
\breve{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{S}} = \max\{1,\Lambda\}\breve{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}}+\boldsymbol{N}_{13},
\end{gathered} \qquad (77)$$

де

$$\breve{\boldsymbol{b}}_{12} = \breve{\boldsymbol{b}}_{10}+\breve{\boldsymbol{b}}_{11};\ \breve{\boldsymbol{b}}_{11} = \max\{\breve{\boldsymbol{b}}_3;\breve{\boldsymbol{b}}_9\};\ \breve{\boldsymbol{b}}_{10} = \breve{\boldsymbol{b}}_2+\breve{\boldsymbol{b}}_3\breve{\boldsymbol{b}}_1\boldsymbol{T}_0+\breve{\boldsymbol{b}}_3\breve{\boldsymbol{b}}_4(\boldsymbol{T}_0+1)+\breve{\boldsymbol{b}}_8;$$
$$\breve{\boldsymbol{b}}_9 = \breve{\boldsymbol{b}}_6\max\{1,\Lambda\}+\boldsymbol{N}_{10};$$
$$\begin{aligned}\breve{\boldsymbol{b}}_8 = {}&\breve{\boldsymbol{b}}_5+\breve{\boldsymbol{b}}_6(\max\{1,\Lambda\}\breve{\boldsymbol{b}}_1+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}}+\boldsymbol{N}_{13})\boldsymbol{T}_0+\breve{\boldsymbol{b}}_7(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}})+\\&+\boldsymbol{N}_{10}\breve{\boldsymbol{b}}_1\boldsymbol{T}_0+\breve{\boldsymbol{b}}_4(\boldsymbol{T}_0+1)(\max\{1,\Lambda\}\breve{\boldsymbol{b}}_6+\boldsymbol{N}_{10})\end{aligned};$$
$$\breve{\boldsymbol{b}}_7 = \Gamma^1\Lambda_0^{-3}\breve{\Lambda}_1+\Lambda_0^{-2}\breve{\boldsymbol{F}}_1+\Lambda_0^{-3}\breve{\Lambda}_1\boldsymbol{F};\ \breve{\boldsymbol{b}}_6 = \Gamma^1\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_5+\boldsymbol{F}\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_5;$$
$$\begin{aligned}\breve{\boldsymbol{b}}_5 = {}&\Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1+\Lambda_0^{-1}(\boldsymbol{F}^1+\boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}))+\Gamma^1\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_5+\Gamma^1\Lambda_0^{-3}\breve{\Lambda}_1+\Lambda_0^{-2}\breve{\boldsymbol{F}}_1+\\&+\boldsymbol{F}(\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_5+\Lambda_0^{-3}\breve{\Lambda}_1)+\boldsymbol{N}_{10}\boldsymbol{T}_0\end{aligned};$$

$$\breve{b}_4 = \Gamma^1 N_7 + N_{17};\ \breve{b}_3 = A^1 N_2 + N_{10};\ \breve{b}_2 = (A^1 N_2 + N_{10} T_0;$$
$$\breve{b}_1 = \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1 T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q + (A^1 N_2 + N_{10}(T_0 + 1) + \Lambda_0^{-2}\Gamma_1^1 + \\ + \Lambda_0^{-1}(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)) + Q^1(1 + (F + \Lambda P_0^1)m + nP_0^1);$$
$$L_t^{\mathrm{B}} = \frac{B_1 + RQ + \mathbf{l}Q_3}{1 - \mathbf{l}Q_2},$$

то при виконанні нерівностей: $\mathbf{l}Q_2 < 1$; $LT < 1$; $L^1 T < 1$ оператор $\breve{S}\breve{S}$ відображатиме кулю $\overset{\circ}{\mathrm{IE}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$ в себе. Лему 3 доведено.

Перейдемо тепер до вивчення стисних властивостей оператора $\breve{S}\breve{S}$.

Лема 4. При зроблених припущеннях оператор $\breve{S}\breve{S}$ є стиском на кулі $\overset{\circ}{\mathrm{IE}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$.

Доведення. Для $w_1, w_2 \in \tilde{\mathrm{IE}}_2(T, L, P)$ виконуються співвідношення

$$\| S[w_1](x,t) - S[w_2](x,t) \| \le \kappa \| w_1 - w_2 \|, \tag{78}$$

де

$$\kappa = \tilde{k} + (Q\tilde{M}_3 T + 2Q_2 RT + Q_2 H^{-1});$$
$$\tilde{k} = ([A_1 + \Gamma_1\Lambda_0^{-1} + (F_1 + LF_2)T + F\Lambda_0^{-1}]\Lambda_2 e^{H\mathbf{l} + (\Lambda_1 + L\Lambda_2)T} + F_2 e^{H\mathbf{l}})T.$$

