ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 183–191
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 183–191
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.183-191

УДК 519.86:336.77

ПРО КРИВУ ДОХІДНОСТІ ДЛЯ РИНКУ КРЕДИТІВ

А.Я. ВУС[1], І.А. ПРОКОПИШИН[2], Ю.Л. ТАБІН[3]

[1,2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007, Україна
[2]*Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. С.Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна
[3]*Акціонерне товариство "Кредобанк",*
вул. Сахарова, 78, м. Львів, 79026, Україна
[1]*andriy.vus@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0000-6676-7042*
[2]*ivan.prokopyshyn@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-2652-1245*
[3]*yuri.tabin@gmail.com, ORCID: 0009-0005-9717-0093*

Досліджена проблема визначення кривої дохідності для ринку кредитів. Дано формулювання задачі про визначення річної процентної ставки для класичного кредиту за спот-ставками, а також оберненої задачі про визначення часової структури спот-ставок за річною процентною ставкою для кредиту. Знайдено розв'язки сформульованих задач. Показано, що ставка для класичного кредиту знаходитися в межах спот-ставок. Доведено, що розв'язок задачі про знаходження кривої дохідності існує не завжди. Як приклад, засобами електронних таблиць побудована крива дохідності для іпотечних кредитів на вторинному ринку житла в Україні.

Ключові слова: класичні кредити, річна процентна ставка, крива дохідності, часова структура процентних ставок, іпотечні кредити.

1. Вступ

Для фінансових інструментів різних класів, зокрема облігацій, депозитів та кредитів, принципове значення мають криві дохідності спот, які визначаються процентними ставками спот для інвестування на t років ([1, 5]). Криві дохідності для ринку облігацій внутрішньої державної позики (ОВДП) публікує Національний банк України ([2]). Криву дохідності за депозитами фізичних осіб відображає Український індекс ставок за депозитами фізичних осіб (Ukrainian Index of Retail Deposit Rates, UIRD) [3].

2020 Mathematics Subject Classification: 91G30

Для кредитних операцій важливою є крива дохідності спот на ринку довготермінових кредитів. Її використовують для оцінки теперішньої вартості портфеля, а також для розрахунку процентних ставок за кредитами.

Тому питання моделювання кривої дохідності для ринку кредитів України є актуальним.

2. **Формулювання проблеми**

Розглянемо класичний план виплат за кредитом – рівними сумами по основному боргу плюс проценти на залишок ([1]). Для цієї схеми приймемо процентну ставку сталою, але різною для кредитів на різний термін. Введемо стандартні позначення:

n – термін кредиту у роках;

A_n – сума кредиту на n років;

$r_k = r\,(t_k\,)$ – часова структура річних процентних ставок спот, $k\ = 1,\ 2, .., n$;

$\mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) \in R^n$ – вектор процентних ставок спот;

i_n – стала річна процентна ставка, яку використовують для класичного кредиту терміном на n років;

C_{nk} – сума повернення за класичним кредитом в кінці періоду з номером k.

Зазначимо, що для класичного кредиту суму повернення в кінці періоду k визначають так ([1]):

$$C_{nk} = \frac{A_n}{n} + \frac{A_n}{n}\,(n-k+1)\,i_n. \tag{1}$$

Розмір кредиту повинен дорівнювати теперішній вартості виплат за кредитом, а з іншого боку – дисконтаваній за спот-ставками вартості цих виплат. Тому справджується рівності:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{nk}}{(1+i_n)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{nk}}{(1+r_k\,)^k}. \tag{2}$$

Введемо позначення для теперішньої вартості постійного та спадного ануїтетів постнумерандо тривалістю $n \geq 1$ років:

$$P(n,\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} (1+r_k)^{-k}, \tag{3}$$

$$D(n,\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(1+r_k)^{-k}. \tag{4}$$

Якщо спот-ставка стала ($r_k = r \geq 0, k = 1, 2, ..., n$), то отримаємо:

$$P(n,r) = \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-k} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}, \tag{5}$$

$$D(n,r) = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(1+r)^{-k} = \frac{nr-1+(1+r)^{-n}}{r^2}. \tag{6}$$

Зауважимо, що функції (5)–(6) є спадними за параметром r і зростаючими за параметром n та пов’язані рівністю:

$$P(n,r) + rD(n,r) = n. \tag{7}$$

З урахуванням (1) перепишемо рівності (2) так:

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + (n-k+1)\, i_n}{(1+i_n)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + (n-k+1)\, i_n}{(1+r_k)^k}. \tag{8}$$

Зазначимо, що перша рівність в силу (7) є тотожністю, яка виконується для будь-якого i_n.

