

УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ  
ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОГО СТАНУ  
БІМАТЕРІАЛЬНИХ СТРУКТУР ІЗ СИСТЕМОЮ ТОНКИХ  
ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА УМОВИ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО  
КОНТАКТУ ФАЗ**

**Андрій ВАСИЛИШИН, Іван ЗВІЗЛО**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007, Україна,  
e-mail: andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5703-6894  
e-mail: ivan.zvizlo@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0004-9804-6572*

У роботі розроблено комплексний підхід до розв'язання двовимірних задач термомагнітоелектропружності біматеріальних структур, з когерентним інтерфейсом високої теплопровідності, що містять тонкі, нахилені під кутом до межі поділу, включення. Математична модель ґрунтується на поєднанні розширеного формалізму Стро та методів теорії функцій комплексної змінної, що дозволяє врахувати взаємодію механічних, температурних, електричних та магнітних полів в анізотропних середовищах. На основі побудованих фундаментальних розв'язків отримано систему граничних інтегральних рівнянь типу Сомільяни, адаптовану для умов неідеального теплового контакту компонентів біматеріалу. Для чисельної реалізації запропоновано модифікований метод граничних елементів, який забезпечує високу точність обчислення градієнтів полів поблизу концентраторів напружень. Проведено детальний аналіз взаємодії між тонкими деформівними включеннями, що перетинають поверхню контакту під кутом. Розв'язано задачу для біматеріального тіла з двома включеннями. Досліджено вплив геометричних параметрів та фізичних властивостей включень на розподіл локальних полів, що має практичне значення для проектування та оцінки надійності багатофункціональних композитних пристроїв і сенсорів.

*Ключові слова:* Біматеріал, інтерфейс високої теплопровідності, тонке включення, комплексний потенціал, формалізм Стро, рівняння типу Сомільяни.

## 1. Вступ

У передових галузях виробництва, зокрема в точному приладобудуванні, спостерігається тенденція до широкого використання термомагнітоелектропружних матеріалів. Ці інтелектуальні композити отримують шляхом механічного поєднання сегнетоелектричних і магніострикційних фаз. Характерною особливістю таких структур є формування тонкого міжфазного шару на межі контакту компонентів. Навіть за умови високої якості механічного сполучення, тепловий контакт часто залишається неідеальним, і навіть дуже тонкий чужорідний прошарок може істотно впливати на температурні поля всередині структурно неоднорідного середовища. А це, у свою чергу, унаслідок теплового розширення та існування піроелектричного та піромагнітного ефектів може зумовити істотну концентрацію окремих фізико-механічних полів ([2]). Отже, постає наукова проблема розробки інтегральних математичних моделей та методів аналізу термомагнітоелектропружних тіл із біматеріалів, які можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано введені тонкі включення, що змінюють властивості цих тіл. Відповідно до [3, 7] розрізняють два види неідеального теплового контакту компонентів біматеріалу. Перший тип — слабка теплопровідність (інтерфейс Капіци, [7]) — характеризується стрибком температури, пропорційним до нормальної складової теплового потоку. Остання, при цьому, є неперервною функцією. Альтернативою є модель інтерфейсу високої теплопровідності. У межах цієї моделі температура при переході через межу контакту залишається неперервною функцією, тоді нормальна складова теплового потоку має стрибок, пропорційний градієнту температури.

На сьогоднішній день інтенсивно розвиваються методи . Ефективним методом аналізу взаємодії механічних, електричних та магнітних полів в анізотропних інтелектуальних матеріалах, з даним типом інтерфейсу, є підхід, заснований на методах теорії функцій комплексної змінної та формалізмі Стро. Так, у роботі [7] було отримано граничні інтегральні рівняння типу Сомільяни разом із явними виразами для ядер у замкненому вигляді для аналізу методом граничних елементів анізотропного термоелектропружного біматеріалу з отворами, тріщинами та тонкими включеннями. Цей підхід також було застосовано у [8] для біматеріального тіла з межею поділу типу Капіци. У роботі [9] отримано двовимірну функцію Гріна для анізотропних біматеріалів з недосконалим тепловим контактом та механічним контактом пружного типу (spring-type).

У цій роботі розроблено математичну модель термомагнітоелектропружного біматеріального тіла з інтерфейсом високої теплопровідності, у якому містяться два тонкі деформівні включення. Побудовано граничні інтегральні рівняння сформульованої задачі. Модифіковано метод граничних елементів, для швидкого і точного чисельного розв'язання отриманих рівнянь.

## 2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріальне термомагнітоелектропружне тіло  $S$  (рис. 1), утворене механічним поєднанням двох анізотропних термопружних півпросторів  $S_1$  та  $S_2$ , розділених у системі координат  $Ox_1x_2x_3$  поверхнею  $x_2$ . Тіло містить два тонких

включення  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  які перетинають межу поділу, і нахилені до неї під кутом  $\alpha$ . Відстань між серединами включень рівна  $2d$ , і вони розташовані симетрично відносно площини  $Ox_1x_3$ . Осі включень є паралельні до  $x_3$  і на їх поверхні задані механічні і теплові крайові умови, що не залежать від  $x_3$ . У такій постановці ми обмежимося аналізом температурного та термомагнетоелектропружного стану у довільному перерізі тіла, що перпендикулярний до осі  $x_3$ .

