ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 169–182
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 169–182
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.169-182

УДК 539.3

ЗГИН З РОЗТЯГОМ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА НАСКРІЗНИМИ РАДІАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Богдан СЛОБОДЯН, Роман СЕЛІВЕРСТОВ, Ігор ЯЦИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007, Україна,
e-mail: bohdan.slobodian@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0000-9086-4408
e-mail: roman.seliverstov@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1985-4431
e-mail: ihor.yatsyk@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0001-5035-1525

Розв'язано задачу про згин з розтягом круглої ізотропної пластини з двома радіальними тріщинами з урахуванням смугового контакту їхніх берегів. За допомогою теорії комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельним методом механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі.

Ключові слова: тріщина, згин, пластина, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

1. Вступ

Розв'язок задач згину пластин з тріщинами з урахуванням гладкого контакту їхніх берегів по лінії побудовано у працях [8, 9, 12]. У статті [1] експериментально підтверджено вплив контакту берегів тріщини на напружено-деформований стан пластини. Модель гладкого контакту берегів тріщин по області використовувалася в роботах [2,3,5,6,10,11]. У цій статті розв'язано задачу про згин круглої ізотропної пластини з двома радіальними прямолінійними наскрізними тріщинами з урахуванням гладкого контакту берегів тріщин по області сталої ширини по всій їхній довжині поблизу верхньої основи пластини.

2020 Mathematics Subject Classification: 74S70
© Б. Слободян, Р. Селіверстов, І. Яцик, 2026

2. **Формулювання задачі**

Розглянемо круглу ізотропну пластину радіуса R і товщини $2h$, на діаметрі якої розташовані дві наскрізні радіальні тріщини завдовжки $2l$ кожна, центри яких знаходяться по обидва боки від центру пластини. Виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ так, щоб початок координат O співпадав з центром пластини, а площина Oxy лежала в її серединній площині. У площині Oxy введемо полярну систему координат (R,θ) з полюсом в точці O і полярною віссю Ox. Нехай центри тріщин O_j розміщені на відстані x_{0j} від центру пластини, причому $x_{0j}+l<R$, $j=1,2$. У точках O_j виберемо початки декартових систем координат $O_jx_jy_j$, спрямувавши осі O_jx_j уздовж відповідних тріщин. Області ззовні та всередині пластини позначимо через S^+ і S^- відповідно, а також введемо такі позначення: L_j — лінія, на якій розміщена j-та тріщина; L — межа пластини; a_j і b_j — точки на осі O_jx_j, які співпадають з кінцями j-ої тріщини (див. рис. 1).

Нехай пластина згинається рівномірно розподіленими на L моментом M_0 і навантаженням P, під дією яких береги кожної тріщини контактують по області сталої ширини $h_j(j=1,2)$ біля верхньої основи пластини.

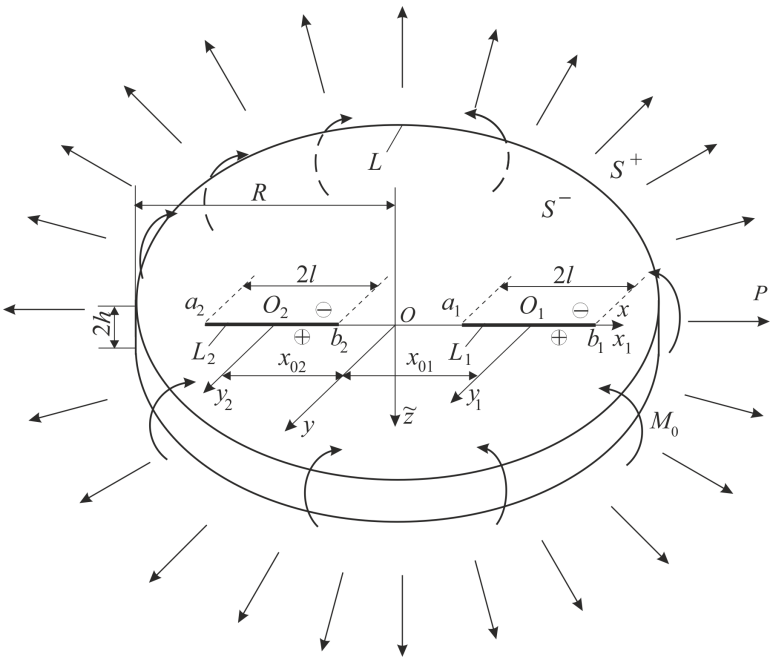

Рис. 1. Схема навантаження круглої пластини з двома радіальними тріщинами.

Оскільки береги тріщин контактують, розв'язок задачі визначатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків двох взаємопов'язаних задач — плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (теорія Кірхгофа-Лява) — за таких граничних умов:

– на межі пластини:

$$M_r = M_0,\ x \in L; \tag{1}$$

$$P_r = 0,\ x \in L; \tag{2}$$

$$\sigma_r = 0,\ x \in L; \tag{3}$$

$$\sigma_{r\theta} = 0,\ x \in L; \tag{4}$$

– для тріщин ([3]):

$$P^+ = P^- = 0,\ x_j \in L_j,\ j = 1,2; \tag{5}$$

$$M^+_{y_j} = M^-_{y_j} \equiv M_{y_j},\ x_j \in L_j,\ j = 1,2; \tag{6}$$

$$\sigma^+_{x_j y_j} = \sigma^-_{x_j y_j} = 0,\ x_j \in L_j,\ j = 1,2; \tag{7}$$

$$\sigma^+_{y_j y_j} = \sigma^-_{y_j y_j} \equiv \sigma_{y_j y_j},\ x_j \in L_j,\ j = 1,2; \tag{8}$$

$$M_{y_j} = -2\delta_j h^2 \sigma_{y_j y_j},\ \delta_j = 1 - \frac{\gamma_j}{3},\ \gamma_j = \frac{h_j}{h},\ x_j \in L_j,\ j = 1,2; \tag{9}$$

$$\frac{\partial [v_\Pi]}{\partial x_j} + \alpha_j h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial y_j}\right] = 0,\ \alpha_j = \frac{1}{2}\left(1 + (1-\gamma_j)^2\right),\ x_j \in L_j,\ j = 1,2, \tag{10}$$

де $\sigma_{x_j y_j}$, $\sigma_{y_j y_j}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ — компоненти тензора напружень відповідно в j-ій декартовій та полярній системі координат з початком у точці O; v_Π — проєкція вектора переміщення точки на вісь $O_j y_j$ у плоскій задачі, w — прогин пластини у задачі згину; M_r і M_{y_j} — згинальні моменти; $P^\pm$ і P_r — узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили у декартовій та полярній системах координат відповідно; $[f] = f^+ - f^-$, знаками "+" і "−" позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до j-ої тріщини при $y_j \to \pm 0$.

3. Розв'язок задачі

Розв'яжемо задачу згину пластини, використовуючи теорію згину пластини Кірхгофа-Лява. Для цього введемо у розгляд комплексні потенціали [2]:

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2),\\ \Psi(z) = \Psi_K(z) + \Psi_1(z_1) - x_{01}\Phi_1'(z_1) + \Psi_2(z_2) + x_{02}\Phi_2'(z_2),\end{gathered} \tag{11}$$

де $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $z_j = z + (-1)^j x_{0j}$, $j = 1,2$.

Зауважимо, що функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Psi_j(z_j)$ є голоморфними ззовні j-ої тріщини, а для функції $\Phi_K(z)$ виконується

$$\Phi_K(z) = \begin{cases} A_0' + A_1' z + ...,\ z \to 0,\\ B_0' + B_1' z + ...,\ z \to \infty,\end{cases} \tag{12}$$

де $A_0' + \overline{B_0'} = 0,\ B_1' = 0$.

Введемо у розгляд функції ([2])

$$\Omega_j(z_j) = -\overline{\Phi_j}(z_j) - z_j \overline{\Phi_j'}(z_j) - \overline{\Psi_j}(z_j),\ j = 1,2,$$

а функцію $\Phi_K(z)$ аналітично продовжимо з області $z \in S^-$ в область $z \in S^+$:

$$\Phi_K(z) = -\overline{\Phi_K}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi_K'}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi_K}\left(\frac{R^2}{z}\right),\ z \in S^+.$$

Тоді напружено-деформований стан пластини визначимо за формулами [2]:

$$\Phi_K(z) - \frac{R^2}{z^2}\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi_K(z)} - \overline{z}\overline{\Phi'_K(z)}\right) + \\ + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \left(1 + \frac{\overline{z}}{z}\right)\left(\overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)}\right) + \\ + \frac{\overline{z}}{z}\left(\Omega_1(\overline{z_1}) + \Omega_2(\overline{z_2}) - (z_1 - \overline{z_1})\overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \overline{z_2})\overline{\Phi'_2(z_2)}\right) = \tilde{g}, \tag{13}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_K(z) + \frac{R^2}{z^2}\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi_K(z)} - \overline{z}\overline{\Phi'_K(z)}\right) + \\ + \tilde{\kappa}\left(\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\right) - \left(1 + \frac{\overline{z}}{z}\right)\left(\overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)}\right) - \\ - \frac{\overline{z}}{z}\left(\Omega_1(\overline{z_1}) + \Omega_2(\overline{z_2}) - (z_1 - \overline{z_1})\overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \overline{z_2})\overline{\Phi'_2(z_2)}\right) = \tilde{f}, \tag{14}$$

$$\Phi_m(z_m) - \Omega_m(\overline{z_m}) + (z_m - \overline{z_m})\,\overline{\Phi'_m(z_m)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{\overline{z}^2}\right)\overline{\Phi_K(z)} + \\ + z\overline{\Phi'_K(z)} + \frac{R^2}{\overline{z}^2}\left(\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right) - \overline{z}\overline{\Phi'_K(z)}\right) + \Phi_j(z_j) + z_m\overline{\Phi'_j(z_j)} + \\ + (z_{0m} - z_{0j})\,\Phi'_j(z_j) - \overline{z_j}\overline{\Phi'_j(z_j)} - \Omega_j(\overline{z_j}) = \partial_{x_m} g_m,\ m = 1,2,\ j = 3 - m, \tag{15}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_m(z_m) + \Omega_m(\overline{z_m}) - (z_m - \overline{z_m})\,\overline{\Phi'_m(z_m)} + \tilde{\kappa}\Phi_K(z) - \\ - \left(1 + \frac{R^2}{\overline{z}^2}\right)\overline{\Phi_K(z)} - z\overline{\Phi'_K(z)} - \frac{R^2}{\overline{z}^2}\left(\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right) - \overline{z}\overline{\Phi'_K(z)}\right) + \\ + \tilde{\kappa}\Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - z_m\overline{\Phi'_j(z_j)} - (z_{0m} - z_{0j})\,\Phi'_j(z_j) + \\ + \overline{\Phi_j(z_j)} + \overline{z_j}\overline{\Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(\overline{z_j}) = f_m,\ m = 1,2,\ j = 3 - m, \tag{16}$$