Сформулюємо дві задачі.

Задача 1 (пряма задача). Як за відомою структурою процентних ставок $(r_1, r_2, .., r_n)$ знайти сталу ставку для класичного кредиту i_n?

Задача 2 (обернена задача). Відомі спот-ставки $r_1, r_2, .., r_{m-1}$, а також ставки $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Як знайти спот-ставки $r_m, r_{m+1}, r_{m+2}, .., r_n$?

3. **Розв'язування Задачі 1**

З другої рівності у (8) отримаємо рівняння

$$n = P(n, \mathbf{r}) + i_n D(n, \mathbf{r}), \tag{9}$$

з якого знаходимо невідоме i_n:

$$i_n = \frac{n - P(n, \mathbf{r})}{D(n, \mathbf{r})}. \tag{10}$$

Зауважимо, що вираз (10) є коректним, оскільки при $r_k \geq 0,\ k = 1, 2, .., n$, виконується рівність $i_n \geq 0$. Тому знаходження ставки класичного кредиту i_n за відомою структурою процентних ставок $r_1, r_2, .., r_n$ є простим.

Знайдемо оцінку цієї ставки за припущення, що ставки спот обмежені:

$$a_k \leq r_k \leq b_k,\ a_k = \min_{1 \leq i \leq k} r_i,\ a_k = \max_{1 \leq i \leq k} r_i,\ k = 1, 2, .., n. \tag{11}$$

Тоді виконуються нерівності:

$$n - P(n, a_n) \leq n - P(n, \mathbf{r}) \leq n - P(n, b_n),\ \ D(n, b_n) \leq D(n, \mathbf{r}) \leq D(n, a_n). \tag{12}$$

Тому, з урахуванням (6), для i_n отримаємо обмеження

$$a_n = \frac{n - P(n, a_n)}{D(n, a_n)} \leq i_n \leq \frac{n - P(n, b_n)}{D(n, b_n)} = b_n. \tag{13}$$

Отож, ставка класичного кредиту знаходиться в рамках обмежень для спот-ставок.

4. **Розв'язування Задачі 2**

З формули (10) легко бачити, що $r_1 = i_1$. Перетворимо другу рівність з (8) так:

$$\frac{1 + i_n}{(1 + r_n)^n} = n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + (n-k+1)\ i_n}{(1+r_k)^k} = V(n, \mathbf{r}). \tag{14}$$

З останнього рівняння отримаємо рекурентну формулу для невідомого r_n за відомими i_n та $r_1, r_2, .., r_{n-1}$ та початковою умовою $r_1 = i_1$:

$$r_n = \left(\frac{1 + i_n}{V(n, \mathbf{r})} \right)^{\frac{1}{n}} - 1,\ n = 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

З виразів (14) та (15) встановлюємо нерівності:

$$V(n,\mathbf{r}) > 0, \tag{16}$$

$$V(n,\mathbf{r}) \le 1 + i_n. \tag{17}$$

З цих нерівностей випливає, що за відомих величин $r_1, r_2, .., r_{n-1}$ процентна ставка i_n не може бути будь-якою. Загалом, можна стверджувати, що алгоритм послідовного визначення знаходження структури процентних ставок r_n за формулою (15) є простим, однак процентні ставки $i_1, i_2, .., i_n$ не можуть бути довільними.

Вивчимо поведінку $V(n,\mathbf{r})$ при великих n. Насамперед зауважимо, що за обмежень (11) виконуються нерівності

$$V(n,a_n) \le V(n,\mathbf{r}) \le V(n,b_n). \tag{18}$$

Проведемо дослідження функції $V(n,r),\ r \ge 0$. З урахуванням (5) та (6) її можна подати так:

$$V(n,r) = n - \frac{i_n}{r^2}\left(nr - 1 + (1-r)(1+r)^{-n+1}\right) - \frac{1}{r}\left(1 - (1+r)^{-n+1}\right). \tag{19}$$

При великих n справджується асимптотика

$$V(n,r) \sim \left(1 - \frac{i_n}{r}\right)n, \tag{20}$$

тому цілком можлива ситуація $V(n,b_n) \le 0$ або $V(n,a_n) > 1 + i_n$.

Отож, виникає проблема коректного розв'язування оберненої задачі за заданими $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Наприклад, якщо послідовність $i_1, i_2, \ldots, i_n$ задавати лінійно зростаючою $i_n = i_0 + \lambda n,\ \lambda > 0$, то при великих λn виникне ситуація $V(n,b) \le 0$. У випадку $i_n = i_0 - \lambda n$ – буде порушена умова (17).