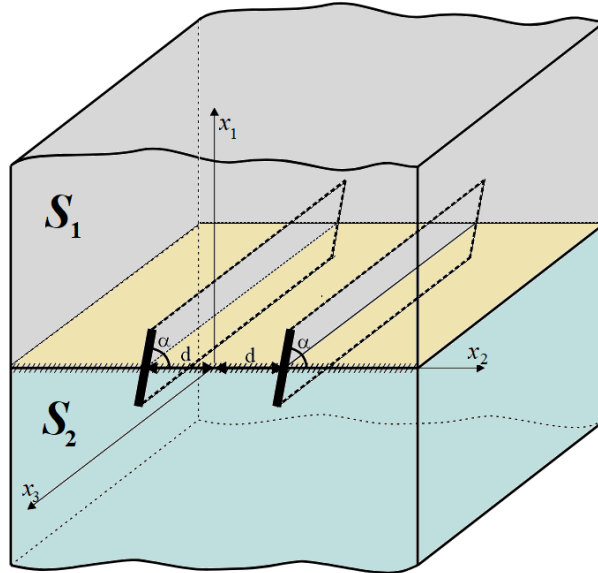


РИС. 1. Розрахункова схема біматеріального тіла з двома симетрично розташованими тонкими включеннями

Згідно з [3, 12] балансові рівняння для напружень, електричного зміщення, магнітної індукції, температури і теплового потоку, а також конститутивні співвідношення можна записати наступним чином:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,jm} + \tilde{f}_i = 0, \quad h_{i,i} - f_h = 0; \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,m} - \tilde{\beta}_{ij} \theta, \quad h_i = -k_{ij} \theta_{,j}. \quad (2)$$

Тут

$$\tilde{u}_i = u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi; \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = b_m; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j;$$

$$\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm}, \quad \tilde{C}_{ij5m} = h_{mij},$$

$$\tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \quad \tilde{C}_{4j5m} = -\gamma_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\gamma_{jm}; \quad \tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij},$$

$$\tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j, \quad \tilde{\beta}_{5j} = \nu_j \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3),$$

де  $\sigma_{ij}$  — компоненти тензора напружень;  $h_i$  — компоненти вектора густини теплового потоку;  $D_i$  — електричне зміщення;  $B_i$  — компоненти вектора магнітної індукції;

$f_i$  — об'ємні сили;  $q$  — густина вільних зарядів;  $f_h$  — густина розподілених джерел (стоків) тепла;  $u_i$  — переміщення точок тіла;  $\phi, \psi$  — електричний та магнітний потенціали;  $\theta$  — зміна температури порівняно з відліковою;  $C_{ijkl}$  — пружні сталі;  $k_{ij}$  — коефіцієнти теплопровідності;  $\beta_{ij}$  — коефіцієнти теплових напружень;  $e_{ijk}$  — п'єзоелектричні сталі;  $\kappa_{ij}$  — діелектричні сталі матеріалу;  $h_{ijk}$  — п'єзомагнітні сталі;  $\mu_{jm}, \gamma_{jm}$  — магнітна та електромагнітна проникності матеріалу;  $\chi_i$  — піроелектричні коефіцієнти;  $\nu_j$  — піромагнітні коефіцієнти.

Для знаходження розв'язків рівнянь (1) та (2) використаємо розширений формалізм Стро ([6, 13]), який є зручним підходом при розв'язанні двовимірних задач термо-, магніто- електропружності анізотропних тіл. Так для розв'язання задачі теплопровідності, і отримання виразів для температури  $\theta$  і теплового потоку  $\vartheta$

$$\theta = 2 \operatorname{Re}\{g'(z_t)\}, \vartheta = 2k_t \operatorname{Im}\{g'(z_t)\}, h_1 = -\vartheta_2, h_2 = \vartheta_1, k_r = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \quad (3)$$

вводиться комплексний температурний потенціал  $g(z_t)$

$$g'(z_t) = \frac{1}{2} \left( \theta + i \frac{\vartheta}{k_t} \right). \quad (4)$$

Щоб отримати вирази для розширених функцій напружень  $\tilde{\varphi}$  та переміщень  $\tilde{\mathbf{u}}$

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)], \tilde{\varphi} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)], \tilde{\sigma}_{i1} = -\varphi_{i,2}, \sigma'_{i2} = \varphi_{i,1}; \quad (5)$$

використовуватимемо  $\mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), F_4(z_4), F_5(z_5)]^T$  — вектор комплексних потенціалів Стро

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \varphi - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^t - \mathbf{A}^T \varphi^t, \quad \mathbf{u}^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}g(z_t)\}, \quad \varphi^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{d}g(z_t)\}. \quad (6)$$

На межі поділу виконуються умови неідеального теплового контакту у вигляді інтерфейсу високої теплопровідності

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} &= \vartheta(x_1) + \mu_0 \theta_{,1}(x_1), \\ \vartheta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} &= \vartheta(x_1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\theta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta(x_1), \quad \forall x_2 = 0. \quad (8)$$

Тут  $\mu_0 = 2h^{\text{int}}k_t^{\text{int}}$  — узагальнений коефіцієнт теплопровідності інтерфейсу;  $2h^{\text{int}}$  та  $k_t^{\text{int}}$  — це відповідно товщина та коефіцієнт теплопровідності шару.

