ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.221-226 Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.221-226

УДК 517.956

СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ ЛІНІЇ РОЗРИВУ В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

Наталя БУРДЕЙНА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто коректну розв'язність нелінійної задачі з невідомою лінією розриву вихідних даних гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в криволінійному секторі. За допомогою методу характеристик і теореми Банаха про нерухому точку оператора одержано існування єдиного узагальненого розв'язку задачі.

Ключові слова: гіперболічна задача, квазілінійні рівняння, невідома лінія розриву, метод характеристик.

Математичне формулювання задач про визначення невідомої лінії контактого розриву гідродинамічних параметрів потоку рідини або газу, що є однією з основних проблем газодинаміки і теорії гідро- та аеропружності [1, 2] і зводиться до відшукання розв'язку задачі з невідомими межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку [3]. Під час вивчення руху рідин і газів природним є задання двох типів умов: зовнішніх та внутрішніх. Зокрема, зовнішні крайові умови, або умови на зовнішніх межах, описують вплив зовнішнього середовища на заданий об'єм газу (рідини) [4]. Внутрішні крайові умови – це умови на внутрішніх вільних межах між газами (рідинами), що мають різні властивості чи фізичні стани, або умови спряження на невідомій лінії контактного розриву [5].

Локальній, за часовою змінною, розв'язності задач з контактним розривом вихідних даних гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку присвячено праці [1,6]. Достатні умови існування і єдиності локального розв'язку таких задач у випадку, коли лінія контактного розриву невідома, одержано в [2, 5, 7].

Нехай $\boldsymbol{V_T} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < \boldsymbol{t} < \boldsymbol{T}, \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{t}) < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{a}_1(0) = \boldsymbol{a}_2(0) = 0\}$ – криволінійний сектор з рухомими межами $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_j}(\boldsymbol{t}) : [0,\boldsymbol{T}] \to \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{j} \in \{1,2\}$. Невідома лінія $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}) : [0,\boldsymbol{T}] \to \boldsymbol{R}$ розділяє область $\boldsymbol{V_T}$ на дві підобласті $\boldsymbol{V_T^{b-}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < \boldsymbol{t} < \boldsymbol{T}, \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{t}) < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{a}_1(0) = \boldsymbol{b}(0) = 0\}$ і $\boldsymbol{V_T^{b+}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 < \boldsymbol{t} < \boldsymbol{T}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t}) < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{a}_2(0) = \boldsymbol{b}(0) = 0\}$.

В області $\boldsymbol{V_T^{b-}}$ розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i^-}{\partial t} + \lambda_i^-(x,t,u^-)\frac{\partial u_i^-}{\partial x} = f_i^-(x,t,u^-), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

а в області V_T^{b+} – систему

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t} + \lambda_i^+(x,t,u^+)\frac{\partial u_i^+}{\partial x} = f_i^+(x,t,u^+), \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{2}$$

де

$u^-(x,t) = (u_1^-(x,t),\dots,u_n^-(x,t)) : \overline{V_T^{b-}} \to R^n$, $u^+(x,t) = (u_1^+(x,t),\dots,u_n^+(x,t)) : \overline{V_T^{b+}} \to R^n$ – шукані функції, а $\lambda_i^\pm(x,t,u) : R^{n+2} \to R$, $f_i^\pm(x,t,u) : R^{n+2} \to R$ – відомі функції.

Нехай поведінку функції $b(t)$ описує система диференціальних рівнянь

$$\frac{db}{dt} = h(b(t),t,u^\pm(b(t),t)), \tag{3}$$

де

$u^\pm(b(t),t) = (u^-(b(t),t),u^+(b(t),t)) : R \times [0,T] \to R^{2n}$, а $h(b(t),t,u^\pm) : R^{2n+2} \to R$ – відома функція.

Доповнимо системи (1)–(3) початковими умовами вигляду

$$b(0) = 0, \tag{4}$$

$$u^-(0,0) = u^+(0,0) = u^0, \tag{5}$$

де $u^0 = (u_1^0,\dots,u_n^0)$ – задане значення.