При $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$ маємо

$$| R_i^1[\breve{w}_1](x,t) - R_i^1[\breve{w}_2](x,t) | \le A^1 N_3 (1 + \breve{L})T\breve{\rho} + \breve{M}_1 A_1^1 T\rho;$$
$$| I_i^1[\breve{w}_1](x,t) - I_i^1[\breve{w}_2](x,t) | \le N_{40}(1 + \breve{L})T\breve{\rho}. \tag{79}$$

Тут

$$N_{40} = T_0\breve{F}_1\breve{M}_1 + F_2^1 e^{H\mathbf{l}} + (P_0^1 m + Qn)(\breve{F}_1\breve{M}_1 T_0 + F_2^1 e^{H\mathbf{l}}) + F^1 m(\breve{M}_1 T_0 + e^{H\mathbf{l}}) + \\ + F^1(1 + P_0^1 m + Qn)N_3 T_0 + F^1 n(\breve{Q}_1\breve{M}_1 + Q_2 e^{H\mathbf{l}}).$$

Отож, для $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$ справджуються нерівності

$$| A_i^1[\breve{w}_1](x,t) - A_i^1[\breve{w}_2](x,t) | \le N_{41}(1 + \breve{L})T\breve{\rho} + A_1^1\breve{M}_1 T\rho, \tag{80}$$

де $N_{41} = N_{10} + A^1 N_3$.

Якщо $(x,t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ (або $(x,t) \in \Pi_i^{\mathbf{l}}(w_1) \cap \Pi_i^{\mathbf{l}}(w_2)$), то правильні нерівності

$$| R_i^1[\breve{w}_1](x,t) - R_i^1[\breve{w}_2](x,t) | \le \Gamma^1(\Lambda_0^{-1} N_3 + N_4\breve{M}_2 + \Lambda_0^{-2}\breve{\Lambda}_1\breve{M}_2)(1 + \breve{L})T\breve{\rho} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\Gamma^1\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\rho+\Lambda_0^{-2}\tilde{\boldsymbol{M}}_1\Gamma_1^1\boldsymbol{T}\rho;\\
&|\,\mathrm{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le\Lambda_0^{-1}[\boldsymbol{F}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2(1+\boldsymbol{L})\boldsymbol{T}\rho+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\rho]+\boldsymbol{F}(\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_3+\\
&+\boldsymbol{N}_4\tilde{\boldsymbol{M}}_2+\Lambda_0^{-2}\tilde{\Lambda}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2)(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho}+\boldsymbol{F}\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\rho;\\
&|\,\mathrm{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le\boldsymbol{N}_{46}(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho},
\end{aligned}
\tag{81}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{46}=\;&\tilde{\boldsymbol{F}}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}_2^1\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}+\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{m}+(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})(\tilde{\boldsymbol{F}}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}_2^1\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1})+\\
&+\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{M}}_1\tilde{\boldsymbol{Q}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}+\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{F}^1(1+(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}))\boldsymbol{N}_3+\boldsymbol{F}^1(1+\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})\tilde{\boldsymbol{M}}_2.
\end{aligned}
$$

Отже, для $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\Pi_{\boldsymbol{i}}^0(\boldsymbol{w}_1)\cap\Pi_{\boldsymbol{i}}^0(\boldsymbol{w}_2)$ (або $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{w}_1)\cap\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{w}_2)$) матимемо оцінку

$$
\begin{aligned}
&|\,\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le(\Gamma^1+\boldsymbol{F})(\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_3+\boldsymbol{N}_4\tilde{\boldsymbol{M}}_2+\Lambda_0^{-2}\tilde{\Lambda}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2)(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho}+\\
&+(\Gamma^1+\boldsymbol{F})\Lambda_2\Lambda_0^{-2}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\rho+\Lambda_0^{-2}\tilde{\boldsymbol{M}}_1\Gamma_1^1\boldsymbol{T}\rho+\Lambda_0^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2(1+\boldsymbol{L})\boldsymbol{T}\rho+\\
&+\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\rho+\boldsymbol{N}_{46}(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\rho.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Розглянемо тепер, для визначеності, область $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\alpha}(\boldsymbol{w}_1)\cap\Pi_{\boldsymbol{i}}^0(\boldsymbol{w}_2)$ (всі інші випадки областей такого вигляду розглядають аналогічно). У цій області справджується нерівність

$$
\begin{aligned}
&|\,\mathrm{R}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{R}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})+\mathrm{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{Y}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le\\
&\le\boldsymbol{N}_{48}(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho}+\boldsymbol{A}_1^1\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}\rho,
\end{aligned}
\tag{83}
$$

де $\boldsymbol{N}_{48}=\Lambda_0^{-1}\Gamma_1^1\tilde{\boldsymbol{M}}_2+\Lambda_0^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2+\boldsymbol{A}^1\Lambda_0^{-1}\Lambda\boldsymbol{N}_4\tilde{\boldsymbol{M}}_2+\boldsymbol{A}^1\Lambda\Lambda_0^{-1}\boldsymbol{N}_3+\boldsymbol{A}^1\Lambda_0^{-1}\tilde{\Lambda}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_2$.