де $r = z\overline{z}$, $z_m = x_m + iy_m$, $\tilde{\kappa} = (3+\nu)/(1-\nu)$, $g_m = \partial_{x_m} w + i\partial_{y_m} w$, $z_{01} = x_{01}$, $z_{02} = -x_{02}$, $z_j = z_{0m} - z_{0j} + x_m$, $\tilde{f} = p\left(M_r + i\tilde{c}'_0 + iH_{r\theta} + i\int\limits_0^s N_n(s)ds\right)$, $p = -\frac{1}{D(1-\nu)}$, $f_m = p\left(M_{y_m} + i\tilde{c}'_m + iH_{x_m y_m} + i\int\limits_{-\infty}^t N_{y_m}(\tau)d\tau\right)$, $\tilde{g} = \frac{1}{iz}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]e^{i\theta}\right)$, $D = \frac{2Q}{3(1-\nu^2)}$, $Q = Eh^3$, E — модуль пружності, ν — коефіцієнт Пуассона.

Підставивши граничні умови (5) і (6) у (16), отримаємо задачі лінійного спряження

$$\left(\tilde{\kappa}\Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m)\right)^+ - \left(\tilde{\kappa}\Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m)\right)^- = 0,\ x_m \in L_m,\ m = 1,2,$$

розв'язавши які, отримаємо

$$\Omega_m(z_m) = \tilde{\kappa}\Phi_m(z_m),\ m = 1,2. \tag{17}$$

Додавши (15) і (16)

$$\Phi_m(z_m) + \tilde{\kappa}\Phi_m(z_m) + \Phi_K(z) + \tilde{\kappa}\Phi_K(z) = \frac{\partial g_m}{\partial x_m} + f_m,\ m = 1,2$$

і врахувавши граничні умови (5) і (6), матимемо:

$$\Phi_m^+(t) - \Phi_m^-(t) = y_m(t),\ t \in L,\ m = 1,2,\ y_m(x_m) = \frac{1}{1+\tilde{\kappa}}\left[\frac{\partial g_m}{\partial x_m}\right],$$

звідки

$$\Phi_m(z_m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-l}^{l} \frac{y_m(t)}{t - z_m}dt,\ m = 1,2. \tag{18}$$

З формули (14) та граничних умов (1) і (2) отримаємо:

$$\tilde{\kappa}\Phi_K^-(s) + \Phi_K^+(s) + \tilde{\kappa}\Phi_1(s - x_{01}) + \tilde{\kappa}\Phi_2(s + x_{02}) - \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right)\left(\overline{\Phi_1}\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2}\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right)\right) - \frac{R^2}{s^2}\left\{\Omega_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \Omega_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) - \left(s - \frac{R^2}{s}\right) \times \left(\overline{\Phi_1'}\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2'}\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right)\right)\right\} = -\frac{M_0}{D(1-\nu)},\ s \in L.$$

Введемо в розгляд функцію

$$F(z) = \begin{cases} -\Phi_K(z) - \tilde{\kappa}\Phi_1(z - x_{01}) - \tilde{\kappa}\Phi_2(z + x_{02}),\ z \in S^+, \\ \tilde{\kappa}\Phi_K(z) + \dfrac{M_0}{D(1-\nu)} - \left(1 + \dfrac{R^2}{z^2}\right)\left\{\overline{\Phi_1}\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2}\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right)\right\} - \\ \quad - \dfrac{R^2}{z^2}\left\{\Omega_1\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \Omega_2\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right) - \left(z - \dfrac{R^2}{z}\right) \times \right. \\ \quad \left. \times \left(\overline{\Phi_1'}\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2'}\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right)\right)\right\},\ z \in S^-, \end{cases} \tag{19}$$

для якої

$$F^+(s) - F^-(s) = 0,\ s \in L. \tag{20}$$

З урахуванням формули (12) розв'язок задачі лінійного спряження (20) матиме вигляд

$$F(z) = -B_0' = \frac{M_0}{D(1-\tilde{\kappa})(1-\nu)} + \frac{1}{2\pi R^2}\left(\int\limits_{-l}^{l} ty_1(t)dt + \int\limits_{-l}^{l} ty_2(t)dt\right). \tag{21}$$

Підставимо (21) у (19) і виразимо $\Phi_K(z)$:

$$\Phi_K(z) = \begin{cases} B_0' - \tilde{\kappa}\Phi_1(z - x_{01}) - \tilde{\kappa}\Phi_2(z + x_{02}),\ z \in S^+, \\ \dfrac{1}{\tilde{\kappa}}\left\{-B_0' + \dfrac{M_0}{D(1-\nu)} + \left(1 + \dfrac{R^2}{z^2}\right)\left\{\overline{\Phi_1}\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2}\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right)\right\} + \right. \\ \quad + \dfrac{R^2}{z^2}\left\{\Omega_1\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \Omega_2\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right) - \left(z - \dfrac{R^2}{z}\right) \times \right. \\ \quad \left.\left. \times \left(\overline{\Phi_1'}\left(\dfrac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_2'}\left(\dfrac{R^2}{z} + x_{02}\right)\right)\right\}\right\},\ z \in S^-, \end{cases} \tag{22}$$