Припустимо, що на фіксованих межах областей V_T^{-b}, V_T^{b+} виконуються крайові умови

$$\begin{aligned} u_i^-(a_1(t),t) &= \beta_{i1}(b(t),t,\tilde{u}(a(t),t),\tilde{u}(b(t),t)), \quad i \in I_1, \\ u_i^+(a_2(t),t) &= \beta_{i2}(b(t),t,\tilde{u}(a(t),t),\tilde{u}(b(t),t)), \quad i \in I_2, \end{aligned} \tag{6}$$

а на вільній межі $x = b(t)$ – умови спряження

$$\begin{aligned} u_i^-(b(t),t) &= \gamma_i^-(b(t),t,\tilde{u}(a(t),t),\tilde{u}(b(t),t)), \quad i \in I_-, \\ u_i^+(b(t),t) &= \gamma_i^+(b(t),t,\tilde{u}(a(t),t),\tilde{u}(b(t),t)), \quad i \in I_+. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут

$I_1 = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^-(0,0,u^0) > a'_1(0)\}$; $I_2 = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^+(0,0,u^0) < a'_2(0)\}$;

$I_- = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^-(0,0,u^0) < h(0,0,u^0)\}$;

$I_+ = \{i \in \{1,\dots,n\} : \lambda_i^+(0,0,u^0) > h(0,0,u^0)\}$;

$J_- = \{1,\dots,n\} \setminus I_-$, $J_+ = \{1,\dots,n\} \setminus I_+$, $J_1 = \{1,\dots,n\} \setminus I_1$, $J_2 = \{1,\dots,n\} \setminus I_2$,

$$\hat{u}(a(t),t) = (\{u_j^-(a_1(t),t)\}_{j\in J_1}, \{u_j^+(a_2(t),t)\}_{j\in J_2}),$$
$$\tilde{u}(b,t) = (\tilde{u}^-(b,t), \tilde{u}^+(b,t)), \tilde{u}^- = (u_i^-), i \in J_-, \tilde{u}^+ = (u_i^+), i \in J_+,$$

причому $\beta_{ij}(b,t,\hat{u},\tilde{u}) : R^{k_1+k_2+k_-+k_++2} \to R$, $\gamma_i^{\pm}(s,t,\hat{u},\tilde{u}) : R^{k_1+k_2+k_-+k_++2} \to R$ – відомі функції, де k_-, k_+, k_1, k_2 – кількість елементів множин J_-, J_+, J_1, J_2, відповідно.

Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $i \in \{1,\dots,n\}$, $b(t) : [0,T] \to R$, $u^-(x,t) : \overline{V_T^{b-}} \to R^n$ – визначені функції, а $(x_0,t_0) \in \overline{V_T^{b-}}$. В припущенні, що $\lambda_i^-(x,t,u^-)$ задовольняють умову Ліпшиця за змінними x і u^-, розглянемо задачу Коші для визначення характеристик системи (1), тобто

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i^-(x,t,u^-(x,t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Розв'язок цієї задачі позначимо через $\varphi_i^-[u^-,b](t;x_0,t_0)$. Внаслідок цього отримаємо сім'ю функцій аргументу t з параметрами x_0,t_0, яка, відповідно, залежить від вибору функцій u^-,b, тобто сім'ю операторів.

Зазначимо, що розв'язок $\varphi_i^-[u^-,b](t;x_0,t_0)$ за фіксованих i,b,u^-,x_0,t_0 можна продовжити до перетину з межею області V_T^{b-}. Нехай

$$\chi_i^-[u^-,b](x_0,t_0) = \min\{t \in [0,t_0] : (\varphi_i^-[u^-,b](t;x_0,t_0),t) \in \overline{V_T^{b-}}\}.$$

Отже, функція $\varphi_i^-[u^-,b](t;x_0,t_0)$ буде визначена на відрізку $[\chi_i^-[u^-,b](x_0,t_0),t_0]$, причому $\chi_i^-[u^-,b](x_0,t_0)$ є сім'єю функціоналів з параметрами x_0,t_0.

Запишемо систему рівнянь (1) на характеристиках і проінтегруємо кожне рівняння системи в межах від $\chi_i^-[u^-,b](x_0,t_0)$ до t_0. У підсумку одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i^-(x,t) &= u_i^-(\varphi_i^-[u^-,b](\chi_i^-[u^-,b](x,t);x,t), \chi_i^-[u^-,b](x,t)) + \\ &+ \int_{\chi_i^-[u^-,b](x,t)}^{t} f_i^-(\varphi_i^-[u^-,b](\tau;x,t),\tau,u^-(\varphi_i^-[u^-,b](\tau;x,t),\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$
$$i \in \{1,\dots,n\}, \quad (x,t) \in \overline{V_T^{b-}}.$$

Зазначимо, що системи (1) та (8) еквівалентні в класі функцій $(u^-,b) : u^- \in [C^1(\overline{V_T^{b-}})]^n, b \in C[0,T]$, проте розв'язок останньої системи може бути, взагалі кажучи, не диференційовним.