Практичні розрахунки підтвердили зроблені теоретичні висновки. Так, для $i_m = 0.200 + 0.005m$ при $m = 10$ отримано $r_{10} = 0.446$, а при $m = 11$ умова (16) вже не виконується і r_{11} не визначається. У випадку спадної послідовності $i_m = 0.200 - 0.005m$ при $m = 27$ отримано $r_{27} = 0.003$, а при $m = 28$ порушується умова (17).

Дослідимо **Задачу 2** іншим способом. Насамперед подамо її у формі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Позначимо $d_k = (1+r_k)^{-k}$ – коефіцієнт (множник) дисконтування для моменту часу $t = k$. Очевидно, що виконуються нерівності

$$0 < d_k \le 1,\ k = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

Запишемо другу рівність з (8) для різних термінів n. Тоді прийдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} (1+i_1)d_1 = 1, \\ (1+2i_2)d_1 + (1+i_2)d_2 = 2, \\ \vdots \\ (1+ni_n)d_1 + \big(1+(n-1)i_n\big)d_2 + \cdots + (1+i_n)d_n = n. \end{cases} \tag{22}$$

Система рівнянь (22) пов'язує послідовності коефіцієнтів $i_1, i_2, \ldots, i_n$ та $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Знаходження процентних ставок $i_1, i_2, \ldots, i_n$ за коефіцієнтами $d_1, d_2, \ldots, d_n$ не має складнощів. Величину i_m легко визначити з рівняння з номером m:

$$i_m = \frac{m - \sum\limits_{k=1}^{m} d_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} (m-k+1)\, d_k}, \;\; m = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Якщо ж вважати послідовність $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – відомою, а послідовність $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – невідомою, тоді маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь трикутного вигляду (22) з нижньою трикутною матрицею A. Визначник цієї матриці не дорівнює нулю:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k) \neq 0. \tag{24}$$

Отож, в цьому випадку розв'язок системи рівнянь (22) існує і єдиний, однак він не обов'язково задовольняє умови (21). Його легко знайти методом послідовного визначення невідомих з трикутної системи. Отримаємо наступну рекурентну формулу, аналогічну (15):

$$(1 + i_m)\, d_m = m - \sum_{k=1}^{m-1} d_k \left(1 + (m-k+1)\, i_m\right), \; m = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Крива дохідності для ринку іпотечних кредитів класичного типу. Розглянуто задачу побудови кривої дохідності для іпотечних кредитів на купівлю житла на вторинному ринку України за даними [4]. Насамперед проведено аналіз іпотеки у 2025 році. На рис. 1 показана середня ефективна річна процентна ставка по кредитах на різний термін: 1, 5, 10, 15 років. Ставка для кредитів на 20 років практично співпадає з ставкою на 15 років, тому на рисунку не наводиться. Залежність ставки від терміну кредиту досліджували для 17.09.2025 року. Графік цієї залежності подано на рис. 2. Залежність добре апроксимується квадратичною функцією $0.00015128\, x^2 - 0.00579557 x + 0.23797190$ з коефіцієнтом детермінації $R^2 = 0.99150987$.

Для розрахунку кривої дохідності приймали, що річна процентна ставка за класичним кредитом приблизно дорівнює вказаній середній річній ефективній ставці. Результати розрахунків, отримані за формулою (15), подано на рис. 3. На ньому показано криву залежності річної процентної ставки за класичним кредитом від терміну та розраховану криву дохідності. На цьому рисунку також приведено криву дохідності для ОВДП на 16.09.2025 [3], перераховану на річні складні проценти та екстрапольовану до 20 років. Зауважимо, що при екстраполяції процентної ставки за кредитом вже до $n = 21$ при розрухунку спот-ставки r_{21} порушується умова (15).

Легко бачити, що побудована таким способом крива дохідності для кредитів приблизно узгоджується з кривою дохідності ОВДП лише для кредитів до 10 років. Тому також побудували теоретичну криву дохідності для кредитів зсувом кривої дохідності ОВДП та розрахували відповідні річні ставки за кредитами використовуючи формулу (10). Отримані результати подано на рис. 4.