Далі

$$
|\,\mathrm{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{I}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le\boldsymbol{N}_{49}(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho},
\tag{84}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{49}=\;&(1+\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})(\tilde{\boldsymbol{F}}_1\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}_2^1\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1})+\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{m}(\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}_0+1)+\\
&+\boldsymbol{F}^1\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{M}}_1\tilde{\boldsymbol{Q}}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}1}\boldsymbol{Q}_2)+\boldsymbol{F}^1(1+\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}^1(1+\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})\tilde{\boldsymbol{M}}_2.
\end{aligned}
$$

Об'єднуючи результати (83), (84), отримуємо, що при $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\Pi_{\boldsymbol{i}}^{\alpha}(\boldsymbol{w}_1)\cap\Pi_{\boldsymbol{i}}^0(\boldsymbol{w}_2)$ (і у всіх аналогічних випадках) виконується нерівність

$$
|\,\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_1](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\mathrm{A}_{\boldsymbol{i}}^1[\tilde{\boldsymbol{w}}_2](\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\,|\le\boldsymbol{N}_{50}(1+\tilde{\boldsymbol{L}})\boldsymbol{T}\tilde{\rho}+\boldsymbol{A}_1^1\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}\rho,
\tag{85}
$$

де $\boldsymbol{N}_{50}=\boldsymbol{N}_{48}+\boldsymbol{N}_{49}$.

Отже, з (80), (82), (85) одержуємо, що у прямокутнику $\Pi(T)$ для $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \mathring{E}_2(T, \tilde{L}, P, P^1)$ та для $i = 1, \ldots, m$ правильна оцінка

$$| A_i^1[\tilde{w}_1](x,t) - A_i^1[\tilde{w}_2](x,t) | \le N_{52}(1 + \tilde{L})T\tilde{\rho} + \\ +[(\Gamma^1 + F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1} + \Lambda_0^{-1}F_2 e^{H1}]\rho + A_1^1\tilde{M}_1 T\rho, \qquad (86)$$

де

$$N_{52} = N_{50} + N_{41} + (\Gamma^1 + F)(\Lambda_0^{-1}N_3 + N_4\tilde{M}_2 + \Lambda_0^{-2}\tilde{\Lambda}_1\tilde{M}_2) + \\ + \Lambda_0^{-2}\tilde{M}_1\Gamma_1^1 + \Lambda_0^{-1}\tilde{F}_1\tilde{M}_2 + N_{46}.$$

В $\Pi(T)$ для $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \mathring{E}_2(T, \tilde{L}, P, P^1)$ справджується нерівність

$$\| B^1[\tilde{w}_1](x,t) - B^1[\tilde{w}_2](x,t) \| \le \\ \le N_{53}(1 + \tilde{L})T\tilde{\rho} + N_{55}2RT\tilde{\rho} + (R_2 + Q_2)\rho + N_{55}H^{-1}\tilde{\rho}, \qquad (87)$$

де $N_{53} = Q^1(1 + (F + \Lambda P_0^1)m + P_0^1 n)\tilde{M}_3 + \tilde{M}_3(Q\tilde{R}_1 + R\tilde{Q}_1)$; $N_{55} = Q_2^1(1 + (F + \Lambda P_0^1)m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m(F_2 + P_0^1\Lambda_2 + \Lambda)$.

Отож, з (86) і (87) матимемо, що в прямокутнику $\Pi(T)$ для $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \mathring{E}_2(T, \tilde{L}, P, P^1)$ виконується оцінка

$$\| S^1[\tilde{w}_1](x,t) - S^1[\tilde{w}_2](x,t) \| \le \tilde{b}_{13}(1 + \tilde{L})T\tilde{\rho} + A_1^1\tilde{M}_1 T\rho + N_{55}2RT\tilde{\rho} + \\ + N_{55}H^{-1}\tilde{\rho} + [(\Gamma^1 + F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1} + \Lambda_0^{-1}F_2 e^{H1} + R_2 + Q_2]\rho, \qquad (88)$$

де $\tilde{b}_{13} = N_{53} + N_{52}$.

З оцінки (88) робимо висновок про те, що в загальному випадку оператор S^1 не є стиском на кулі $\mathring{E}_2(T, \tilde{L}, P, P^1)$. Розглянемо тепер стисні властивості оператора $\tilde{S}\tilde{S}$.