Умови ідеального механічного контакту складових задюються наступним чином:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}(x_1), \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\varphi}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \tilde{\varphi}(x_1), \quad \forall x_2 = 0. \quad (10)$$

Індекси 1 і 2 використовуються для позначення величин полів, що діють у півпросторах  $S_1$  та  $S_2$  відповідно. Тонкий проміжний шар з розгляду вилучаємо.

Для побудови інтегральних формул комплексних потенціалів Стро використаємо інтегральну формулу Коші (11), яка окреслює зв'язок між значеннями аналітичної функції на межі області, зовні та всередині неї [14].

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \phi(z) & \forall z \in S, \\ 0 & \forall z \notin S. \end{cases} \quad (11)$$

Тут  $\tau, z \in \mathbb{C}$  є комплексними змінними, які характеризують розташування точок джерела і поля відповідно.

### 3. Розв'язок задачі теплопровідності

Задача теплопровідності є лінійною. Її розв'язок можна подати як суперпозицію однорідного ( $g_{1\infty}(z_t^{(1)})$  та  $g_{2\infty}(z_t^{(2)})$ ) та збуреного розв'язків. Запишемо формули Коші для складових біматеріалу наступним чином:

$$\forall \text{Im}(z_t^{(1)}) > 0, \quad g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1'(\tau_t^{(1)}) d\tau_t^{(1)}}{\tau_t^{(1)} - z_t^{(1)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(1)}}, \quad (12)$$

$$\forall \text{Im}(z_t^{(2)}) < 0, \quad g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_2'(\tau_t^{(2)}) d\tau_t^{(2)}}{\tau_t^{(2)} - z_t^{(2)}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2'(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(2)}}. \quad (13)$$

Використовуючи умови неідеального теплового контакту, вираз (4) можна записати:

$$g_1'(x_1) = \frac{1}{2} \left( \theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(1)}} \vartheta(x_1) + \frac{i\mu_0}{k_t^{(1)}} \theta_{,1}(x_1) \right); \quad (14)$$

$$g_2'(x_1) = \frac{1}{2} \left( \theta(x_1) + \frac{i}{k_t^{(2)}} \vartheta(x_1) \right). \quad (15)$$

Підставимо (14) і (15) відповідно у (12) і (13):

$$g_1'(z_t^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[ q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \bar{q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) - \frac{1}{\beta_1} \left( (1+K)\bar{e}_t^{(1)} + (1-K)e_t^{(2)} \right) \right], \quad (16)$$

$$g_2'(z_t^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[ q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \bar{q}_t^{(2)}(z_t^{(2)}) + \frac{1}{\beta_2} \left( (1+K)e_t^{(1)} - (1-K)\bar{e}_t^{(2)} \right) \right], \quad (17)$$

$$q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{g_i'(\tau_t^{(i)}) d\tau_t^{(i)}}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \quad \bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{\overline{g_i'(\tau_t^{(i)})} d\bar{\tau}_t^{(i)}}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}}. \quad (18)$$

$$K = \frac{k_t^{(1)} - k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}, \quad \frac{1}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}} = \frac{1+K}{2k_t^{(1)}} = \frac{1-K}{2k_t^{(2)}}; \quad (19)$$

$$\beta_1 = -\frac{i\mu_0(1+K)}{2k_t^{(1)}} = -\frac{i\mu_0(1-K)}{2k_t^{(2)}} = -\beta_2. \quad (20)$$

$$e_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} q_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}; \quad (21)$$

$$\bar{e}_t^{(k)}(\alpha_i; z_t^{(j)}) = e^{-\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \int e^{\frac{z_t^{(j)}}{\alpha_i}} \bar{q}_t^{(k)}(z_t^{(j)}) dz_t^{(j)}. \quad (22)$$

Таким чином отримано інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці  $\xi$  біматеріалу:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \left\{ g_1' \left( Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ g_2' \left( Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_2) \end{cases} = \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - \text{H}^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\xi); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} h_i(\xi) &= \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im} \left\{ \left( \delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)} \right) g_1'' \left( Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im} \left\{ \left( \delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)} \right) g_2'' \left( Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_2) \end{cases} = \\ &= \int_{\Gamma} \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \text{H}_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + h_i^\infty(\xi). \end{aligned} \quad (24)$$

Тут функції  $\theta^\infty(\xi)$  і  $h_i^\infty(\xi)$  є однорідними розв'язками для біматеріалу.

$$\theta^\infty(\xi) = \begin{cases} 2 \operatorname{Re} \left\{ g_{1\infty}' \left( Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ g_{2\infty}' \left( Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_2); \end{cases} \quad (25)$$

$$h_i^\infty(\xi) = \begin{cases} 2k_t^{(1)} \operatorname{Im} \left\{ \left( \delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(1)} \right) g_{1\infty}'' \left( Z_t^{(1)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_1), \\ 2k_t^{(2)} \operatorname{Im} \left\{ \left( \delta_{2i} - \delta_{1i} p_t^{(2)} \right) g_{2\infty}'' \left( Z_t^{(2)}(\xi) \right) \right\} & (\forall \xi \in S_2). \end{cases} \quad (26)$$

