ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 145–160
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 145–160

УДК 537.72

БАГАТОЧЛЕННА СТЕПЕНЕВА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Юлія СТЕЦЬ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vovylka@list.ru, m_m_sheremeta@list.ru

Знайдено умови на показники та коефіцієнти ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, при виконанні яких для логарифма максимального члена правильна асимптотична рівність $\ln\mu(\sigma) = T_1|\sigma|^{-\rho_1} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j|\sigma|^{-\rho_j} + (\tau + o(1))|\sigma|^{-\rho_n}, \quad \sigma \uparrow 0$, де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = \overline{2, n-1}, \quad \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad 0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1 \quad i \quad \dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, багаточленна асимптотика.

1. Вступ. Розглянемо ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

де (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$). Якщо абсциса абсолютної збіжності ряду (1) дорівнює $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$, то його зростання ототожнюють зі зростанням функції $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$. Важливу роль у дослідженні зв'язку між зростанням $M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів відіграє максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$. Дослідження зв'язків між зростанням $\ln\mu(\sigma, F)$ і поводженням у термінах двочленної асимтотики коефіцієнтів започатковано в [4], де зазначено необхідну та достатню умови на a_n, за якої у випадку цілих ($\sigma_a = +\infty$) рядів Діріхле $\ln\mu(\sigma, F)$ має двочленну показникову асимптотику вигляду $\ln\mu(\sigma, F) = T\exp\{\rho_1\sigma\} + (1 + o(1))\tau\exp\{\rho\sigma\}, \quad \sigma \to +\infty$, де $0 < \rho < \rho_1 < +\infty$, $T > 0$ і $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. О.М. Сумик подібну задачу розв'язала для двочленної степеневої асимптотики $\ln\mu(\sigma, F)$ для цілих рядів Діріхле і для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Загальну проблему про багаточленну показникову асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле розглянула О.М. Сумик [5]. Зокрема, було доведено, що для того, щоб $\ln\mu(\sigma, F) = \sum_{j=1}^{n-1} T_j\epsilon^{\rho_j\sigma} + (\tau + o(1))\epsilon^{\rho_n\sigma} \quad \sigma \to \infty$, де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$, $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leqslant -\frac{\lambda_n}{\rho_1} \ln \frac{\lambda_n}{\epsilon T_1 \rho_1} \sum_{j=1}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant -\frac{\lambda_{n_k}}{\rho_1} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{\epsilon T_1 \rho_1} + \sum_{j=1}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1}},$$

для всіх $k \geqslant k_0$ і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1 + \rho_n}{2\rho_1}}\right)$, $\quad k \to \infty$.

Мета нашої праці — дослідити, за яких умов на коефіцієнти a_n та показники λ_n ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності для його максимального члена правильна асимптотична рівність

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{2}$$

де $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$, $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Теорема 1. *Для того, щоб $\ln \mu(\sigma)$ мав багаточленну степеневу асимптотику вигляду (2) необхідно і достатньо, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leqslant T_1(\rho_1 + 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 + 1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1 + 1}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1 + 1}}; \tag{3}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geqslant k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant T_1(\rho_1 + 1) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 + 1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1 + 1}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1 + 1}} \tag{4}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n + \rho_1 + 2}{2(\rho_1 + 1)}}\right) \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Для доведення теореми будемо використовувати такі допоміжні результати.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega(0)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді функція Ψ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(-\infty, 0)$, а функція φ неперервно диференційована і зростає до 0 на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до 0 на $(-\infty, 0)$.

Лема 1 (**[1-2]**). *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$. Для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_0$.*

Лема 2 (**[2-3]**). *Для додатних чисел $a < b$ правильна нерівність $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$, де*

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt, \quad G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right).$$

Лема 3 (**[2]**). *Нехай $\Phi_j \in \Omega(0)$ $(j = 1, 2)$ і*

$$\Phi_1(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi_2(\sigma) \tag{6}$$

для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Тоді

$$\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) \tag{7}$$

для всіх $n \geqslant n_0$ та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k} \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{8}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t) dt\right). \tag{9}$$

Лема 4 (**[2]**). *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$ і $\ln |a_{n_k}| \leqslant -\lambda_{n_k} \Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geqslant k_0$ правильна нерівність*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geqslant \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)). \tag{10}$$

2. Асимптотика функції φ.

