

УДК 539.3

РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ, НА ПРОДОВЖЕННІ ЯКОЇ УТВОРИЛИСЯ ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ

Максим ШАЙНОГА, Олег СМАЛЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007
e-mail: maksym.shainoha@lnu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-8174-5706
e-mail: oleh.smal@lnu.edu.ua
ORCID: 0000-0002-4495-6648*

У статті побудовано розв'язок задачі про розтяг безмежної ізотропної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та наскрізною радіальною прямолінійною тріщиною. Припускалося, що за дії рівномірно розподіленого розтягувального навантаження на безмежності на продовженні тріщини утворилися пластичні зони, для яких виконуються умови пластичності Треска–Сен–Венана. Використавши методи теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числовим методом механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовано графіки для довжин пластичних зон в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження.

Ключові слова: плоска задача, пластинка, абсолютно жорстка шайба, тріщина, пластичні зони, граничні умови, комплексні потенціали, задача лінійного спряження, сингулярні інтегральні рівняння, числові методи, коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Вступ.

Під дією зовнішнього навантаження у пластинчастих елементах конструкцій можуть виникати тріщини та пластичні зони. Вони будуть впливати на перерозподіл напружено-деформованого стану пластин з включеннями та тріщинами, а тому задача по вивченню їх впливу на міцність конструкції є актуальною науково-технічною

задачею механіки. Важливим завданням оцінки міцності такого конструктивного елементу є визначення довжин пластичних зон, з допомогою яких можна визначити критичне навантаження, яке може витримати пластина. У праці [1] розв'язано задачу про згин смуги з наскрізною тріщиною з пластичними зонами, береги якої гладко контактують. У статті [2] розв'язана задача згину з розтягом ізотропної пластини, яка містить наскрізну тріщину, за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням зміцнення матеріалу і умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару та пластичного шарніру. У [3] розв'язана задача згину балки з тріщиною з пластичними зонами, перпендикулярною до осі балки. За допомогою теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, задача зводиться до задач лінійного спряження, які розв'язано аналітично. Задача про розтяг круглої пластини з радіальною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони розв'язана у статті [4]. Таким чином, дослідження, пов'язані з впливом пластичних зон на напружено-деформований стан тіл з тріщинами, є актуальними. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану за розтягу безмежної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони, з використанням умови пластичності Треска-Сен-Венана.

2. Формулювання задачі.

Нехай у нескінченній ізотропній пластині товщиною $2h$ міститься абсолютно жорстка кругова шайба радіуса R і наскрізна радіальна прямолінійна тріщина довжиною $2l$. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Нехай на безмежності до пластини прикладене рівномірно розподілене розтягувальне навантаження P_1 і P_2 (див. рис. 1), під дією якого на продовженні тріщини утворилися прямолінійні пластичні зони завдовжки w_1 і w_2 . У серединній площині пластини розмістимо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком у центрі кругового отвору, а вісь Ox направимо по тріщині, вісь $O\tilde{z}$ направимо перпендикулярно до серединної площини пластини. У точці O виберемо полярну систему координат $Or\theta$ з полярною віссю Ox . У центрі тріщини розмістимо декартову систему координат $O_1x_1y_1\tilde{z}_1$. Нехай L — межа абсолютно жорсткої кругової шайби; L_1 — лінія, де розміщена тріщина; L_1 і L_1'' — прямолінійні пластичні зони; x_0 — відстань між центром шайби та центром тріщини; S^+ — область всередині кругової шайби, а S^- — ззовні шайби; w_1 і w_2 — довжини пластичних зон на продовженні тріщини; a і b — вершини тріщини; c і d — вершини пластичних зон; $L1 = L_1 \cup L_1' \cup L_1''$.

Згідно формулювання задачі на межі абсолютно жорсткої кругової шайби матимемо такі граничні умови

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

де u_r і u_θ — компоненти вектора переміщень у полярній системі координат.

На берегах тріщини матимемо такі граничні умови

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = 0, \quad \tau_{x_1y_1}^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

де $\sigma_{y_1y_1}$ і $\tau_{x_1y_1}$ — компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини з пластичними зонами при $y_1 \rightarrow \pm 0$.