Із (78) одержимо, що в $\Pi(T)$ правильна нерівність:

$$\| S[Sw_1](x,t) - S[Sw_2](x,t) \| \le \kappa \| S[w_1](x,t) - S[w_2](x,t) \| \le \kappa^2 \| w_1 - w_2 \|. \qquad (89)$$

З (77) та (88) отримуємо, що в $\Pi(T)$ справджується оцінка

$$\| S^1[\tilde{S}\tilde{w}_1](x,t) - S^1[\tilde{S}\tilde{w}_2](x,t) \| \le \tilde{b}_{13}(1 + \tilde{L}^S)T \| \tilde{S}[\tilde{w}_1](x,t) - \tilde{S}[\tilde{w}_2](x,t) \| + \\ +[(\Gamma^1 + F)\Lambda_2\Lambda_0^{-1}e^{H1} + \Lambda_0^{-1}F_2 e^{H1}] \| S[w_1](x,t) - S[w_2](x,t) \| + \\ + A_1^1\tilde{M}_1 T \| S[w_1](x,t) - S[w_2](x,t) \| + N_{55}2RT \| \tilde{S}[\tilde{w}_1](x,t) - \tilde{S}[\tilde{w}_2](x,t) \| +$$

$$
\begin{aligned}
&+(R_2+Q_2)\,\|S[w_1](x,t)-S[w_2](x,t)\|+N_{55}H^{-1}\,\|\tilde S[\tilde w_1](x,t)-\tilde S[\tilde w_2](x,t)\|\le\\
&\le \tilde b_{13}(1+\max\{1,\Lambda\}(\max\{A_1;A_1^1;\tilde b_4(1+\tilde L)\}+\tilde b_1)+F+L_t^{B}+N_{13})T(\kappa\rho+\\
&+\tilde b_{13}(1+\tilde L)T\tilde\rho+[(\Gamma^1+F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1}+\Lambda_0^{-1}F_2e^{H1}]\rho+A_1^1\tilde M_1T\rho+N_{55}2RT\tilde\rho+\\
&+(R_2+Q_2)\rho+N_{55}H^{-1}\rho)+[(\Gamma^1+F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1}+\Lambda_0^{-1}F_2e^{H1}]\kappa\rho+A_1\tilde M_1T\kappa\rho+\\
&+(N_{55}2RT+N_{55}H^{-1})(\kappa\rho+\tilde b_{13}(1+\tilde L)T\tilde\rho+[(\Gamma^1+F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1}+\Lambda_0^{-1}F_2e^{H1}]\rho+\\
&+A_1^1\tilde M_1T\rho+N_{55}2RT\tilde\rho+(R_2+Q_2)\rho+N_{55}H^{-1}\rho)+(R_2+Q_2)\kappa\rho\le\\
&\le[\{\tilde b_{13}(1+\max\{1,\Lambda\}(\max\{A_1;A_1^1;\tilde b_4(1+\tilde L)\}+\tilde b_1)+F+L_t^{B}+N_{13})T+\\
&+N_{55}2RT+N_{55}H^{-1}\}(\kappa+\tilde b_{13}(1+\tilde L)T+\tilde b_{14}+A_1^1\tilde M_1T+N_{55}2RT+R_2+Q_2+\\
&+N_{55}H^{-1})+\tilde b_{14}\kappa+A_1^1\tilde M_1T\kappa+(R_2+Q_2)\kappa]\tilde\rho, \qquad (90)
\end{aligned}
$$

де $\tilde b_{14}=(\Gamma^1+F)\Lambda_2\Lambda_0^{-2}e^{H1}+\Lambda_0^{-1}F_2e^{H1}$.

Отже, на підставі (89), (90), одержуємо, що у прямокутнику $\Pi(T)$ для $\tilde w_1,\tilde w_2\in \overset{o}{\mathrm{IE}}_2(T,\tilde L,P,P^1)$ виконується нерівність

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde S[\tilde S\tilde w_1](x,t)-\tilde S[\tilde S\tilde w_2](x,t)\|\le\\
&\le\max\{\kappa;[\{\tilde b_{13}(1+\max\{1,\Lambda\}(\max\{A_1;A_1^1;\tilde b_4(1+\tilde L)\}+\tilde b_1)+F+L_t^{B}+N_{13})T+\\
&+N_{55}2RT+N_{55}H^{-1}\}(\kappa+\tilde b_{13}(1+\tilde L)T+\tilde b_{14}+A_1^1\tilde M_1T+N_{55}2RT+R_2+Q_2+\\
&+N_{55}H^{-1})+\tilde b_{14}\kappa+A_1^1\tilde M_1T\kappa+(R_2+Q_2)\kappa]\}\tilde\rho. \qquad (91)
\end{aligned}
$$

З формули (91) остаточно отримуємо, що при достатньо малому $T>0$ та досить великому $H>0$ оператор $\tilde S\tilde S$ буде стиском. Лему 4 доведено.

Наслідок. Враховуючи умову **B**9, позначимо $h(p)=l\dfrac{pT_0^2}{2}e^{\frac{pT_0^2}{2}}$. Після цього замінимо в означенні множин D_j^0, D_j^l, D_j^c, а також в означенні норми v та v^1 всі входження добутку RT на $h(p)$. Вибрана норма, а також області D_j^0, D_j^l, D_j^c не будуть залежати від T. Тоді згідно з лемами 3, 4, при достатньо малих $T>0$, $p>0$ і достатньо великому $H>0$ оператор $\tilde S\tilde S$ буде стиском і, отже, система (1)-(3) має єдиний гладкий розв'язок для деякого $T=T^1$ та деякого $\tilde L=\tilde L(1)$.