З граничних умов (5), (6) та формули (16) отримаємо:

$$\tilde{\kappa}\Phi_m^+(x_m)+\tilde{\kappa}\Phi_m^-(x_m)+\tilde{\kappa}\Phi_K(z_{0m}+x_m)-\left(1+\frac{R^2}{(z_{0m}+x_m)^2}\right)\overline{\Phi_K(z_{0m}+x_m)}-$$
$$-\left(z_{0m}+x_m-\frac{R^2}{z_{0m}+x_m}\right)\overline{\Phi_K'(z_{0m}+x_m)}-\frac{R^2}{(z_{0m}+x_m)^2}\Phi_K\left(\frac{R^2}{z_{0m}+x_m}\right)+ \tag{23}$$
$$+\tilde{\kappa}\Phi_j(z_j)-x_m\overline{\Phi_j'(z_j)}-(z_{0m}-z_{0j})\overline{\Phi_j'(z_j)}+\overline{z_j}\overline{\Phi_j'(z_j)}+\tilde{\kappa}\Phi_j(\overline{z_j})=i\tilde{c}_m'+pM_{y_m},$$

де $z_j=x_{0m}-x_{0j}+x_m$, $z_{0m}=(-1)^{m+1}x_{0m}$, $x_m\in L_m$, $j=3-m$, $m=1,2$.

Якщо підставити (18) і (22) у (23), то для визначення невідомої функції $y_m(t)$ отримаємо два інтегральних рівняння, які в безрозмірних змінних матимуть такий вигляд:

$$\int_{-l}^{l}\left\{K_{mm}(\xi,\eta)Y_m(\eta)+L_{mm}(\xi,\eta)\overline{Y_m(\eta)}\right\}d\eta+$$
$$+\int_{-l}^{l}\left\{K_{mj}(\xi,\eta)Y_j(\eta)+L_{mj}(\xi,\eta)\overline{Y_j(\eta)}\right\}d\eta= \tag{24}$$
$$=i\tilde{c}_m'+qM_{y_m}/M_0+P_m(\xi),\ \xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m,$$

де

$$K_{mj}(\xi,\eta)=\begin{cases}\tilde{\kappa}/\{\pi i(\eta-\xi)\}+\tilde{K}_{mj}(\xi,\eta),\ m=j,\\ \tilde{\kappa}\lambda_j/\{\pi i(T_j-X_m)\}+\tilde{K}_{mj}(\xi,\eta),\ m\neq j,\end{cases}$$

$$\tilde{K}_{mj}(\xi,\eta)=\frac{\lambda_j}{2\pi i}\left\{\frac{X_m-T_j}{\tilde{\kappa}(T_jX_m-1)^2}-T_j+\frac{\tilde{\kappa}}{T_jX_m-1}(T_j-\tilde{\kappa}^2X_m)\ +\right.$$
$$+\frac{1}{\tilde{\kappa}(T_jX_m-1)}\left(\tilde{\kappa}^2T_j+T_j+\frac{2(X_m-T_j)}{T_jX_m-1}\right)+$$
$$\left.+\ \frac{T_j}{\tilde{\kappa}(T_jX_m-1)^2}\left(T_j^2-X_mT_j-\frac{2(X_m^2+2X_mT_j-T_j^2)}{T_jX_m-1}\right)\right\},$$

$$L_{mj}(\xi,\eta)=\frac{\lambda_j}{2\pi i(T_jX_m-1)}\left\{T_j-X_m+\frac{X_m-T_j+T_j^2(T_j-X_m)}{T_jX_m-1}\right\}-\frac{\lambda_jT_j}{2\pi i\tilde{\kappa}},$$

$P_m(\xi)=\dfrac{3}{2}(1+\nu)$, $x_j=l\xi$, $t=l\eta$, $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{l}{R}$, $q=-\dfrac{3}{2}(1+\nu)$, $T_j=\lambda_j\eta+(-1)^{j+1}\dfrac{x_{0j}}{R}$,

$X_j=\lambda_j\xi+(-1)^{j+1}x_{0j}$, $y_m(t)=M_0Y_m(\eta)/(Eh^3)$, $Y_m(\eta)=Y_{m1}(\eta)+iY_{m2}(\eta)$,

$Y_{m1}(t)$ і $Y_{m2}(t)$ — дійсні функції.

Систему рівнянь (24) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^{1}Y_m(\eta)d\eta=0,\ \int_{-1}^{1}\eta Y_{m1}(\eta)d\eta=0,\ m=1,2, \tag{25}$$

які виражають відповідно однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контура тріщини.

Розв'яжемо плоску задачу. Розглянемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [3] $\Phi_\Pi(z)$ і $\Psi_\Pi(z)$, з використанням яких можна визначити напружено-деформований стан пластини [2]:

$$\begin{gathered}\Phi_\Pi(z)=\Phi_{\Pi K}(z)+\Phi_{\Pi 1}(z_1)+\Phi_{\Pi 2}(z_2),\\ \Psi_\Pi(z)=\Psi_{\Pi K}(z)+\Psi_{\Pi 1}(z_1)-x_{01}\Phi'_{\Pi 1}(z_1)+\Psi_{\Pi 2}(z_2)+x_{02}\Phi'_{\Pi 2}(z_2),\end{gathered}\tag{26}$$

де функції $\Phi_{\Pi j}(z_j)$ і $\Psi_{\Pi j}(z_j)$ голоморфні ззовні j-ої тріщини.