Стягуючи контури  $\Gamma_i$  до математичного розрізу  $\Gamma_C$  із берегами  $\Gamma_C^+$  та  $\Gamma_C^-$ , на основі інтегральних формул (23), (24) можна отримати такі інтегральні тотожності для температури і теплового потоку у тілі із розрізом  $\Gamma_C$ :

$$\begin{aligned} h_i(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - \text{H}_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} \left[ \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - \text{H}_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \iint_S \Theta_i^{\text{HCI}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - \text{H}^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} \left[ \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Sigma h_n(\mathbf{x}) - \text{H}^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) \Delta \theta(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &- \iint_S \Theta^{\text{HCI}^*}(\mathbf{x}, \xi) f_n(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (28)$$

Тут  $\Gamma$  — межа області  $S$  без внутрішніх розрізів  $\Gamma_C$ .

## 4. Розв'язок задачі термомагнітоелектропружності

Використовуючи (11), запишемо інтегральну формулу Коші для векторів  $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$  та  $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$ , комплексних потенціалів Стро, які є аналітичними вектор-функціями у областях  $S_1$  та  $S_2$  відповідно:

$$\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_1} \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - z_*^{(1)}} \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(1)}} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) \right]; \quad (29)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\Gamma_2} \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - z_*^{(2)}} \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(2)}} \mathbf{f}^{(2)}(x_1) \right]. \quad (30)$$

Вводячи позначення

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad \bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{d\bar{\tau}_*^{(j)}}{\bar{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad (31)$$

а також виключаючи із отриманих формул інтеграли уздовж інтерфейсу, використовуючи умови ортогональності Стро [6] отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) = \frac{1}{2\pi i} & \left[ \mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left( \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}) \right) + \right. \\ & \left. + \langle \bar{Q}_t^{(1)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_1^{(1)} + \langle Q_t^{(2)}(z_t^{(1)}) \rangle \delta_2^{(1)} + \bar{e}_t^{(1)} \mathbf{X}_1^{(1)} + e_t^{(2)} \mathbf{X}_2^{(1)} \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i} & \left[ \mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta \left( \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}) \right) + \right. \\ & \left. + \langle Q_t^{(1)}(z_*^{(2)}) \rangle \delta_1^{(2)} + \langle \bar{Q}_t^{(2)}(z_*^{(2)}) \rangle \delta_2^{(2)} + e_t^{(1)} \mathbf{X}_1^{(2)} + \bar{e}_t^{(2)} \mathbf{X}_2^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{(1)} &= \left( -\delta_1^{(1)} - 2ik_t^{(1)} \left( -\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \right) \right), \quad \mathbf{X}_2^{(1)} = \left( -\delta_2^{(1)} + 2ik_t^{(2)} \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2 \right), \\ \mathbf{X}_1^{(2)} &= -\delta_1^{(2)} - 2ik_t^{(1)} \mathbf{G}_2^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1, \quad \mathbf{X}_2^{(2)} = -\delta_2^{(2)} + 2ik_t^{(2)} \left( \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1^{(1)} &= -(1+K) \left( \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 - \boldsymbol{\lambda}_1 \right) + ik_t^{(2)} (1+K) \left( \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \right), \\ \delta_2^{(1)} &= (1-K) \left( \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 - \boldsymbol{\lambda}_1 \right) + ik_t^{(2)} (1+K) \left( \mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1^{(2)} &= -(1+K) \left( \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) - ik_t^{(2)} (1+K) \left( \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right), \\ \delta_2^{(2)} &= (1-K) \left( \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 + \boldsymbol{\lambda}_2 \right) - ik_t^{(2)} (1+K) \left( \mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\mu}_1 - \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \boldsymbol{\mu}_2 \right). \end{aligned}$$

Отримані рівності (32), (33) дають можливість записати інтегральні співвідношення, які пов'язують переміщення у довільній точці термопружного біматеріалу із

значеннями температури, теплового потоку та векторів переміщень і напружень на контурах  $\Gamma_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{Bmatrix} 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_1 \mathbf{f}^{(1)} \left( Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \right) + \mathbf{c}_1 g_1 \left( Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\} \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_2 \mathbf{f}^{(2)} \left( Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \right) + \mathbf{c}_2 g_2 \left( Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\} \end{Bmatrix} = \\ &= \mathbf{u}^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (34)$$

а також співвідношення для визначення напруження у довільній точці термопружного біматеріалу

$$\begin{aligned} \sigma_j(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{Bmatrix} 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B}_1 \left( \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \right) \mathbf{f}' \left( Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \right) + \mathbf{d}_1 \left( \delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(1)} \right) g'_1 \left( Z_t^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\} \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B}_2 \left( \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \right) \mathbf{f}' \left( Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \right) + \mathbf{d}_2 \left( \delta_{2j} - \delta_{1j} p_t^{(2)} \right) g'_2 \left( Z_t^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\} \end{Bmatrix} \\ &= \sigma_j^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{\text{HCl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (35)$$