Отже, нехай $\Phi \in \Omega(0)$ — така функція, що

$$\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0, \tag{11}$$

де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$ і $\dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Для функції (11) асимптотику оберненої функції φ описує лема.

Лема 5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що виконується (11), то для функції φ при $x \to +\infty$ правильна така асимптотична рівність:*

$$\varphi(x) = -\left(\frac{x}{T_1 \rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1 (\rho_1 + 1)} \left(\frac{x}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_j - \rho_1 - 1}{\rho_1 + 1}} -$$

$$- \frac{\tau \rho_n (1 + o(1))}{T_1 \rho_1 (\rho_1 + 1)} \left(\frac{x}{T_1 \rho_1}\right)^{\frac{\rho_n - \rho_1 - 1}{\rho_1 + 1}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\Phi'(\sigma)=\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}}+\frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}},$$

то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}}+\frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}}=x. \tag{12}$$

Легко побачити, що розв'язок $\sigma=\sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}(1+o(1))=x \quad (x\to+\infty),$$

тому будемо шукати його у вигляді

$$|\sigma|=\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x), \tag{13}$$

де

$$\alpha=\alpha(x)=o(x^{-\frac{1}{\rho_1+1}}) \quad (x\to+\infty).$$

Підставляючи (13) в (12), отримаємо

$$\frac{T_1\rho_1}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_j+1}}+$$
$$\frac{\tau\rho_n}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\alpha(x)\right)^{\rho_n+1}}=x,$$

тобто

$$\frac{x}{\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_j+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_j+1}}+$$
$$+\frac{\tau\rho_n}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_n+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_n+1}}=x,$$

звідки

$$\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_1+1)}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_j+1)}+$$
$$+\frac{\tau\rho_n}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_n+1)}=1.$$

Звідси при $x \to +\infty$ отримуємо

$$1-(\rho_1+1)\alpha\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\Big(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\Big)+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\Big(1-(\rho_j+1)\alpha\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\Big(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\Big)\Big)+$$
$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}=1,$$

тобто

$$\alpha=\sum_{j=2}^{n-1}\Big(\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_jT_j(\rho_j+1)}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\alpha+$$
$$+O\Big(\alpha^2x^{\frac{\rho_j-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\Big)\Big)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\Big(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\Big),$$
$$x\to+\infty. \quad (14)$$

Оскільки $\alpha(x)x^{\frac{1}{\rho_1+1}}\to 0 \quad (x\to+\infty)$, то звідси

$$\alpha=\frac{\rho_2T_2(1+o(1))}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta, \quad (15)$$

де

$$\beta=\beta(x)=o(x^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}),\quad x\to+\infty,$$

і отже, з (14) отримуємо

$$\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta=$$
$$=\sum_{j=2}^{n-1}\Big(\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_jT_j(\rho_j+1)}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\times$$
$$\times\Big(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\Big)+O\Big(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\Big)\Big)+$$
$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\Big(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\Big),\quad x\to+\infty,$$

звідки легко випливає, що при $x\to+\infty$

$$\beta(x)=\sum_{j=3}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-(1+o(1))\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j(\rho_j+1)}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\Big(\frac{x}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j+\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right). \quad (16)$$

Оскільки $\rho_n > 2\rho_2-\rho_1$, то
$\rho_n-\rho_1-1 > 2(\rho_j-\rho_1)-1 > 3(\rho_j-\rho_1)-1 > ... > n(\rho_j-\rho_1)-1, \quad j=\overline{2,n-1}$
і з (16) отримуємо

$$\beta(x)=\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=3}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}, \quad x\to+\infty.$$

Тому з (13) і (15) випливає твердження леми 5. □

Використовуючи лему 5, знайдемо асимтотичні формули для $\Phi(\varphi(x))$ і $x\Psi(\varphi(x))$, де $\Psi(\sigma)=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$.