Аналогічно виводимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^+(x,t) = u_i^+(\varphi_i^+[u^+,b](\chi_i^+[u^+,b](x,t);x,t),\chi_i^+[u^+,b](x,t)) +$$
$$+\int\limits_{\chi_i^+[u^+,b](x,t)}^{t} f_i^+(\varphi_i^+[u^+,b](\tau;x,t),\tau,u^+(\varphi_i^+[u^+,b](\tau;x,t),\tau))d\tau, \tag{9}$$
$$i\in\{1,\ldots,n\},\quad (x,t)\in\overline{V_T^{b+}},$$

що еквівалентна системі (2) в класі достатньо гладких функцій (u^+,b).

Означення. Локальним узагальненим ров'язком задачі (1)–(7), визначеним на відрізку $[0,T_0]$, називатимемо набір функцій $(u^-,u^+,b): u^-\in[Lip(\overline{V_{T_0}^{b-}})]^n, u^+\in[Lip(\overline{V_{T_0}^{b+}})]^n, b\in C^1[0,T_0], 0<T_0\le T$, який задовольняє системи (3), (8), (9), а також умови (4) – (7).

Теорема про локальну розв'язність задачі.

Нехай $U=\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}}|u_i^0|+1,\ \ B=|h(0,0,u^0)|+1.$

Визначимо такі множини:

$$V_{T,U}^1=\{(x,t,u)\in R^{n+2}: 0\le t\le T, a_1(t)\le x\le a_2(t), |u|\le U\},$$
$$V_{T,U,B}^2=\{(b,t,u^\pm)\in R^{2n+2}: 0\le t\le T, -Bt\le b\le Bt, |u^\pm|\le U\},$$
$$V_{T,U,B}^3=\{(b,t,\hat u,\tilde u)\in R^{k_1+k_2+k_-+k_++2}: 0\le t\le T, -Bt\le b\le Bt, |\hat u|\le U, |\tilde u|\le U\}.$$

Тут $|\cdot|$ – норма в просторі R^N в сенсі максимуму модулів.

Введемо також інші позначення

$$\Lambda=\max_{(x,t,u)\in V_{T,U}^1}|\lambda^\pm(x,t,u)|,\qquad F=\max_{(x,t,u)\in V_{T,U}^1}|f^\pm(x,t,u)|,$$
$$\delta=\frac{1}{2}\min_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{|\lambda_i^-(0,0,u^0)-a'_1(0)|, |\lambda_i^+(^0,0,u^0)-a'_2(0)|,$$
$$|\lambda_i^-(0,0,u^0)-h(0,0,u^0)|, |\lambda_i^+(0,0,u^0)-h(0,0,u^0)|\},$$

і нехай $\lambda_0, f_0, h_0, \beta_0, \gamma_0, a_0$ – сталі Ліпшиця функцій $\lambda_i^\pm, f_i^\pm, h, \beta_{ij}, \gamma_i^\pm, a_j$ за відповідними змінними.

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

$\lambda_i^-\in \mathrm{Lip}(V_{T,U}^1),\ \ \lambda_i^+\in\mathrm{Lip}(V_{T,U}^1),\ \ i\in\{1,\ldots,n\};$

$f_i^-\in C(V_{T,U}^1)\cap\mathrm{Lip}_{x,u}(V_{T,U}^1),\ \ f_i^+\in C(V_{T,U}^1)\cap\mathrm{Lip}_{x,u}(V_{T,U}^1),\ \ i\in\{1,\ldots,n\};$

1) $h\in\mathrm{Lip}(V_{T,U,B}^2)$;

2) $\beta_{ij}\in\mathrm{Lip}(V_{T,U,B}^3),\ \ j\in\{1,2\}, i\in I_j$;

3) $\gamma_i^-\in\mathrm{Lip}(V_{T,U,B}^3),\ \ i\in I_-,\quad \gamma_i^+\in\mathrm{Lip}(V_{T,U,B}^3),\ \ i\in I_+$;

4) $a_j\in C^1[0,T],\ \ a'_j\in\mathrm{Lip}[0,T],\ \ j\in\{1,2\}$;

5) $\delta>0$;

6) $8\boldsymbol{n}\max\{\beta_0, \gamma_0, 4\delta\boldsymbol{e}\beta_0(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{B} + 2\Lambda), 4\delta\boldsymbol{e}\gamma_0(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{B} + 2\Lambda)\} < 1;$