Згідно з роботою [1], для опису функцій стрибків напружень і переміщень поблизу вершин тонких неоднорідностей використовують узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КИН). Останні обчислюються в локальній системі координат з центром у вершині дефекту на основі значень функцій стрибка за такими формулами:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}(s); \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{t}}(s). \quad (36)$$

Тут  $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$  — вектори узагальнених коефіцієнтів інтенсивності  $K_{ij}$ ;  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  — дійсний тензор Бернет–Лоте ([6]). Узагальнені коефіцієнти інтенсивності теплового потоку означені виразами

$$K_{h1} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} k_t \Delta \theta(s); \quad K_{h2} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \boldsymbol{\Sigma} h_n(s). \quad (37)$$

Таким чином, за допомогою узагальнених коефіцієнтів інтенсивності можна повністю встановити значення полів переміщень, напружень, температури і теплового потоку біля вершини неоднорідності, скориставшись наступними аналітичними залежностями:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}; \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle \left( \sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2 \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} \right) \right\}; \\ \theta &= \frac{1}{k_t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ (K_{h1} + \sqrt{-1} K_{h2}) \sqrt{Z_t} \right\}; \end{aligned}$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \left\{ (\sqrt{-1}K_{h1} - K_{h2}) \sqrt{Z_t} \right\}.$$

### 5. Числові результати

Отримані інтегральні рівняння було введено у схему модифікованого методу граничних елементів ([11]), що дало можливість розв'язати дану задачу.

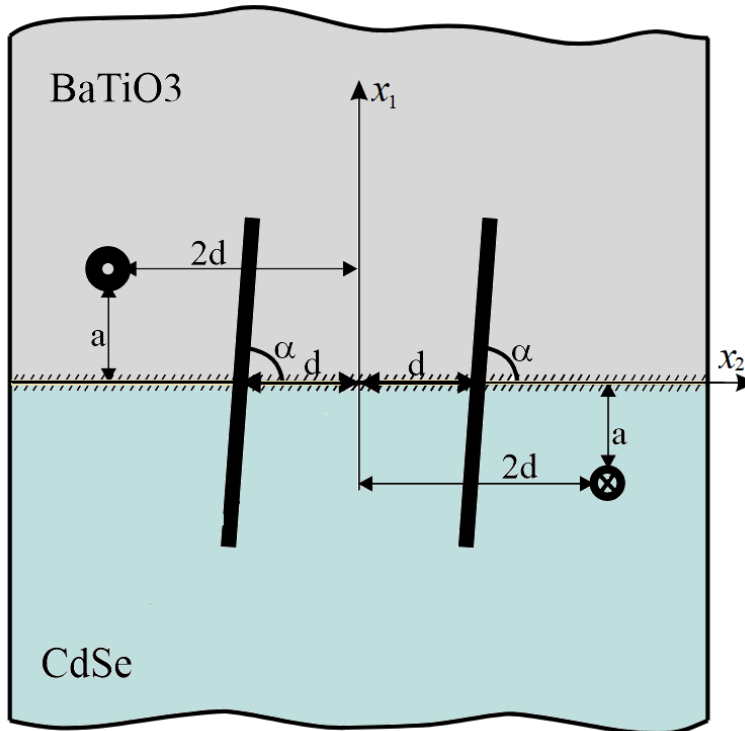


Рис. 2. Розрахункова схема п'єзоелектромагнітного біматеріалу з двома похилими тонкими включеннями та антисиметрично розташованими джерелом і стоком тепла.

Розглянемо один поперечний переріз біматеріального тіла. Компонента  $S_1$  виготовлена з титанату барію ( $\text{BaTiO}_3$ ), і містить джерело тепла інтенсивності  $q$ , що розташоване на відстані  $a$  до межі, і на відстані  $2d$  до осі  $x_1$ . Складова  $S_2$  виготовлена з селеніду кадмію ( $\text{CdSe}$ ). У ній, симетрично до джерела відносно початку координат, розташований стік тепла інтенсивності  $-q$ . Властивості цих матеріалів подані у працях [4,5]. На поданих нижче графіках показано залежності знерозмірених коефіцієнтів інтенсивності напруження від параметра теплопровідності інтерфейсу  $\mu_0$ , ( $\mu_0^* = ak_{11}$ ). Коефіцієнти інтенсивності нормовані величиною  $K_0 = q\beta_{11}\sqrt{\pi a/k_{11}}$ . Крім того, значення коефіцієнтів обчислювалися для різних значень  $\alpha$  (кута нахилу

включень до межі). Для обчислень використано 20 граничних елементів. При збільшенні кількості елементів отримані результати відрізнялися менше ніж на 0.5%.

У представлених графічних залежностях цифрові позначення *I* та *II* вказують на результати для нижніх ( $x_1 < 0$ ) та верхніх ( $x_1 > 0$ ) вершин включень відповідно.