Лема 6. *Якщо функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *то при* $x\to+\infty$ *правильні такі асимптотичні рівності*

$$x\Psi(\varphi(x))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-$$
$$-(\tau+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \quad (17)$$

і

$$\Phi(\varphi(x))=T_1\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}. \quad (18)$$

Доведення. Оскільки $x\Psi(\varphi(x))=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+const$, то при $x\to+\infty$

$$x\Psi(\varphi(x))=-\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{-\frac{1}{\rho_1+1}}dt-$$
$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}dt-$$
$$-\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x}t^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}dt+const=$$
$$=-\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_1}x^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_j}x^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_n}x^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+const=$$
$$=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-(\tau+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}},$$

тобто отримуємо асимптотичну рівність (17).

Використовуючи рівність $\Phi(\varphi(x))=x\varphi(x)-x\Psi(\varphi(x))$, отримуємо асимптотичну рівність (18).

3. Асимптотична поведінка $G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)$ і $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$.

Нехай $0<t_k\uparrow+\infty \quad (k\to\infty)$ з означення $G_1(a,b,\Phi)$ і з огляду на (18) отримаємо

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt=$$
$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(T_1\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)\frac{dt}{t^2}=$$
$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(T_1\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{-\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+\right.$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_j-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+$$
$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_n-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt\right)=$$
$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left\{T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$\left.+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\right\},\quad k\to\infty.$$

Припустимо, що $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$. Тоді при $k\to\infty$ одержуємо

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\Bigg)=$$

$$=\frac{(1+\theta_k)}{\theta_k}\Bigg(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\Bigg). \quad (19)$$

□

Звідси легко випливають дві леми.

Лема 7. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності при $j\to\infty$*

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Лема 8. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності при $j\to\infty$*

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right).$$

Припустимо тепер, що $\theta_k\to 0 \quad (k\to\infty)$. Тоді з огляду на (19)

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$

$$\times\left(1-\left(1-\frac{\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$

$$\left(1-\left(1+\frac{(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)\right)+$$

$$+(\tau+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1-\left(1+\frac{(\rho_n-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1}+O(\theta_k^2)\right)\right)\Bigg)=$$

$$=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(1-\frac{(\rho_1+2)\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\Bigg(T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\Bigg(\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}+$$

$$+\frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2)\bigg)\bigg)-$$
$$-\frac{(\tau+o(1))(\rho_n-\rho_1-1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty.$$

Звідси випливає така лема.

Лема 9. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k\to 0\quad(k\to\infty)$. *Тоді при* $k\to\infty$

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)}{6(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1+1-\rho_n)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2).$$

Для того, щоб отримати асимптотичне поводження величини $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$ дослідимо спочатку поводження величини

$$\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt. \tag{20}$$

Як видно з доведення рівності (17), одержимо

$$|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}(T_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+\frac{(\tau+o(1))}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}.$$

Якщо $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$, то при $k\to\infty$ отримуємо

$$|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$
$$+\frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}. \tag{21}$$

Припустимо, що існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty \quad (j \to \infty)$. Для цієї послідовності з огляду на (21) при $j \to \infty$ одержимо

$$|\varkappa(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi)| = \frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} \theta_{k_j}^{-\frac{1}{\rho_1+1}}(1+o(1)),$$

оскільки

$$G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \Phi(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)) = \frac{T_1(1+o(1))}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi)|^{\rho_1}}, \quad k \to \infty,$$

то звідси легко отримуємо таку лему.

Лема 10. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \quad (j \to \infty).$$

Подібно доводиться така лема.

Лема 11. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності при $j \to \infty$*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = \\ = (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta}\right)^{-\rho_1}.$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$. Тоді з огляду на (19) отримаємо

$$|\varkappa(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi)| = \frac{\rho_1+1}{\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\theta_k - \frac{\rho_1\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3} + O(\theta_k^4) - 1\right) + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1+\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\theta_k - \right. \\ \left. - \frac{\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2} + O(\theta_k^3) - 1\right) + \frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}} \times \\ \times\left(1+\frac{\rho_n}{\rho_1+1}\theta_k + O(\theta_k^2) - 1\right) = \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} - \\ - \frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} + \frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} + O(\theta_k^3 t_k^{-\frac{1}{\rho_1+1}}) + \\ + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \\ \left. + O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}})\right) + \frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}} = \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)} + \right.$$

$$+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg),\quad k\to\infty. \quad (22)$$

Через $B(t_k,\theta_k)$ позначимо таку величину:

$$B(t_k,\theta_k)=-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Тому при $k\to\infty$

$$|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)| = \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right).$$