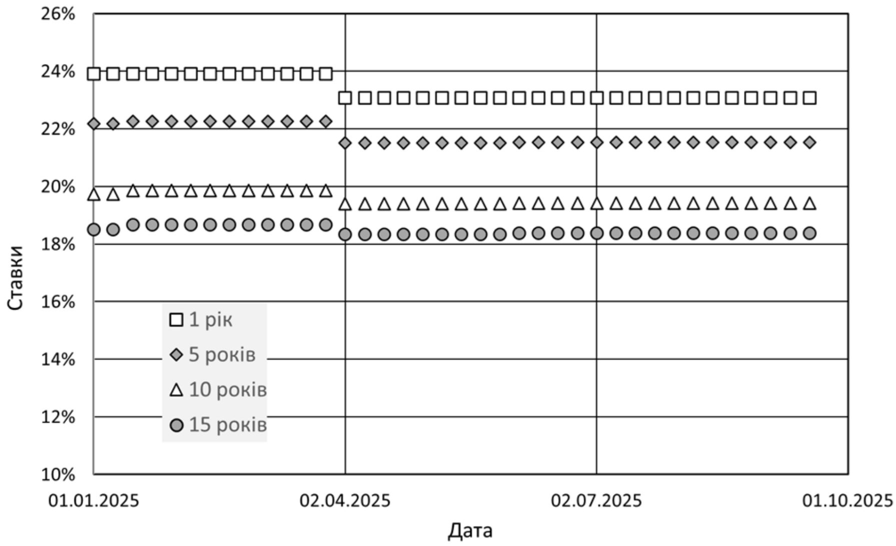

Рис. 1. Ефективні річні процентні ставки по іпотеці на вторинне житло

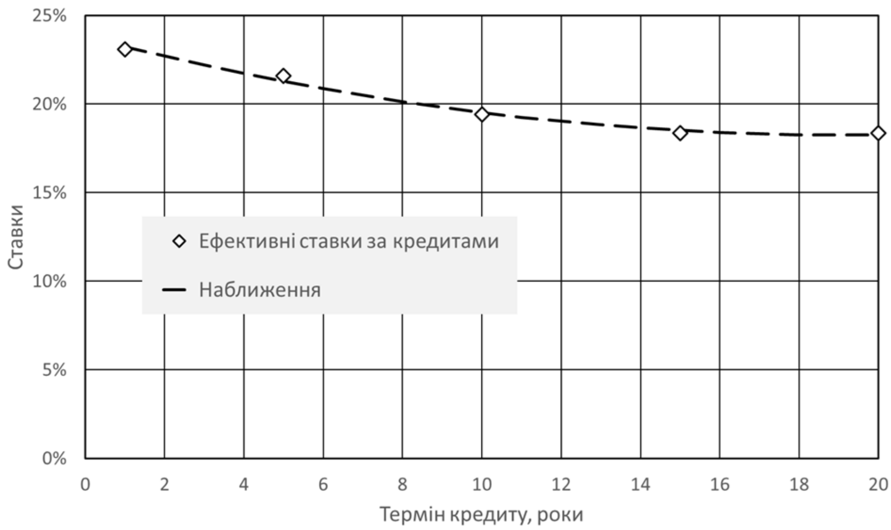

Рис. 2. Залежність ефективної ставки від терміну кредиту на 17.09.2025

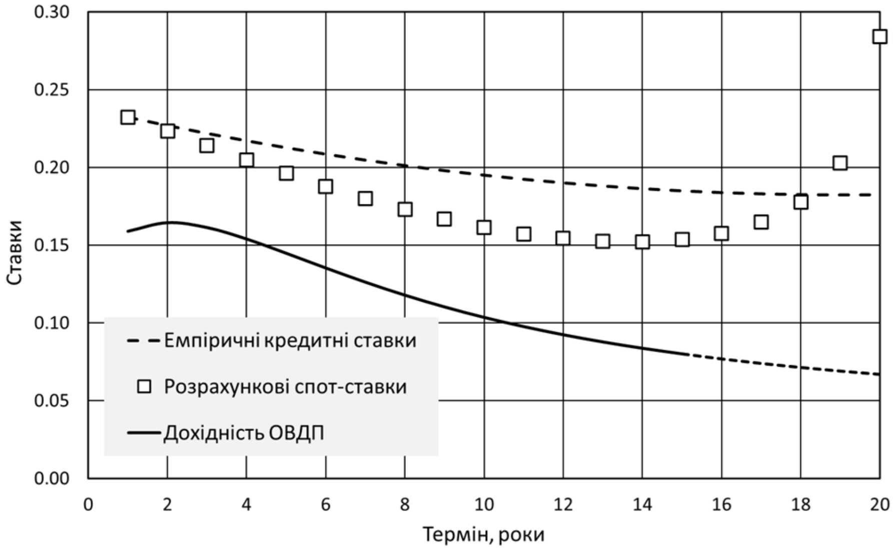

Рис. 3. Середні кредитні ставки та розрахована крива дохідності у порівнянні з кривою дохідності ОВДП