Розглянемо функції [2]

$$\Omega_{\Pi j}(z_j)=\overline{\Phi_{\Pi j}}(z_j)+z_j\overline{\Phi'_{\Pi j}}(z_j)+\overline{\Psi_{\Pi j}}(z_j),\ j=1,2,$$
$$\Phi_{\Pi K}(z)=-\overline{\Phi_{\Pi K}}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi'_{\Pi K}}\left(\frac{R^2}{z}\right),\ z\in S^+.$$

З урахуванням попередніх формул та співвідношень (26) визначимо напружено-деформований стан пластини у плоскій задачі теорії пружності [2]:

$$\begin{gathered}\Phi_{\Pi K}(z)-\frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right)+\Phi_{\Pi 1}(z_1)+\\ +\Phi_{\Pi 2}(z_2)+\left(1+\frac{\overline{z}}{z}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)}+\overline{\Phi_{\Pi 2}(z_2)}\right)-\frac{\overline{z}}{z}\left(\Omega_{\Pi 1}(\overline{z_1})+\Omega_{\Pi 2}(\overline{z_2})\ +\right.\\ \left.+\ (z_1-\overline{z_1})\overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)}+(z_2-\overline{z_2})\overline{\Phi'_{\Pi 2}(z_2)}\right)=\sigma_{rr}-i\sigma_{r\theta},\end{gathered}\tag{27}$$

$$\begin{gathered}\kappa\Phi_{\Pi K}(z)+\frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right)+\kappa\Phi_{\Pi 1}(z_1)+\\ +\kappa\Phi_{\Pi 2}(z_2)-\left(1+\frac{\overline{z}}{z}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)}+\overline{\Phi_{\Pi 2}(z_2)}\right)+\frac{\overline{z}}{z}\left(\Omega_{\Pi 1}(\overline{z_1})+\Omega_{\Pi 2}(\overline{z_2})\ +\right.\\ \left.+\ (z_1-\overline{z_1})\overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)}+(z_2-\overline{z_2})\overline{\Phi'_{\Pi 2}(z_2)}\right)=\frac{2\mu}{iz}\cdot\frac{\partial(u+iv)}{\partial\theta},\end{gathered}\tag{28}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{\Pi m}(z_m)+\Omega_{\Pi m}(\overline{z_m})+(z_m-\overline{z_m})\overline{\Phi'_{\Pi m}(z_m)}+\Phi_{\Pi K}(z)+\left(1+\frac{R^2}{\overline{z}^2}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}+\\ +z\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}+\frac{R^2}{\overline{z}^2}\left(\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right)+\Phi_{\Pi j}(z_j)+\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}+\\ +z_m\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}+(z_{0m}-z_{0j})\Phi'_{\Pi j}(z_j)-\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}-z_j\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}+\\ +\Omega_{\Pi j}(\overline{z_j})=\sigma_{y_my_m}+i\sigma_{x_my_m},\ m=1,2,\ j=3-m,\end{gathered}\tag{29}$$

$$\begin{gathered}\kappa\Phi_{\Pi m}(z_m)-\Omega_{\Pi m}(\overline{z_m})-(z_m-\overline{z_m})\overline{\Phi'_{\Pi m}(z_m)}+\kappa\Phi_{\Pi K}(z)-\left(1+\frac{R^2}{\overline{z}^2}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-\\ -z\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}-\frac{R^2}{\overline{z}^2}\left(\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right)+\kappa\Phi_{\Pi j}(z_j)-\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}-\\ -z_m\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}-(z_{0m}-z_{0j})\Phi'_{\Pi j}(z_j)+\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}+z_j\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}-\\ -\Omega_{\Pi j}(\overline{z_j})=2\mu(u+iv)'_{x_m},\ m=1,2,\ j=3-m,\end{gathered}\tag{30}$$

де μ — модуль зсуву, $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$.

Зазначимо, що для функції $\Phi_{\Pi K}(z)$ виконуються співвідношення

$$\Phi_{\Pi K}(z) = \begin{cases} a_0' + a_1' z + ..., \ z \to 0, \\ b_0' + b_1' z + ..., \ z \to \infty, \end{cases} \tag{31}$$

та

$$a_0' + \overline{b_0'} = 0, \ b_1' = 0. \tag{32}$$

Підставивши граничні умови (7) і (8) у (29), одержимо задачу лінійного спряження

$$(\Phi_{\Pi m}(t) - \Omega_{\Pi m}(t))^+ - (\Phi_{\Pi m}(t) - \Omega_{\Pi m}(t))^- = 0, \ t \in L_m, \ m = 1, 2,$$

розв'язок якої:

$$\Phi_{\Pi m}(z) = \Omega_{\Pi m}(z), \ m = 1, 2. \tag{33}$$

Додамо (29) і (30):

$$(1+\kappa)\left(\Phi_{\Pi m}(z_m) + \Phi_{\Pi K}(z)\right) = \sigma_{\Pi y} - i\tau_{\Pi xy} + 2\mu \frac{\partial(u_\Pi + iv_\Pi)}{\partial x_m}, \ m = 1, 2.$$

Шляхом підстановки граничних умов (7) і (8) у попередню формулу отримаємо таку задачу лінійного спряження:

$$(1+\kappa)\left(\Phi^+_{\Pi m}(t) - \Phi^-_{\Pi m}(t)\right) = 2\mu \left[\frac{\partial(u_\Pi + iv_\Pi)}{\partial x_m}\right], \ t \in L_m, \ m = 1, 2.$$