Оскільки $B(t_k,\theta_k)\to 0\quad (k\to\infty)$, то для $p>0$ з (22) отримуємо

$$\frac{1}{|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|^p}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}^{-p}=$$

$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1-pB(t_k,\theta_k)+\frac{p(p+1)}{2}B^2(t_k,\theta_k)+O\Big(B^3(t_k,\theta_k)\Big)+O(\theta_k^3)+\right.$$

$$\left.+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+\frac{p\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{p(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}-\right.$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{\theta_k^2}{4(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3)+$$

$$\left.+O(\theta_k t_k^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}})\right\},\quad k\to\infty,$$

а оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=$$

$$=\frac{T_1}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_j}}+\frac{\tau}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_n}}\quad (k\geqslant k_0),$$

то звідси одержуємо

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + \tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} -$$
$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + \frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - \frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \frac{\tau\rho_n}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} + O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3) +$$
$$+ O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2), \quad k\to\infty.$$

Отже, доведемо такий аналог леми 9.

Лема 12. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k \to 0 \quad (k\to\infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+5)}{24(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} +$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k +$$
$$+\frac{(\rho_1+1-\rho_n)(\tau+o(1))}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} + O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3) + O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2), \quad k\to\infty,$$

З лем 9 і 12 отримуємо таку лему.

Лема 13. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що виконується* (11), *а* $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) - G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 +$$
$$+ O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right), \quad k\to\infty,$$

Використовуючи леми 7 – 13, доведемо ще таку лему.

Лема 14. *Нехай*

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau-\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0,$$

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau+\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0.$$

Припустимо, що $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і для всіх* $k \geqslant k_0$

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \tag{23}$$

Тоді $\theta_k \to 0$ *і*

$$\theta_k^2 \leqslant \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - \dfrac{2\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}$, $\Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) =$ $= G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$, то з (23) отримаємо

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geqslant G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n}}. \tag{24}$$

Припустимо, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \infty \quad (j \to \infty)$, а для цієї послідовності за лемами 7 і 10 і з того, що $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\left(\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\right)^{\rho_n} \cdot \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \cdot \theta_k^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \quad (k \to \infty)$ одержимо

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \geqslant (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad j \to \infty,$$

що неможливо.

Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta (j \to \infty)$, а для цієї послідовності з огляду на леми 8 і 11 і асимптотику $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\left(\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\right)^{\rho_n} \cdot \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \cdot \left(\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}{\theta}\right)^{\rho_n} \quad (k \to \infty)$ правильна асимптотична нерівність

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geqslant$$
$$(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}, \quad j \to \infty,$$

звідки випливає, що

$$(\rho_1+1)\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geqslant \left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}.$$

Подібно, використовуючи нерівність $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) < G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$ і леми 7 та 10, отримаємо протилежну нерівність. Тому θ задовольняє рівняння

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{\theta^{\rho_1+1}}\left((1+\theta)^{\frac{1}{\rho_1+1}}-1\right)\left((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1\right)^{\rho_1} = \frac{\rho_1^{\rho_1}}{(\rho_1+1)^{\rho_1+1}}. \tag{25}$$

Легко перевірити, що $\theta = 0$ є розв'язком рівняння (25) і як зазначено в [6] це рівняння не має додатних коренів.

Отже, $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$ отримуємо, що $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n} = (1+o(1))\Big(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\Big)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}$ $(k \to \infty)$, а у цьому випадку з огляду на (24)

$$\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 \leqslant \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)$$

при $k \to \infty$. Тому

$$\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)} \leqslant 2\varepsilon\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) \quad (k \to \infty),$$

звідки випливає твердження леми 14. □

4. Доведення теореми 1. Почнемо з необхідності. З (2) випливає, що для кожного $\varepsilon \in (0, |\tau|)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$ отримаємо

$$\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}} \leqslant \ln\mu(\sigma, F) \leqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}},$$

тобто виконується умова (6) леми 3 з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}.$$

За цією лемою правильні нерівності (6)–(8). Але за лемою 6

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - \\ - (\tau+\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad n \to \infty,$$

$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - \\ - (\tau-\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

а за лемою 14 з нерівності (5) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 = \theta_k^2 \leqslant \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \leqslant 4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\varepsilon}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{-\rho_n-1}{2(\rho_1+1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}, \quad k\to\infty.$$

Завдяки довільності ε з цих співвідношень випливають співвідношення (3) – (5).