Теорема. При зроблених припущеннях гладкий розв'язок задачі (1)-(8) існує та єдиний у всьому прямокутнику $\Pi(T_0)$ і, крім того, є неспадною функцією за аргументом x.

Доведення. Розв'язок задачі (1)-(3) у прямокутнику $\Pi(T_0)$ будуватимемо кроками за t. Якщо $T^1<T_0$, то переносимо початковий момент часу в

точку $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^1$, за початкову умову $\alpha(\boldsymbol{x})$ приймаємо значення розв'язку $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$, отриманого на попередньому кроці в точці $\boldsymbol{T}^1$ (роль константи Ліпшиця $\boldsymbol{A}_1$ буде відігравати величина $\boldsymbol{L}_1(1)$, а константи Ліпшиця $\boldsymbol{A}_1^1$ - величина $\boldsymbol{L}^1(1)$), а за $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{j}}(2)$ приймемо значення функції $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{w})$ при $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^1$. Застосовуючи описаний метод, одержимо розв'язок системи (25)-(28) для деяких $\boldsymbol{T}^2$, $\tilde{\boldsymbol{L}}(2)$ при тих самих $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}^1,\boldsymbol{P}_0^1$. Якщо $\boldsymbol{T}^1 + \boldsymbol{T}^2 < \boldsymbol{T}_0$, то виконуємо таку саму процедуру знову і т.д. Покажемо, що за таких припущень можна вибрати такі значення $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}$ і $\tilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{n})$, щоб ряд $\sum\limits_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}$ розбігався, а отже, тоді побудований розв'язок задачі (25)-(28) буде існувати для як завгодно великого $\boldsymbol{T}_0$.

Із проведених викладок отримуємо, що на $\boldsymbol{n}$-му кроці повинні виконуватися такі нерівності:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) < \delta;\boldsymbol{L}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} < 1;\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}\Lambda_1\Lambda < \Lambda_0;2\Lambda\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} < \mathbf{l};\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{n})\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} < 1;\kappa < 1;\\
[\{\tilde{\boldsymbol{b}}_{13}(1+\max\{1,\Lambda\}(\max\{\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}-1);\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}-1);\tilde{\boldsymbol{b}}_4(1+\tilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{n}))\}+\tilde{\boldsymbol{b}}_1)+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}}+\\
+\boldsymbol{N}_{13})\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{N}_{55}2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{N}_{55}\boldsymbol{H}^{-1}\}(\kappa+\tilde{\boldsymbol{b}}_{13}(1+\tilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{n}))\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}+\tilde{\boldsymbol{b}}_{14}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}-1)\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}+\\
+\boldsymbol{N}_{55}2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})+\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{N}_{55}\boldsymbol{H}^{-1})+\tilde{\boldsymbol{b}}_{14}\kappa+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}-1)\tilde{\boldsymbol{M}}_1\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}}\kappa+(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{Q}_2)\kappa] < 1;\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}) \ge \max\{\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}-1);\tilde{\boldsymbol{b}}_7\Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n})\}+\tilde{\boldsymbol{b}}_{12};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^1(\boldsymbol{n}) \ge \Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n})+\boldsymbol{N}_{13};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}) \ge \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}-1)+\Lambda_0^{-1}\Gamma_1+\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{T}_0+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}\Lambda_0^{-1}+\boldsymbol{Q};\\
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{n}) \ge \Lambda\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n})+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}};\\
\mathbf{l}\boldsymbol{Q}_2 < 1;\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{B}} = \frac{\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}+\mathbf{l}\boldsymbol{Q}_3}{1-\mathbf{l}\boldsymbol{Q}_2};\\
\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})+\max_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{H}^{-1} \le \boldsymbol{P};(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}-1)\Lambda+\Gamma_1+\boldsymbol{F})\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} \le \boldsymbol{P};\\
\boldsymbol{B}^1+\boldsymbol{R}\boldsymbol{Q}+2\boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\tilde{\boldsymbol{b}}_{15}+\tilde{\boldsymbol{b}}_{16}\boldsymbol{H}^{-1} \le \boldsymbol{P}^1;\\
(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}}^1(\boldsymbol{n}-1)\tilde{\boldsymbol{b}}_{17}+\tilde{\boldsymbol{b}}_{18}+\tilde{\boldsymbol{b}}'_{19}(1+\tilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{n})))\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{n}} \le \boldsymbol{P}^1,
\end{gathered}
\tag{92}
$$