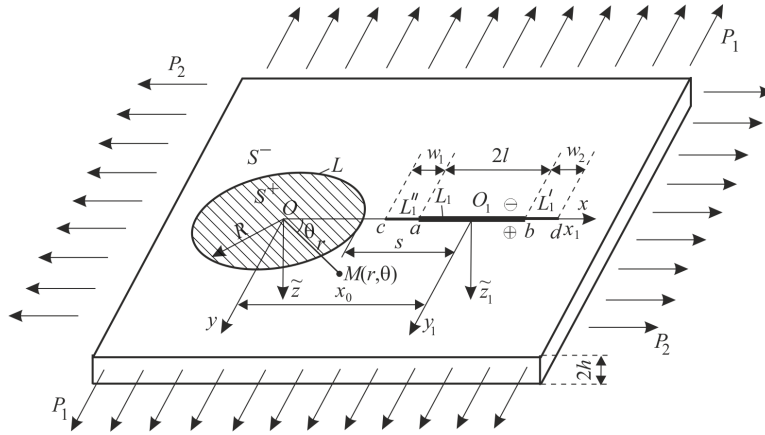


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

У пластичних зонах будемо мати такі граничні умови

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{\pm} = \tau_0^{(1)}, \quad x_1 \in L_1', \quad (3)$$

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{\pm} = -\tau_0^{(2)}, \quad x_1 \in L_1'', \quad (4)$$

де $\sigma_0^{(1)}$, $\sigma_0^{(2)}$, $\tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(2)}$ — невідомі нормальні та дотичні напруження у пластичних зонах.

3. Побудова розв'язку задачі.

Компоненти тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} і вектора переміщень u_x , u_y у декартовій системі координат для узагальненого плоского напруженого стану виразимо через дві функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right), \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_x + iu_y) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $z = x + iy$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\kappa = (3-\nu)(1+\nu)$, E — модуль пружності матеріалу пластини, ν — коефіцієнт Пуассона, $i^2 = -1$.

У полярній системі координат компоненти тензора напружень σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$ і вектора переміщень U_r , U_{θ} , визначимо за формулами [5]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2 \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right), \\ \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}, \\ \frac{2\mu}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r + iu_{\theta}) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ для сформульованої задачі подамо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1), \quad \Psi(z) = \Psi_K(z) + \Psi_1(z_1) - x_0 \Phi'_1(z_1),$$

де функції $\Phi_k(z)$ і $\Psi_k(z)$ голоморфні в області S^- , а функції $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ голоморфні ззовні тріщини з пластичними зонами.

Зауважимо, що

$$\Phi_K(z) = \frac{(P_2 - P_1)R^2}{2z^2} + O(1), \quad z \rightarrow 0.$$

Введемо функції

$$\begin{aligned} \Omega_1(z_1) &= \bar{\Phi}_1(z_1) + z_1 \bar{\Phi}'_1(z_1) + \bar{\Psi}_1(z_1), \\ \Phi_K(z) &= -\bar{\Phi}_K \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_K \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_K \left(\frac{R^2}{z} \right), \quad z \in S^+. \end{aligned}$$

де $\bar{\Phi}_1(z_1) = \overline{\Phi_1(\bar{z}_1)}$.

Якщо підставити вирази для $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\Omega_1(z_1)$ і $\Phi_K(z)$ у (5) та (6), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} &= \Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_K \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \\ &+ \Phi_1(z_1) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \overline{\Phi_1(z_1)} - \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r + iu_\theta) &= \kappa \Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_K \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \\ &- \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \kappa \Phi_1(z_1) - \\ &- \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \overline{\Phi_1(z_1)} + \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} + \Phi_K(z) + \\ &+ \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \right) \overline{\Phi_K(z)} + z \overline{\Phi'_K(z)} + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \left\{ \Phi_K \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_x + iu_y) &= \kappa \Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} + \kappa \Phi_K(z) - \\ &- \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \right) \overline{\Phi_K(z)} - z \overline{\Phi'_K(z)} - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \left\{ \Phi_K \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Підставимо крайові умови (2)–(4) у (9) та отримаємо таку задачу лінійного спряження

$$(\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^+ - (\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^- = 0, \quad t \in \tilde{L}_1, \quad (11)$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$\Omega_1(z) = \Phi_1(z).$$

Якщо додати (9) і (10), тоді отримаємо

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) = (1 + \kappa)\{\Phi_1(z_1) + \Phi_K(z)\}.$$

З крайових умов (2)–(4) та попередньої формули будемо мати

$$(1 + \kappa)\{\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)\} = 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) \right], \quad t \in \tilde{L}_1, \quad (12)$$

де $[f] = f^+ - f^-$.