Якщо ввести позначення

$$g_m'(t) = \frac{2\mu}{(1+\kappa)i}\left[\frac{\partial(u_\Pi + iv_\Pi)}{\partial x_m}\right], \ t \in L_m, \ m = 1, 2,$$

розв'язок задачі лінійного спряження матиме вигляд

$$\Phi_{\Pi m}(z_m) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l} \frac{g_m'(t)}{t - z_m} dt, \ m = 1, 2. \tag{34}$$

З формули (27) та граничних умов (3) і (4) одержимо

$$\begin{aligned} &\Phi^-_{\Pi K}(s) - \Phi^+_{\Pi K}(s) + \Phi_{\Pi 1}(s - x_{01}) + \Phi_{\Pi 2}(s + x_{02}) + \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right) \times \\ &\quad \times \left\{\overline{\Phi_{\Pi 1}}\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_{\Pi 2}}\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right)\right\} - \frac{R^2}{s^2} \times \\ &\times \left\{\Omega_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \Omega_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) + \left(s - \frac{R^2}{s}\right) \times \right. \\ &\left. \times \left(\overline{\Phi_{\Pi 1}'}\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \overline{\Phi_{\Pi 2}'}\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right)\right)\right\} = 0, \ s \in L. \end{aligned} \tag{35}$$

Нехай

$$F_{\Pi}(z)=\Phi_{\Pi K}(z)-\Phi_{\Pi 1}(z-x_{01})-\Phi_{\Pi 2}(z+x_{02}),\ z\in S^{+},$$
$$\begin{aligned}F_{\Pi}(z)=\Phi_{\Pi K}(z)+\sum_{j=1}^{M}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi 1}}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\overline{\Phi_{\Pi 2}}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)\right)-\\ -\frac{R^2}{z^2}\left\{\Omega_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\Omega_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)+\left(z-\frac{R^2}{z}\right)\times\right.\\ \left.\times\left(\overline{\Phi'_{\Pi 1}}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\overline{\Phi'_{\Pi 2}}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)\right)\right\},\ z\in S^{-}.\end{aligned}\tag{36}$$

Підставивши (36) у (35), отримаємо задачу лінійного спряження

$$F_{\Pi}^{+}(s)-F_{\Pi}^{-}(s)=0,\ s\in L,$$

розв'язок якої, з урахуванням (31) і (32), матиме вигляд

$$F_{\Pi}(z)=-\frac{P}{2}+\frac{1}{2\pi R^2}\left(\int\limits_{-l}^{l}tg_1'(t)dt+\int\limits_{-l}^{l}tg_2'(t)dt\right).$$

З формули (36) визначаємо функцію $\Phi_{\Pi K}(z)$ в областях $z\in S^{+}$ і $z\in S^{-}$:

$$\Phi_{\Pi K}(z)=-\frac{P}{2}+\frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{-l}^{l}t\left(g_1'(t)+g_2'(t)\right)dt+\Phi_{\Pi 1}(z-x_{01})+\Phi_{\Pi 2}(z+x_{02}),\ z\in S^{+},\tag{37}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\Pi K}(z)=-\frac{P}{2}+\frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{-l}^{l}t\left(g_1'(t)+g_2'(t)\right)dt-\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)\left(\overline{\Phi_{\Pi 1}}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\right.\\ \left.+\overline{\Phi_{\Pi 2}}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)\right)+\frac{R^2}{z^2}\left\{\Omega_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\Omega_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)+\right.\\ \left.+\left(z-\frac{R^2}{z}\right)\left(\overline{\Phi'_{\Pi 1}}\left(\frac{R^2}{z}-x_{01}\right)+\overline{\Phi'_{\Pi 2}}\left(\frac{R^2}{z}+x_{02}\right)\right)\right\},\ z\in S^{-}.\end{aligned}\tag{38}$$

Підставимо крайові умови (7), (8) у формулу (29):

$$\begin{aligned}\sigma_{y_m y_m}=\Phi_{\Pi m}^{+}(x_m)+\Phi_{\Pi m}^{-}(x_m)+\Phi_{\Pi K}(x_m+z_{0m})+\left(1+\frac{R^2}{(x_m+z_{0m})^2}\right)\times\\ \times\overline{\Phi_{\Pi K}(x_m+z_{0m})}+(x_m+z_{0m})\left(x_m+z_{0m}-\frac{R^2}{x_m+z_{0m}}\right)\times\\ \times\overline{\Phi'_{\Pi K}(x_m+z_{0m})}+\frac{R^2}{(x_m+z_{0m})^2}\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{x_m+z_{0m}}\right)+\Phi_{\Pi j}(z_j)+x_m\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}+\\ +(z_{0m}-z_{0j})\Phi'_{\Pi j}(z_j)-\overline{z_j}\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}+\Phi_{\Pi j}(\overline{z_j}),\ m=1,2,\ j=3-m.\end{aligned}\tag{39}$$

Підставивши вирази для функцій $\Phi_{\Pi m}(z)$ (34) та $\Phi_{\Pi K}(z)$ (37), (38) у (39), отримаємо два інтегральні рівняння для визначення невідомих функцій $g'_m(t)$, які в безрозмірних координатах набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mm}(\xi,\eta)G_m(\eta)+S_{mm}(\xi,\eta)\overline{G_m(\eta)}\right\}d\eta+\\&+\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\xi,\eta)G_j(\eta)+S_{mj}(\xi,\eta)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta=\\&=P^*+h^2\sigma_{y_my_m}/M_0,\ \xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m,\end{aligned}\tag{40}$$