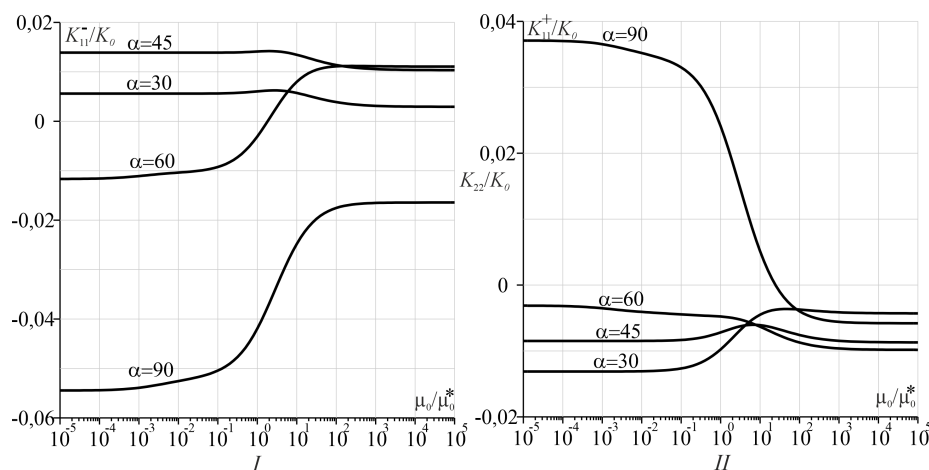


Рис. 3. Залежність узагальнених КІН  $K_{11}/K_0$  лівого включення від параметра  $\mu_0$ .

З рис. 3(I) бачимо, що для вертикального включення ( $\alpha = 90^\circ$ ) спостерігається найвища чутливість до провідності інтерфейсу. При низькій провідності ( $\mu_0/\mu_0^* \rightarrow 10^{-5}$ ) значення  $K_{11}/K_0$  досягають свого мінімуму ( $\approx -0.055$ ). Це пояснюється тим, що інтерфейс виступає тепловим бар'єром, створюючи значний температурний стрибок між фазами, що посилює локальну деформацію включення. При збільшенні  $\mu_0/\mu_0^*$  понад 1.0, зростання модуля КІН вказує на термічне розвантаження вершини включення, зумовлене ефективним теплообміном між фазами біматеріалу.

Так як вершина розташована в ВаТіО<sub>3</sub> у безпосередній близькості до джерела тепла, це призводить до високих значень КІН  $K_{11}/K_0$  для  $\alpha = 90^\circ$  (близько 0.038)(рис. 3(II)). Як тільки інтерфейс починає ефективно проводити тепло ( $\mu_0/\mu_0^* > 1$ ), напруження різко падають майже до нуля. Це свідчить про те, що градієнт температури поблизу джерела нівелюється за рахунок відведення тепла у нижню область. При зменшенні кута нахилу включення до інтерфейсу (перехід від  $\alpha = 90^\circ$  до  $30^\circ$ ) амплітуда зміни КІН значно скорочується. Для  $\alpha = 30^\circ$  графіки стають майже горизонтальними.

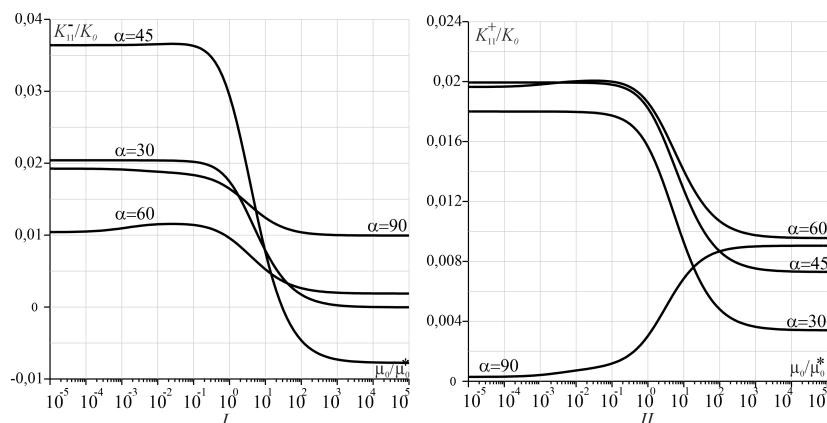


Рис. 4. Залежність узагальнених КІН  $K_{11}/K_0$  правого включення від параметра  $\mu_0$ .

На Рис. 4 представлено значення  $K_{11}$  для правого включення. На його нижній вершині помітні значні зміни КІН при зміні провідності інтерфейсу. При низьких значеннях  $\mu_0/\mu_0^* < 10^0$  спостерігаються найвищі значення  $K_{11}$  для кута  $\alpha = 45^\circ$ . Це свідчить про значне термічне розширення матеріалу навколо вершини. Водночас верхня вершина правого включення розташована на значній відстані від джерела тепла, що обумовлює суттєво меншу амплітуду коливань КІН (Рис. 4 (II)).