де

$$
\begin{gathered}
\tilde{\boldsymbol{b}}_{17} = \Lambda+\Lambda^2\Lambda_0^{-1};\\
\tilde{\boldsymbol{b}}_{18} = \boldsymbol{A}^1\Lambda(1+\boldsymbol{m}\boldsymbol{P}_0^1+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})+\boldsymbol{F}^1+\boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{m}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n})+\boldsymbol{A}^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda(1+\boldsymbol{m}\boldsymbol{P}_0^1+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n});\\
\tilde{\boldsymbol{b}}_{15} = 1+\boldsymbol{m}(\boldsymbol{F}+\Lambda\boldsymbol{P}_0^1)+\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{H}\mathbf{l}};\ \tilde{\boldsymbol{b}}_{16} = (1+\boldsymbol{m}(\boldsymbol{F}+\Lambda\boldsymbol{P}_0^1))\max_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_0^1;\\
\tilde{\boldsymbol{b}}'_{19} = \Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1+\tilde{\boldsymbol{F}}_1)+\boldsymbol{A}^1\Lambda_0^{-1}\tilde{\Lambda}_1.
\end{gathered}
$$

Приймемо тепер

$$L_x(0) = A_1; L_x(n) = A_1 + n(\Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q) = A_1 + n\breve{b}_{19};$$
$$L_x^1(0) = A_1^1, \tag{93}$$

де $\breve{b}_{19} = \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + F_1T_0 + F_2 + F\Lambda_0^{-1} + Q$.

Оцінимо праву частину нерівності для $L_x^1(n)$, використовуючи (93)

$$\max\{L_x^1(n-1); \breve{b}_7\Lambda L_x(n)\} + \breve{b}_{12} = \max\{L_x^1(n-1); \breve{b}_7\Lambda(A_1 + n\breve{b}_{19})\} + \breve{b}_{12} =$$
$$= \max\{(\max\{L_x^1(n-2); \breve{b}_7\Lambda(A_1 + (n-1)\breve{b}_{19})\} + \breve{b}_{12}); \breve{b}_7\Lambda(A_1 + n\breve{b}_{19})\} + \breve{b}_{12} \le$$
$$\le \max\{\max\{L_x^1(n-2); \breve{b}_7\Lambda(A_1 + (n-1)\breve{b}_{19})\}; \breve{b}_7\Lambda(A_1 + n\breve{b}_{19})\} + 2\breve{b}_{12} \le$$
$$\le \max\{\max\{L_x^1(n-2); \breve{b}_7\breve{b}_{19}\Lambda(n-1)\}; \breve{b}_7\breve{b}_{19}\Lambda n\} + 2\breve{b}_7\Lambda A_1 + 2\breve{b}_{12} \le$$
$$\le \max\{L_x^1(n-2); \breve{b}_7\breve{b}_{19}\Lambda n\} + 2\breve{b}_7\Lambda A_1 + 2\breve{b}_{12} \le \mathrm{K} \le \max\{A_1^1; \breve{b}_7\breve{b}_{19}\Lambda n\} +$$
$$+ n\breve{b}_7\Lambda A_1 + n\breve{b}_{12} \le A_1^1 + n\breve{b}_{20}, \tag{94}$$

де $\breve{b}_{20} = \breve{b}_7\breve{b}_{19}\Lambda + \breve{b}_7\Lambda A_1 + \breve{b}_{12}$.

Тоді, враховуючи (94), приймемо

$$L_x^1(n) = A_1^1 + n\breve{b}_{20}. \tag{95}$$

На підставі нерівностей $\kappa < 1$, $T^n L(n) < 1$, $L^1(n)T^n < 1$ (звідси випливають нерівності $T^n L(n-1) < 1$, $L^1(n-1)T^n < 1$, оскільки $L(n) \ge L(n-1)$, $L^1(n) \ge L^1(n-1)$), з оцінок (92), (93), (95), а також вважаючи, що виконується нерівність $H^{-1} < \dfrac{1}{3Q_2}$, отримаємо

$$h(p) < \delta; L(n)T^n < 1; L^1(n)T^n < 1; T^n\Lambda_1\Lambda < \Lambda_0; 2\Lambda T^n < \mathbf{l}; \mathbf{l}Q_2 < 1;$$
$$\{\breve{b}_{13}(1 + \max\{1,\Lambda\}(\max\{L_x(n-1); L_x^1(n-1); \breve{b}_4(1 + \breve{L}(n))\} + \breve{b}_1) + F + L_t^{\mathrm{B}} +$$
$$+ N_{13})T^n + N_{55}2h(p) + N_{55}H^{-1}\}\breve{b}_{21} + \breve{b}_{22}\kappa < 1;$$
$$B + 2Qh(p) + \max_x M(x)P_0H^{-1} \le P; (L_x(n-1)\Lambda + \Gamma_1 + F)T^n \le P;$$
$$B^1 + RQ + 2Q^1h(p)\breve{b}_{15} + \breve{b}_{16}H^{-1} \le P^1;$$
$$(L_x^1(n-1)\breve{b}_{17} + \breve{b}_{18} + \breve{b}_{19}'(1 + \breve{L}(n)))T^n \le P^1, \tag{96}$$

де $$\breve{b}_{21} = 1 + \breve{b}_{13}(T_0 + 1) + \breve{b}_{14} + \breve{M}_1 + 2N_{55}\delta + R_2 + Q_2 + N_{55}\frac{1}{3Q_2};$$

$\breve{b}_{22} = \breve{b}_{14} + \breve{M}_1 + R_2 + Q_2$.