де

$$R_{mj}(\xi,\eta)=\begin{cases}1/\{\pi i(\eta-\xi)\}+\tilde R_{mj}(\xi,\eta),\ m=j,\\ \lambda_j/\{\pi i(T_j-X_m)\}+\tilde R_{mj}(\xi,\eta),\ m\neq j,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\tilde R_{mj}(\xi,\eta)=\frac{\lambda_j}{2\pi i}\left\{\frac{X_m-T_j}{(T_jX_m-1)^2}+T_j+\frac{T_j-X_m}{T_jX_m-1}+\frac{1}{T_jX_m-1}\left(T_j+\frac{X_m-T_j}{T_jX_m-1}\right)+\right.\\\left.+\frac{T_j}{(T_jX_m-1)^2}\left(T_j^2-X_mT_j-\frac{2(X_m^2+2X_mT_j-T_j^2)}{T_jX_m-1}\right)\right\},\end{aligned}$$

$$S_{mj}(\xi,\eta)=\frac{\lambda_j}{2\pi i(T_jX_m-1)}\left\{T_j-X_m+\frac{X_m-T_j+T_j^2(T_j-X_m)}{T_jX_m-1}\right\}-\frac{\lambda_jT_j}{2\pi},$$

$$P^*=hP/M_0,\ g'_m(t)=M_0G_m(t)/h^2,\ G_m(t)=G_{m1}(t)+iG_{m2}(t),$$

$G_{m1}(t)$ і $G_{m2}(t)$ — дійсні функції.

З умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо

$$\int\limits_{-1}^{1}G_m(\eta)d\eta=0,\ m=1,2.\tag{41}$$

З граничної умови (9) та рівнянь (24) і (34) отримаємо

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left\{K_{mm}(\xi,\eta)Y_m(\eta)+L_{mm}(\xi,\eta)\overline{Y_m(\eta)}\right\}d\eta\ +\right.\\&\left.+\int\limits_{-1}^{1}\left\{K_{mj}(\xi,\eta)Y_j(\eta)+L_{mj}(\xi,\eta)\overline{Y_j(\eta)}\right\}d\eta\right\}=\tilde c'_m,\\&\xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m,\end{aligned}\tag{42}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left\{K_{mm}(\xi,\eta)Y_m(\eta)+L_{mm}(\xi,\eta)\overline{Y_m(\eta)}\right\}d\eta\ +\right.\\
&\left.+\int\limits_{-1}^{1}\left\{K_{mj}(\xi,\eta)Y_j(\eta)+L_{mj}(\xi,\eta)\overline{Y_j(\eta)}\right\}d\eta\right\}+\\
&+2\delta_m\tilde{p}\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mm}(\xi,\eta)G_m(\eta)+S_{mm}(\xi,\eta)\overline{G_m(\eta)}\right\}d\eta\ +\right.\\
&\left.+\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\xi,\eta)G_j(\eta)+S_{mj}(\xi,\eta)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta\right\}=P^*+P_m(\xi),\\
&\xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m,
\end{aligned}\tag{43}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mm}(\xi,\eta)G_m(\eta)+S_{mm}(\xi,\eta)\overline{G_m(\eta)}\right\}d\eta\ +\right.\\
&\left.+\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\xi,\eta)G_j(\eta)+S_{mj}(\xi,\eta)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta\right\}=0,\\
&\xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m.
\end{aligned}\tag{44}$$

З крайової умови (10)

$$G_{m1}(\eta)+\frac{\alpha_m(1+\tilde{\kappa})}{(1+\kappa)(1+\nu)}Y_{m2}(\eta)=0,\ \eta\in[-1,1],\ m=1,2.\tag{45}$$

Визначимо контактне зусилля N_m між берегами m-ої тріщини:

$$\begin{aligned}
&N_m^*(\xi)=\frac{hN_M(\xi)}{M_0}=-\frac{2h^2\sigma_{y_my_m}}{M_0}\ =\\
&=\ -2\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mm}(\xi,\eta)G_m(\eta)+S_{mm}(\xi,\eta)\overline{G_m(\eta)}\right\}d\eta\ +\right.\\
&\left.+\int\limits_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\xi,\eta)G_j(\eta)+S_{mj}(\xi,\eta)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta\right\},\ \xi\in[-1,1],\ m=1,2,\ j=3-m.
\end{aligned}\tag{46}$$

Отже, для визначення невідомих функцій $Y_m(\eta)$ і $G_m(\eta)$ отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь (24), (25), (41)–(46).

4. **Числовий аналіз**

Система сингулярних інтегральних рівнянь (24), (25), (41)–(46) розв'язана числовим методом механічних квадратур [4, 7]. Числовий аналіз проведений за таких значень параметрів задачі: $\nu=0.3$, $P^*=0$, $l=l_1=l_2$, $\lambda=l/R$, $x_{01}=x_{02}=x_0$, $X_0=x_0/R$, $\gamma_j=h_j/h=0.13$, $j=1,2$.

На рис. 2 наведено зведене контактне зусилля $N^*(\xi)$ при $\lambda = 0.2$. Криві 1, 2 і 3 побудовані для значень $X_0 = 0.3$, $X_0 = 0.5$ і $X_0 = 0.7$ відповідно. З рисунка видно, що при наближені тріщини до краю пластини контактне зусилля спадає, причому за обраних параметрів задачі воно у точці $a\,(\xi = -1)$ є більшим, ніж у точці $b\,(\xi = 1)$.