Нехай

$$g_1'(t) = \frac{2\mu}{(1 + \kappa)i} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) \right], \quad t \in \tilde{L}_1.$$

Тоді з (12) запишемо задачу лінійного спряження у вигляді

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = ig_1'(t),$$

розв'язок якої буде таким

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{g_1'(t)dt}{t - z_1}. \quad (13)$$

З крайових умов (1) та співвідношення (7) отримаємо

$$\begin{aligned} &\kappa\Phi_\kappa^-(t) + \Phi_\kappa^+(t) + \kappa\Phi_1(t - x_0) - \left(1 + \frac{R^2}{t^2}\right)\bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) + \\ &+ \frac{R^2}{t^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) + \left(t - \frac{R^2}{t}\right)\bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) \right\} = 0, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (14)$$

Введемо функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_K(z) + \kappa\Phi_1(z - x_0), & z \in S^+, \\ -\kappa\Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \\ - \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right)\bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right\}, & z \in S^- \end{cases} \quad (15)$$

Підставимо (15) у (14), тоді будемо мати таку задачу лінійного спряження

$$F^+(t) - F^-(t) = 0, \quad t \in L,$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$F(z) = \frac{(P_2 - P_1)R^2}{2z^2} - \frac{\kappa(P_1 + P_2)}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{\overline{g_1'(t)}dt}{t + x_0}. \quad (16)$$

Якщо підставити (16) у (15), тоді будемо мати

$$\Phi_{\kappa}(z) = \begin{cases} F(z) - \kappa\Phi_1(z - x_0), & z \in S^+, \\ \frac{1}{\kappa} \left\{ -F(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \frac{R^2}{z^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right] \right\}, & \\ z \in S^-. \end{cases} \quad (17)$$

З крайових умов (2)–(4) та (9) матимемо

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x_1) + \Phi_1^-(x_1) + \Phi_K(x_1 + x_0) + \left(1 + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2}\right) \overline{\Phi_K(x_1 + x_0)} + \\ + \left(x_1 + x_0 - \frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) \overline{\Phi'_K(x_1 + x_0)} + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) = \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \begin{cases} 0, & x_1 \in [a, b], \\ \sigma_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)}, & x_1 \in [c, a], \\ \sigma_0^{(2)} - i\tau_0^{(2)}, & x_1 \in [b, d]. \end{cases}$$

Підставимо (13), (16), (17) у (18) і отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомої функції $g_1'(t)$, яке у безрозмірних змінних буде мати вигляд

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi)G(\eta) + S(\eta, \xi)\overline{G(\eta)}\}d\eta = H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (19)$$

де

$$H(\xi) = p_2 + \frac{\kappa(p_1 - p_2)}{2X^4} + \begin{cases} 0, & \xi \in \left[-1 + \frac{2w_1^*}{2+w_1^*+w_2^*}, 1 - \frac{2w_2^*}{2+w_1^*+w_2^*}\right]; \\ \frac{\sigma_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)}}{\sigma_y}, & \xi \in \left[-1, -1 + \frac{2w_1^*}{2+w_1^*+w_2^*}\right]; \\ \frac{\sigma_0^{(2)} - i\tau_0^{(2)}}{\sigma_y}, & \xi \in \left[1 - \frac{2w_2^*}{2+w_1^*+w_2^*}, 1\right], \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + R^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) R^{II}(\eta, \xi) + \\ &+ \left(X - \frac{1}{X}\right) R^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} R^{IV}(\eta, \xi), \end{aligned}$$

$$R^I(\eta, \xi) = -\frac{\lambda}{2\pi\kappa X(TX - 1)},$$

$$R^{II}(\eta, \xi) = -\frac{\lambda}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{X^2 - 1}{X(TX - 1)^2} - \frac{X^2 + 1}{X(TX - 1)} \right\},$$

$$R^{III}(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi\kappa} \frac{\lambda}{(TX - 1)^2} \left\{ TX + \frac{1}{X^2} - \frac{(X^2 - 1)}{X^2(TX - 1)} \right\},$$