Вважаємо, що $h(p)$ і H можна вибрати так, щоб, крім нерівностей

$$h(p) < \delta; B + 2Qh(p) + \max_x M(x)P_0H^{-1} \le P,$$

$$2\boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{3}; \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{H}^{-1} < \frac{1}{3}, \tag{97}$$

виконувались також оцінки

$$\breve{\boldsymbol{b}}_{22}\kappa < \frac{1}{4}; \breve{\boldsymbol{b}}_{21}\boldsymbol{N}_{55}\boldsymbol{H}^{-1} < \frac{1}{4}; 2\breve{\boldsymbol{b}}_{21}\boldsymbol{N}_{55}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{4};$$
$$\boldsymbol{B}^1 + \boldsymbol{RQ} + 2\boldsymbol{Q}^1\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})\check{\boldsymbol{b}}_{15} + \check{\boldsymbol{b}}_{16}\boldsymbol{H}^{-1} \leq \boldsymbol{P}^1. \tag{98}$$

Для того, щоб справджувалась умова $\kappa < 1$, крім нерівності (97), необхідно вимагати виконання оцінки

$$\boldsymbol{T^n} < \frac{1}{3(\boldsymbol{c}_1 + \breve{\boldsymbol{M}}\Lambda_2(\boldsymbol{A}_1 + (\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{c}_2))}. \tag{99}$$

На підставі (93), (95) решта нерівностей з формули (96) матимуть вигляд

$$\boldsymbol{T^n} < \frac{1}{\max\{1,\Lambda\}(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{n}\breve{\boldsymbol{b}}_{19}) + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\text{B}}}; \boldsymbol{T^n} < \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1\Lambda}; \boldsymbol{T^n} < \frac{\mathbf{l}}{2\Lambda};$$
$$\boldsymbol{T^n} < \frac{1}{\max\{1,\Lambda\}(\boldsymbol{A}_1^1 + \boldsymbol{n}\breve{\boldsymbol{b}}_{20}) + \boldsymbol{N}_{13}}; \boldsymbol{T^n} \leq \frac{\boldsymbol{P}}{(\boldsymbol{A}_1 + (\boldsymbol{n}-1)\breve{\boldsymbol{b}}_{19})\Lambda + \Gamma_1 + \boldsymbol{F}};$$
$$\boldsymbol{T^n} \leq \boldsymbol{P}^1 / \Big[\check{\boldsymbol{b}}_{17}(\boldsymbol{A}_1^1 + (\boldsymbol{n}-1)\check{\boldsymbol{b}}_{20}) + \check{\boldsymbol{b}}_{18} + \check{\boldsymbol{b}}'_{19}(1 + \max\{1,\Lambda\}(\max\{\boldsymbol{A}_1;\boldsymbol{A}_1^1\} +$$
$$+\boldsymbol{n}(\check{\boldsymbol{b}}_{19} + \check{\boldsymbol{b}}_{20})) + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_{13} + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\text{B}})\Big];$$
$$\boldsymbol{T^n} < 1/\Big[4\check{\boldsymbol{b}}_{13}\check{\boldsymbol{b}}_{21}(1 + \max\{1,\Lambda\}(\max\{(\boldsymbol{A}_1 + (\boldsymbol{n}-1)\check{\boldsymbol{b}}_{19});(\boldsymbol{A}_1^1 + (\boldsymbol{n}-1)\check{\boldsymbol{b}}_{20});$$
$$[\check{\boldsymbol{b}}_4(1 + \max\{1,\Lambda\}(\max\{\boldsymbol{A}_1;\boldsymbol{A}_1^1\} + \boldsymbol{n}(\check{\boldsymbol{b}}_{19} + \check{\boldsymbol{b}}_{20})) + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_{13} + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\text{B}})]\} +$$
$$+\check{\boldsymbol{b}}_1) + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_{13} + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\text{B}})\Big]. \tag{100}$$

Отож, $\boldsymbol{T^n}$, враховуючи (99), (100), повинно задовольняти умови

$$\boldsymbol{T^n} \leq \frac{\check{\boldsymbol{b}}_{23}}{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^1 + \boldsymbol{n}\breve{\boldsymbol{b}}_{24} + \breve{\boldsymbol{b}}_{25}}; \ \boldsymbol{T^n} < \frac{1}{3(\boldsymbol{c}_1 + \breve{\boldsymbol{M}}\Lambda_2(\boldsymbol{A}_1 + (\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{c}_2))}, \tag{101}$$