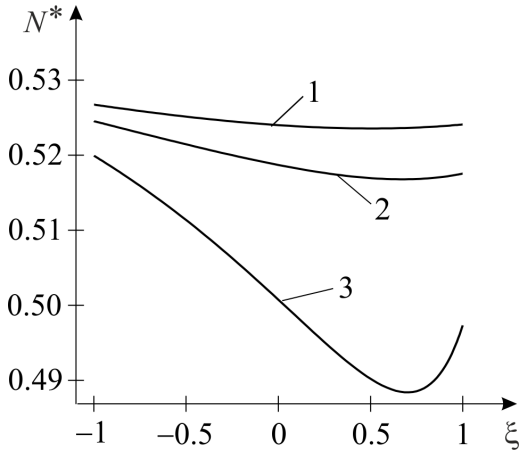

Рис. 2. Графік зведеного контактного зусилля при різних значеннях безрозмірної координати $X_0 = x_0/R$.

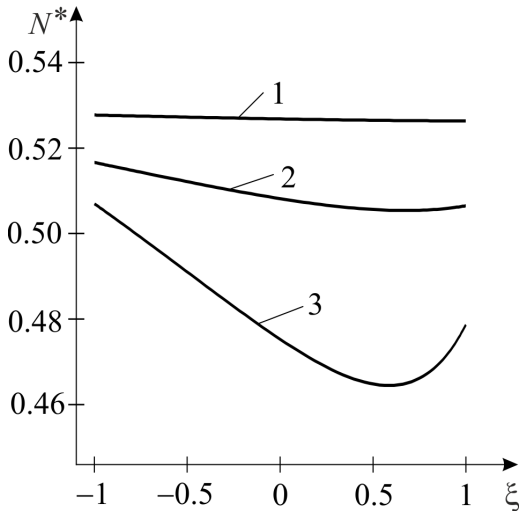

Рис. 3. Графік зведеного контактного зусилля при різних значеннях відносної довжини тріщини $\lambda = l/R$.

Рис. 3 демонструє зведене контактне зусилля $N^*(\xi)$ при $X_0 = 0.5$. Криві 1, 2 і 3 побудовані для значень $\lambda = l/R$ 0.1, 0.2 і 0.3 відповідно. За таких параметрів задачі при збільшенні відносної довжини тріщини λ контактне зусилля спадає.

5. **Висновки**

З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язано задачу про згин з розтягом круглої ізотропної пластини з двома радіальними наскрізними прямолінійними тріщинами, береги яких контактують по області сталої висоти. Граничні умови на межі пластини вдалося задовольнити аналітично. Розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числовим методом механічних квадратур. Побудовано графічні залежності контактного зусилля між берегами тріщин при різних параметрах задачі.

Список використаної літератури

1. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. *Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини.* Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: В 3-х т. / Під заг. ред. В.В. Панасюка. Львів: Каменяр, 1999. – Т.1. – С. 72–74.
2. Кундрат М.М., Гук Н.А., Козакова Н.Л., Острик В.І., Слободян М.С. та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
3. Опанасович В.К. *Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь*// Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
4. Саврук М.П., Зеленяк В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів: РАСТР, 2009, 212 с.
5. Слободян М.С., Звізло І.С., Білаш О.В., Смаль О.В. *Згин пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною всередині шайби за смугового контакту її берегів*// Computer Science and Applied Mathematics. – 2025. – Т.1. – 48–54. https://doi.org/10.26661/2786-6254- 2025-1-06
6. Слободян М., Мельничин А., Слободян Б., *Двосторонній згин пластини з абсолютно жорстким диском та двома радіальними тріщинами за смугового контакту їх берегів*// Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2025ю – Вип.97. – С. 133–147. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.133-147
7. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007, 716 с.
8. Шацький І.П. *Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами*// Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – Т.7. – С. 49–51.
9. Shatskyi I., Dalyak T. *Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending*// Procedia Structural Integrity. – 2018. – V.13. – P. 1476–1481. https://doi.org/10.1016/ j.prostr.2018.12.304
10. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. *Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges*// Vibroengineering Procedia. – 2024. – V.55. – P. 54–59. https://doi.org/10.21595/vp.2024.24515

11. Yatsyk I.M., Zvizlo I.S., Slobodian M.S. *Consideration of the width of crack faces contact zone under bending of a piecewise-homogeneous isotropic plate when assessing the stress-strain state in its tip*// Physicochemical Mechanics of Materials. – 2026. – V.62(1). – P. 112–119. https://doi.org/10.15407/pcmm2026.01.112
12. Young M., Sun C. *Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates*// International Journal of Fracture. – 1992. – V.55. – P. 81–93.

Стаття: вперше надійшла 05.01.2026
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

BENDING AND TENSION OF A CIRCULAR PLATE WITH TWO THROUGH RADIAL CRACKS FEATURING STRIP CONTACT OF THEIR FACES

Bohdan SLOBODIAN, Roman SELIVERSTOV, Igor YATSYK

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska Street, Lviv, 79007, Ukraine
e-mail: bohdan.slobodian@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0000-9086-4408
e-mail: roman.seliverstov@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1985-4431
e-mail: ihor.yatsyk@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0001-5035-1525

The problem of bending with tension of a circular isotropic plate with two radial cracks has been solved taking into account strip contact of the crack faces. Using the theory of complex potentials, the problem is reduced to a system of singular integral equations, which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the problem is carried out.

Key words: crack, bend, plate, contact, complex potentials, linear conjugation problems, contact force, intensity coefficients.