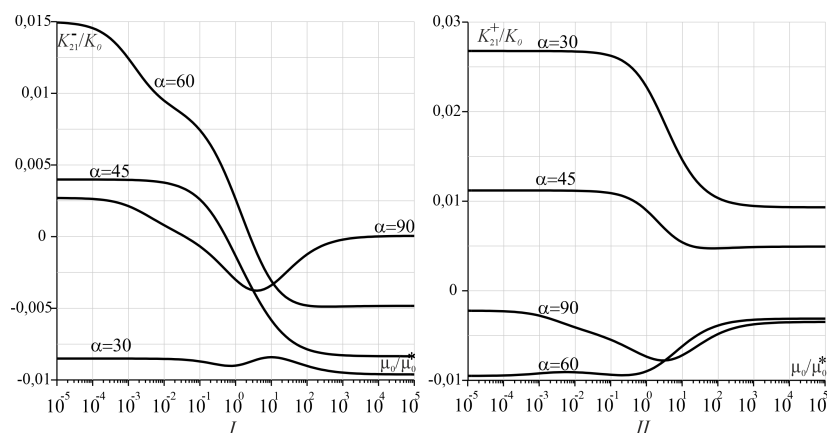


Рис. 5. Залежність узагальнених КІН  $K_{21}/K_0$  лівого включення і від параметра  $\mu_0$ .

Графічна залежність на рис. 5(I) показує, що при низькій провідності інтерфейсу ( $\mu_0/\mu_0^* < 10^{-1}$ ) найбільші позитивні значення КІН  $K_{21}/K_0$  спостерігаються для  $\alpha = 60^\circ$  ( $K_{21}/K_0 \approx 0.015$ ). Це свідчить про значний локальний зсув у вершині

включення, зумовлений перекосом температурного поля. Коли включення, що нахилене під кутом  $\alpha = 30^\circ$ , помітна майже стала інтенсивність напружень, малочутлива до теплопровідності межі.

На відміну від нижньої вершини, з рис. 5(II) бачимо, що тут саме кут  $30^\circ$  дає найбільший КІН при ізолюючому інтерфейсі ( $\approx 0.027$ ). Це пояснюється тим, що похиле включення перешкоджає тепловому потоку, створюючи значний градієнт у компоненті  $x_1 > 0$ . Після точки  $\mu_0/\mu_0^* = 10^1$  графіки для кутів  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  та  $90^\circ$  демонструють тенденцію до зближення. Це підтверджує, що при високій провідності межі поділу вплив кута нахилу на зсувні напруження дещо нівелюється.

На рис 6. наведено результати розрахунку нормованого КІН  $K_{21}/K_0$  для правого включення. Аналіз кривих для нижньої (рис. 6(I)) та верхньої (рис. 6(II)) вершин виявляє суттєву нелінійність у зоні зміни теплопровідності інтерфейсу. На нижній вершині включення помітна найвищу динаміку значень КІН, що зумовлено безпосередньою близькістю до стоку в нижньому напівпросторі. Найбільша інтенсивність спостерігається для вертикального включення ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $K_{21}/K_0 \approx -0.026$ ). На відміну від інших кутів, крива для  $45^\circ$  має виражений локальний екстремум у точці  $\mu_0/\mu_0^* \approx 10^0$ . Це вказує на складну перебудову поля зсувних напружень при переході інтерфейсу в провідний стан.

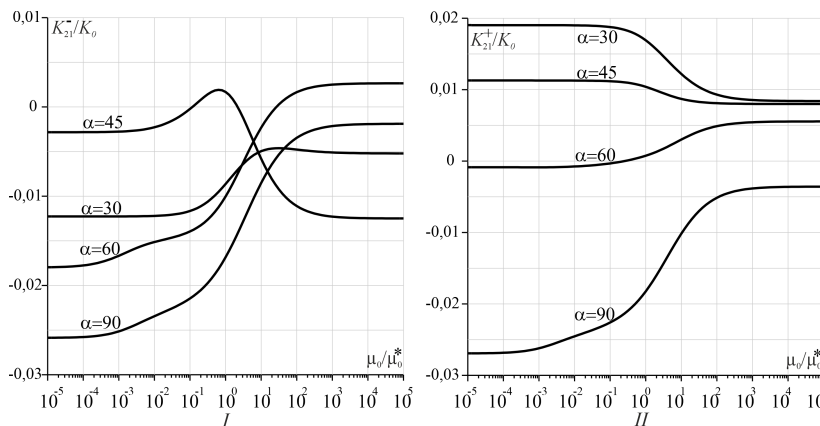


Рис. 6. Залежність узагальнених КІН  $K_{21}/K_0$  правого включення у біматеріальному призматичному тілі від параметра  $\mu_0$ .

Для вершини в області ВаТіО<sub>3</sub> спостерігається чітке розшарування результатів залежно від орієнтації включення. Найвищі рівні КІН відповідають похилим включенням з малими кутами ( $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ ). Для випадку  $\alpha = 90^\circ$  бачимо стабільно від'ємні значення, які при збільшенні провідності інтерфейсу монотонно зростають у бік нуля. Це підтверджує, що для правої верхньої вершини вертикальна орієнтація є найменш критичною з точки зору зсувних напружень.

## 6. Висновки

У даній роботі запропоновано та науково обґрунтовано комплексний підхід до розв'язання двовимірних задач термомагнітоелектропружності для біматеріальних структур з тонкими включеннями. Завдяки інтеграції розширеного формалізму Стро та методів теорії функцій комплексної змінної, вдалося побудувати математичну модель, що адекватно описує взаємозв'язок механічних, температурних, електричних та магнітних полів в умовах анізотропії середовищ. Це дозволило детально проаналізувати фізичні процеси, що виникають у складних багатокомпонентних системах під впливом теплових факторів.