де

$$\breve{\boldsymbol{b}}_{23} = \max\left\{\frac{\Lambda_0}{\Lambda_1\Lambda}; \frac{\mathbf{l}}{2\Lambda}; \frac{1}{\max\{1,\Lambda\}}; \frac{\boldsymbol{P}}{\Lambda}; \frac{\boldsymbol{P}^1}{\breve{\boldsymbol{b}}_{26}}; \frac{1}{\breve{\boldsymbol{b}}_{27}}\right\};$$
$$\breve{\boldsymbol{b}}_{24} = \max\left\{\frac{\check{\boldsymbol{b}}_{17}\check{\boldsymbol{b}}_{20} + \check{\boldsymbol{b}}'_{19}\max\{1,\Lambda\}(\check{\boldsymbol{b}}_{19} + \check{\boldsymbol{b}}_{20})}{\breve{\boldsymbol{b}}_{26}}; \breve{\boldsymbol{b}}_{19} + \breve{\boldsymbol{b}}_{20}\right\};$$
$$\check{\boldsymbol{b}}_{26} = \check{\boldsymbol{b}}_{17} + \check{\boldsymbol{b}}'_{19}\max\{1,\Lambda\};$$
$$\breve{\boldsymbol{b}}_{25} = \max\left\{\frac{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\text{B}}}{\max\{1,\Lambda\}}; \frac{\check{\boldsymbol{b}}'_{19}}{\max\{1,\Lambda\}}; \frac{\Gamma_1 + \boldsymbol{F}}{\Lambda} - \breve{\boldsymbol{b}}_{19};\right.$$

$$\frac{\hat{b}_{18} + \hat{b}_{19}' + F + N_{13} + L_t^{B} - \hat{b}_{17}\hat{b}_{20}}{\breve{b}_{26}};$$

$$\frac{4\hat{b}_{13}\hat{b}_{21}(1+\max\{1,\Lambda\}(\hat{b}_1 + (F + N_{13} + L_t^{B}))\max\{1,\hat{b}_4\}}{\breve{b}_{27}} + \frac{F + N_{13} + L_t^{B})}{\breve{b}_{27}}\Bigg\};$$

$$\breve{b}_{27} = \frac{1}{4\breve{b}_{13}\breve{b}_{21}(\max\{1,\Lambda\})^2\max\{1,\breve{b}_4\}}.$$

Отже, на підставі нерівностей (101) остаточно отримуємо, що замість T^n можна взяти величину

$$T^n = \frac{\hat{b}_{28}}{A_1 + A_1^1 + n\breve{b}_{29} + \breve{b}_{30}}, \qquad (102)$$

де $\breve{b}_{28} = \max\{\breve{b}_{23};\frac{1}{3\breve{M}\Lambda_2}\}$; $\hat{b}_{29} = \max\{\hat{b}_{24};c_2\}$; $\breve{b}_{30} = \max\{\breve{b}_{25};\frac{c_1}{\breve{M}\Lambda_2} - c_2\}$.

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{b}_{28}}{A_1 + A_1^1 + n\breve{b}_{29} + \breve{b}_{30}} = +\infty. \qquad (103)$$

Умова (103) гарантує існування побудованого розв'язку у всьому прямокутнику $\Pi(T_0)$. Глобальну єдиність розв'язку доводять аналогічно, як в [7,8]. Отож, теорему доведено.

---

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
2. *Верещагин И. К., Кокин С. М., Селезнев В. А.* Старение электролюминофоров // Известия АН СССР. Физика. – 1985. – 49, № 10. – С. 1940-1943.
3. *Trustrum K.* Rotating and stratified fluid flow // J. Fluid Mech. – 1964. – Vol. 19. – P. 415–432.
4. *Рейнер М.* Реология. М., 1965.
5. *Turo J.* Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations // Annales polonici mathematici. – 1991. – Vol. LII. – P. 231–238.
6. *Turo J.* Generalized solutions to functional partial differential equations of the first order // Zeszyty naukowe Politechniki Gdanskiej, Matymatyka. – 1988. – XIV, № 427. – P. 3–99.

7. *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2008. – 44, № 3. – С. 394–407.

8. *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой. // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – № 4. – С. 489–503.

9. *Bassanini P., Turo J.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). V. CLVI (1990). P. 211–230.

GLOBAL DIFFERENTIABLE SOLVABILITY OF THE HYPERBOLIC QUASILINEAR VALLEE-POUSSIN PROBLEM WITH FREE BOUNDARY

Volodymyr Kyrylych[1], Andrij Filimonov[2]

[1] *Ivan Franko Lviv National University, Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

[2] *Moscow State University of Railway Engineering, Obrazcova Str., 15 127994 Moscow, Russia*

By the methods of characteristics and contracted mappings, a global classical solvability of generalized Vallee-Poussin problem with unknown internal boundaries for degenerate quasilinear hyperbolic system of equations of the first order was established.

Key words: hyperbolic systems, method of characteristics, contracted mappings, Vallee-Poussin problem.

Для А. Філімонова робота підримана РФФД, ґрант №06-01-00356а.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.2008
Прийнята до друку 19.11.2008