7) $\beta_{\boldsymbol{i}1}(0,0,\hat{\boldsymbol{u}}^0,\tilde{\boldsymbol{u}}^0) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^0,\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}_1,$

$\beta_{\boldsymbol{i}2}(0,0,\hat{\boldsymbol{u}}^0,\tilde{\boldsymbol{u}}^0) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^0,\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}_2, \gamma_{\boldsymbol{i}}^-(0,0,\hat{\boldsymbol{u}}^0,\tilde{\boldsymbol{u}}^0) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^0,\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}_-, \gamma_{\boldsymbol{i}}^+(0,0,\hat{\boldsymbol{u}}^0,\tilde{\boldsymbol{u}}^0) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^0,\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}_+,$

де $\hat{\boldsymbol{u}}^0 = (\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}}^0\}_{\boldsymbol{j}\in \boldsymbol{J}_1}, \{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}}^0\}_{\boldsymbol{j}\in \boldsymbol{J}_2}),\ \tilde{\boldsymbol{u}}^0 = (\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}}^0\}_{\boldsymbol{j}\in \boldsymbol{J}_-}, \{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{j}}^0\}_{\boldsymbol{j}\in \boldsymbol{J}_+})$ (умови погодження).

Тоді існує єдиний локальний узагальнений розв'язок задачі (1) – (7), який визначений на відрізку $[0,\boldsymbol{T}_0]$, де значення $\boldsymbol{T}_0$ задане вихідними даними задачі.

Доведення теореми проводять за методикою [8] шляхом введення метричного простору, елементи якого задовольняють певні обмеження та є розв'язками системи інтегро-функціональних рівнянь, еквівалентної до задачі (1)-(7). Відшукання узагальненого розв'язку сформульованої задачі зводиться до знаходження нерухомої точки оператора, визначеного правими частинами інтегро-функціональних рівнянь (8)-(9).

Зауваження. Глобальну розв'язність цієї задачі проводимо шляхом переходу до області, що є криволінійним чотирикутником з початковими умовами при $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}_0$ [9].

---

1. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко – М., 1978.

2. *Казаков К. Ю.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы / К. Ю. Казаков, С. Ф. Морозов// Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С.443–450.

3. *Андрусяк Р. В.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой /Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич, А. Д. Мышкис// Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 489–503.

4. *D'Acunto B.* On the piston problem in gasdynamics /*B. D'Acunto* // Mech. Res. Commun. – 1984. – Vol. 11, №6 – P. 401–407.

5. *Мельник Т. О.* Спряження розв'язків гіперболічного рівняння другого порядку вздовж невідомої границі / Т. О. Мельник // Доп. Ан УРСР. – 1980. – Сер. А, №12. – С. 10–12.

6. *Сидоренко А. Д.* Задача с контактным разрывом для системы трех квазилинейных уравнений / А. Д. Сидоренко// Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 3. – С. 504–511.

7. *Bassanini P.* Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations /

P. Bassanini, J. Turo //. Ann. math. pura appl. – 1990. – Vol. 156, № 4. – P. 211–230.

8. *Андрусяк Р. В.* Квазілінійна гіперболічна задача Стефана з нелокальними крайовими умовами/ Р.В. Андрусяк, Н.О. Бурдейна, В.М. Кирилич // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, №9. – С. 1173-1199.

9. *Кирилич В. М.* Деякі нелінійні задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / В. М. Кирилич // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 125-134.

СОПРЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВДОЛЬ НЕИЗВЕСТНОЙ ЛИНИИ РАЗРЫВА В КРИВОЛИНЕЙНОМ СЕКТОРЕ

Наталия БУРДЕЙНА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Рассмотрено корректную разрешимость нелинейной задачи с неизвестной линией разрыва исходных данных гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными в криволинейном секторе. С помощью метода характеристик и теоремы Банаха о неподвижной точке оператора получено существование единого обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическая задача, квазилинейное уравнение, неизвестная линия разрыва, метод характеристик.

THE CONJUGATION SOLUTIONS OF HYPERBOLIC PROBLEM FOR SYSTEM OF QUASI-LINEAR EQUATIONS ALONG UNKNOWN DISCONTINUITY LINE IN CURVILINEAR SECTOR

Natalya Burdeina

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

The nonlinear problem with unknown discontinuity line of initial data of the hyperbolic system of first-order quasi-linear equations with two independent variables in curvilinear sector are considered. Applying the method of characteristic and Banach Theorem the local solvability of problem is established.

Key words: hyperbolic problem, quasi-linear equations, free discontinuity line, method of characteristic.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.2010
Прийнята до друку 22.12.2010