На основі отриманих фундаментальних розв'язків розроблено систему граничних інтегральних рівнянь типу Сомільяни, яку було адаптовано для специфічних умов неідеального теплового контакту на межі поділу середовищ. Застосування модифікованого методу граничних елементів забезпечило високу обчислювальну стійкість та точність при визначенні градієнтів полів у зонах високої концентрації напружень, зокрема поблизу вершин тонких похилих включень.

Проведене дослідження взаємодії між деформівними включеннями та когерентним інтерфейсом високої теплопровідності виявило суттєву залежність розподілу локальних полів від геометричних параметрів, зокрема кута нахилу включень та їх розташування відносно межі поділу. Отримані результати мають безпосереднє практичне значення для інженерної практики, оскільки дозволяють здійснювати прогнозу оцінку надійності та довговічності багатофункціональних композитних пристроїв і сенсорів на етапі їх проектування. Сформований підхід відкриває можливість для оптимізації внутрішньої структури матеріалів з метою мінімізації ризиків руйнування та підвищення ефективності роботи чутливих елементів у складних експлуатаційних умовах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сулим Г.Т., Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007, 716 с.
2. Benveniste Y. *The effective thermal conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interface*, International Journal of Engineering Science, **24** (1986), no.9, 1537–1552. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(86\)90162-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(86)90162-X)
3. Benveniste Y. *A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media*, J. Mech. Phys. Solids, **54** (2006), 708–734. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.009>
4. Berlincourt D., Jaffe H., Shiozawa L.R. *Electroelastic properties of the sulfides, selenides, and tellurides of zinc and cadmium*, Physical Review, **129**, (1963) 1009-17. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.129.1009>
5. Dunn M.L. *Micromechanics of coupled electroelastic composites: Effective thermal expansion and pyroelectric coefficients*, Journal of Applied Physics, **73** (1993), 5131-40. <https://doi.org/10.1063/1.353240>
6. Hwu C. *Anisotropic elastic plates*. – London: Springer, 2010. – 674 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5915-7>
7. Kaessmair S., Javili A., Steinmann P., *Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces*, Archive of Applied Mechanics, **84** (2014), no.9–11, P. 1409–1426. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0891-3>

8. Pasternak Ia., Sulym H., Tomashivskyy M. *Boundary integral equations for an anisotropic bimaterial with thermally imperfect interface and internal inhomogeneities*, Acta. Mech., **10** (2016), 66–74. <https://doi.org/10.1515/ama-2016-0012>
9. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. *2D boundary element analysis of defective thermo-electroelastic bimaterial with thermally imperfect but mechanically and electrically perfect interface*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **61** (2015), 194–206. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.07.012>
10. Pasternak Ia. *Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **36** (2012), no.12, 1931–1941. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.06.007>
11. Pasternak I.M., Pasternak R.M., Sulym H.T. *A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **37** (2013), no.2, 419–433. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.002>
12. Qin Q.-H. *Green's function and boundary elements of multifield materials*, Elsevier Oxford, 2007, 266p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-045134-3.X5045-9>
13. Ting T.C.T. *Anisotropic elasticity: theory and applications*, New York: Oxford University Press, 1996. 567 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780195074475.001.0001>
14. Wang X., Pan E. *Thermal Green's functions in plane anisotropic bimaterials with springtype and Kapitza-type imperfect interface*, Acta Mechanica et Automatica, **209** (2010), 115–128. <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0146-7>

*Стаття: вперше надійшла 05.01.2025  
прийнята до друку 15.04.2026  
опублікована 29.04.2026*

**INFLUENCE OF HIGH-THERMAL-CONDUCTIVITY  
INTERFACE ON MECHANICAL FIELDS NEAR THIN  
INCLUSIONS IN BIMATERIAL SOLIDS****Andrii VASYLYSHYN, Ivan ZVIZLO**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
1 Universytetska Street, Lviv, 79007, Ukraine  
e-mail: andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5703-6894  
e-mail: ivan.zvizlo@lnu.edu.ua, ORCID: 0009-0004-9804-6572*

In this work, a comprehensive approach is developed for solving two-dimensional problems of thermomagnetoelasticity for finite bimaterial structures with a coherent high-thermal-conductivity interface containing thin inclusions inclined at an angle to the interface. The mathematical model is based on a combination of the extended Stroh formalism and the methods of complex variable function theory, which allows for accounting the interaction of mechanical, thermal, electrical, and magnetic fields in anisotropic media. Based on the constructed fundamental solutions, a system of Somigliana-type boundary integral equations is obtained, adapted for the conditions of imperfect thermal contact between the bimaterial components. For numerical implementation, a modified boundary element method is proposed, which ensures high accuracy in calculating field gradients near stress concentrators. A detailed analysis of the interaction between thin deformable inclusions crossing the contact surface at an angle is performed. The problem for a bimaterial solid with two inclusions is solved. The influence of geometric parameters and physical properties of the inclusions on the distribution of local fields is investigated, which is of practical importance for the design and reliability assessment of multifunctional composite devices and sensors.

*Key words:* Bimaterial, high thermal conductivity interface, thin inclusion, complex potential, Stroh formalism, Somigliana-type equation.