$$R^{IV}(\eta, \xi) = -\frac{\kappa\lambda X}{2\pi(TX - 1)}.$$

$$\begin{aligned}
 S(\eta, \xi) &= S^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) S^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) S^{III}(\eta, \xi) + \frac{\lambda}{2\pi T X^2}, \\
 S^I(\eta, \xi) &= -\frac{\lambda}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{X^2 - 1}{X(TX - 1)^2} - \frac{X^2 + 1}{X(TX - 1)} \right\}, \\
 S^{II}(\eta, \xi) &= -\frac{\lambda}{2\pi\kappa X(TX - 1)}, \quad S^{III}(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{\pi\kappa X^2(TX - 1)} \left(1 + \frac{1}{2(TX - 1)}\right). \\
 X &= 1 + \varepsilon + 0.5\lambda\{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\xi\}, \\
 T &= 1 + \varepsilon + 0.5\lambda\{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\eta\}.
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{s}{R}, \quad \lambda = \frac{l}{R}, \quad w_1^* = \frac{w_1}{l}, \quad w_2^* = \frac{w_2}{l}, \quad p_1 = \frac{P_1}{\sigma_y}, \quad p_2 = \frac{P_2}{\sigma_y}, \quad G(\eta) = G_1(\eta) + iG_2(\eta) = \frac{hg'_1(t)}{\sigma_y}.$$

де $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$ – дійсні невідомі функції, σ_Y – межа текучості матеріалу пластини.

З умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини з пластичними зонами отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{G_1(\eta) + iG_2(\eta)\} d\eta = 0. \quad (20)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень k визначимо за формулами [6]

$$k^{c,d} = \mp h \left(g'_1(x_1) \sqrt{\frac{(c+x_1)(d-x_1)}{l}} \right).$$

Оскільки у вершинах пластичних зон c , d коефіцієнти інтенсивності напружень рівні нулю, тоді

$$k^c = 0, \quad k^d = 0. \quad (21)$$

У пластичних зонах L'_1 і L''_1 запишемо умови пластичності Треска-Сен-Венана ([6])

$$\max \left\{ \left| \sigma_1^{(j)} \right|, \left| \sigma_2^{(j)} \right|, \left| \sigma_1^{(j)} - \sigma_2^{(j)} \right| \right\} = \sigma_Y, \quad (22)$$

де

$$\sigma_{1,2}^{(j)} = 0.5 \left(\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_0^{(j)} \pm \sqrt{\left(\sigma_{xx}^{(j)} - \sigma_0^{(j)} \right)^2 + 4 \left(\tau_0^{(j)} \right)^2} \right), \quad j = 1, 2.$$

Отже, для знаходження невідомих функцій $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$, невідомих нормальних і дотичних напруження у пластичних зонах $\sigma_0^{(1)}$, $\sigma_0^{(2)}$, $\tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(2)}$ та довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* , отримано систему рівнянь (19)–(22).

4. Числовий аналіз.

Проведено числовий аналіз сформульованої задачі при $\nu = 0.3$, який поданий на рис. 2, рис. 3. Система сингулярних інтегральних рівнянь (19), (20) була розв'язана числовим методом механічних квадратур ([7]), а система рівнянь (21), (22) розв'язувалася числовим методом Ньютона.

На рис. 2 зображено залежність безрозмірених довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* від $\varepsilon = \frac{s}{R}$ при $\lambda = \frac{l}{R} = 0.5$, $p_2 = 0$. Графіки 1 (для w_1^*), 2 (для w_2^*) побудовані при $p_1 = 0.6$, графіки 3 (для w_1^*), 4 (для w_2^*) – $p_1 = 0.5$, графіки 5 (для w_1^*), 6 (для w_2^*) – $p_1 = 0.4$.

На рис. 3 зображено залежність безрозмірених довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* від $\varepsilon = \frac{s}{R}$ при $\lambda = \frac{l}{R} = 0.3$, $p_2 = 0$. Графіки 1 (для w_1^*), 2 (для w_2^*) побудовано при $p_1 = 0.6$, графіки 3 (для w_1^*), 4 (для w_2^*) — $p_1 = 0.5$, графіки 5 (для w_1^*), 6 (для w_2^*) — $p_1 = 0.4$.