Доведемо достатність умов (3) – (5). Використовуючи лему 1 і лему 6, неважко довести, що з огляду на довільність ε з умови (3) випливає асимптотична нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \leqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{26}$$

Далі за лемою 4 і лемою 13 з нерівності (4) для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\geqslant k_0$ отримаємо

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) - G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)) = \Phi_1(\sigma) -$$
$$- \frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 + O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}), \quad k\to\infty,$$

де з огляду на умову (5)

$$\theta_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n-\rho_1}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k\to\infty.$$

Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k})\leqslant\sigma\leqslant\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k}\leqslant\Phi_1'(\sigma)\leqslant\lambda_{n_{k+1}}$ і з (5) матимемо

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) + o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_n}}\right), \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ , отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{27}$$

З (26) і (27) випливає (2). Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Умова $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$ у теоремі 1 є істотною. Для випадку $n=3$ це доведено в [7].

Зауваження 2. В [8] доведено, що для того, щоб для кожного абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Res < 0\}$ ряду Діріхле (1) зі заданою послідовністю показників (λ_n) співвідношення (2) було рівносильне співвідношенню

$$\ln\, M(\sigma,F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m}\frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{28}$$

необхідно і достатньо, щоб $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}})$ при $n\to\infty$. Об'єднуючи цей результат з теоремою 1, отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2} > \rho_2$, *а* $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}})$ *при* $n\to\infty$. *Тоді для того, щоб правильним було співвідношення* (28), *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 1.*

Література

1. *Шеремета М.Н.,* О производной ряда Дирихле / М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк // Сибирск. матем. журн. — 1998. — Т.39, N 1. — С. 206–223.
2. *Шеремета М.М.,* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / М.М. Шеремета, О.М. Сумик // Матем. студії. — 1999. — Т.11, N 1. — С. 41–47.
3. *Заболоцький М.В.,* Узагальнення теореми Ліндельофа / М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета // Укр. матем. журн. — 1998. — Т.50, N 9. — С. 1177–1192.
4. *Шеремета М.Н.* Двухчленная асимптотика целых рядов Дирихле / М.Н. Шеремета // Теория функцый, функц. анализ и их приложения — 1990. — Т.54. — С. 16–25.
5. *Sumyk O.M.* On n-member asymptotics for logarifm of the maximal term of entire Dirichlet series / O.M. Sumyk // Matem. Studii. — 2001. — Vol.15, N 2. — P. 200–208.
6. *Sumyk O.M.* A connection between the growth of Young conjugate functions / O.M. Sumyk // Nonlinear boundary problems. Sbornik nauch. trudov. — 2001. — Vol.11. — P. 197–201.
7. *Sheremeta M.M.,* On logarithm of maximal term of Dirichlet series converging in a half-plane: three term power asymptotics / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets // Matem. Studii. — 2014. — Vol.41, N 1. — P. 28–44.
8. *Sheremeta M.M. ,* Estimates of a sum of Dirichlet series / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Ukrainian Matem. visnyk. — 2013. — Vol.10. — P. 234–253.

Стаття: надійшла до редколегії 01.04.2015
доопрацьована 29.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

MANY-TERM POWER ASYMPTOTICS FOR LOGARITHM OF THE MAXIMAL TERM OF A DIRICHLET SERIES ABSOLUTE CONVERGENT IN THE HALFPLANE

Yuliya STETS, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska str., 1, Lviv, 79000
e-mail: vovylka@list.ru, m_m_sheremeta@list.ru

We have found conditions on exponents and coefficients of Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence, under which for logarithm of the maximal term the asymptotic equality $\ln\mu(\sigma) = T_1|\sigma|^{-\rho_1} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j|\sigma|^{-\rho_j} + (\tau+o(1))|\sigma|^{-\rho_n}$, $\sigma\uparrow 0$, where $T_1>0$ $T_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, j=\overline{2,n-1}$, $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0<\rho_n<...<\rho_2<\rho_1$ and $\dfrac{\rho_1+\rho_n}{2}>\rho_2$ is true.

Key words: Dirichlet series, maximal term, many-term asymptotics.