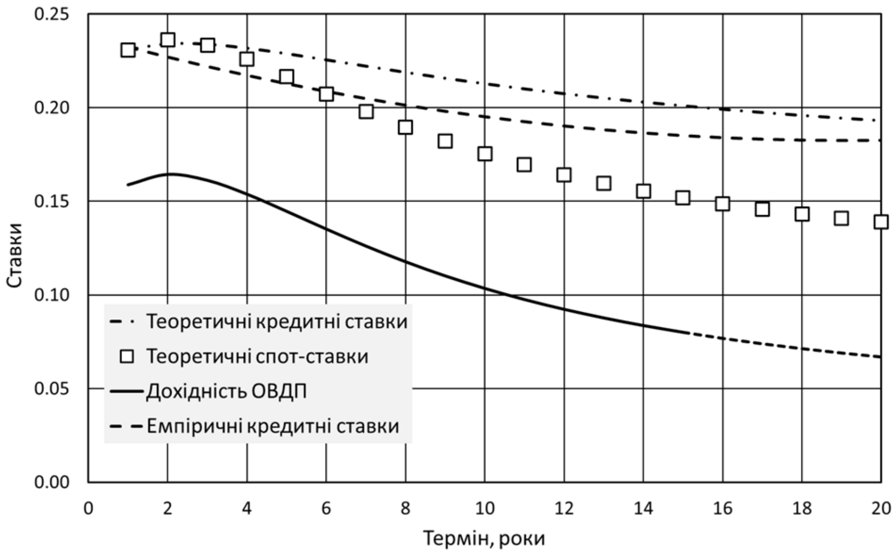

Рис. 4. Теоретичні спот-ставки та теоретичні річні процентні ставки для класичних кредитів

5. **Висновки**

У роботі показано, що задача розрахунку річних процентних ставок для класичного кредиту на основі теоретичної кривої дохідності завжди розв'язна, а процентна ставка знаходиться в межах спот-ставок. Для задачі розрахунку кривої дохідності за даними про річні кредитні ставки для кредитів класичного типу отримано рекурентну формулу. Доведено, що розв'язок цієї задачі може не існувати. Для ілюстрації, проведено розрахунки для іпотечних кредитів на ринку вторинного житла в Україні.

References

1. Заболоцький М.В., Прокопишин І.А. Основи фінансової математики: навч. посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2016. – 144 с.
2. Сайт Національного банку України. Криві ОВДП [Електронний ресурс]. https://bank.gov.ua/ua/markets/ovdp/fair-value.
3. Сайт Мінфін. Український індекс ставок за депозитами фізичних осіб [Електронний ресурс]. https://index.minfin.com.ua/ua/banks/deposit/index/.
4. Сайт Prostobank.ua. Середні ставки по іпотеці [Електронний ресурс]. https://www.prostobank.ua/servisy/mortgagecredit_average_rates.
5. Gibson R., Lhabitant F., Talay D. *Modeling the term structure of interest rates: A review of the literature*// Foundations and Trends in Finance. – 2010. – V.5, no.1–2. – 156 p. DOI: https://doi.org/10.1561/0500000032.

Стаття: вперше надійшла 01.08.2025
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

ABOUT THE YIELD CURVE FOR THE CREDIT MARKET

A.Ya. Vus[1], I.A. PROKOPYSHYN[2], Yu.L. TABIN[3]

[1,2]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska str, 1, Lviv, 79007, Ukraine
[2]*Lviv Polytechnic National University,*
S. Bandery str., 12, Lviv, 79013, Ukraine
[3]*Joint-Stock Company "KredoBank",*
78 Sakharova St., Lviv, 79026, Ukraine
[1]*andriy.vus@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0000-6676-7042*
[2]*ivan.prokopyshyn@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-2652-1245*
[3]*yuri.tabin@gmail.com, ORCID: 0009-0005-9717-0093*

The problem of determining the yield curve for the credit market is investigated. The formulation of the problem of determining the annual interest rate for a classic loan at spot rates is given, as well as the inverse problem of determining the time structure of spot rates at the annual interest rate for the loan. Solutions to the formulated problems are found. It is shown that the rate for a classic loan is within the range of spot rates. It is proved that the solution to the problem of finding the yield curve does not always exist. As an example, a yield curve for mortgage loans on the secondary housing market in Ukraine is constructed using spreadsheets.

Key words: classic loans, annual interest rate, yield curve, term structure of interest rates, mortgage loans.