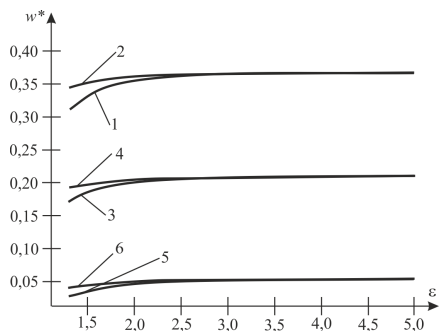


Рис. 2.

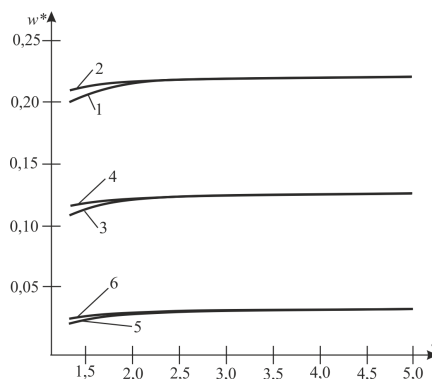


Рис. 3.

5. Висновки

За допомогою методів теорії комплексних потенціалів для плоскої задачі теорії пружності розв'язано задачу про розтяг безмежної ізотропної пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та радіальною наскрізною прямолінійною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони. Для пластичних зон використовувалися умови пластичності Греска-Сен-Венана. Розв'язок сформульованої задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числовим методом механічних квадратур. У статті побудовано графіки для довжин пластичних зон в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження та геометричних параметрів задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. O. Bilash, M. Slobodian, R. Seliverstov, I. Zvizlo, O. Petruchenko, R. Kovalchuk, Pure bending of a strip (Beam) with a transversal through crack located asymmetrically relative to its axis on the assumption of crack closure and striplike plastic zone near one of the tips, AIP Conference Proceedings, 2949, 020002, 2023, <https://doi.org/10.1063/5.0165477>
2. V.K. Opanasovych, M.M. Nykolyshyn, M.S. Slobodian, S.O. Alfavitska, O.K. Bilash, Combined action of bending and tension of an isotropic plate with through crack in the absence of contact between the faces and with regard for the plastic zones and hardening of material at the tips, Journal of Mathematical Sciences (United States), **254** (2021), no.1, 117–128. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05292-8>
3. H. Sulym, V. Opanasovych, M. Slobodian, O. Bilash, Pure bending of strip (beam) with crack in strip of tensile stress with allowance for plastic strips near crack tips, Acta Mechanica et Automatica, **14** (2020), no.1, 44–49. <https://doi.org/10.2478/ama-2020-0007>
4. М. Шайнога, Л. Маркевич, Розтяг круглої пластини з радіальною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони, Вісник Львівського університету. Серія

механіко-математична, **97** (2025), 43–52.

<http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.043-052>

5. М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
6. Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук, Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами, СПОЛОМ, 2003, 320 с.
7. М.П. Саврук, В.М. Зеленьк, Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами, Львів: РАСТР, 2009, 212 с.

Стаття: вперше надійшла 29.01.2026

прийнята до друку 15.04.2026

опублікована 29.04.2026

TENSION OF A PLATE WITH AN ABSOLUTELY RIGID INCLUSION AND A RADIAL CRACK WITH PLASTIC ZONES FORMED ON ITS CONTINUATION

Maksym SHAYNOGA, Oleg SMAL

*Ivan Franko National University of Lviv,
str. Universytetska, 1, Lviv, 79007*

*maksym.shainoha@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8174-5706
oleh.smal@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-4495-6648*

The article constructs a solution to the problem of tension of an infinite isotropic plate with an absolutely rigid circular inclusion and a through radial straight crack. It is assumed that under a uniformly distributed tensile load at infinity, plastic zones are formed on the crack continuation, satisfying the Tresca–Saint–Venant yield criteria. Using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials, the solution is reduced to a system of singular integral equations, which is solved by the numerical method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the problem is performed, and graphs for the lengths of the plastic zones depending on the applied external load are plotted.

Key words: plane problem, plate, absolutely rigid inclusion, crack, plastic zones, boundary conditions, complex potentials, linear conjugation problem, singular integral equations, numerical methods, stress intensity factors.