

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПІВПРОСТОРУ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Анатолій ЯСІНСЬКИЙ<sup>1</sup>, Валерій КОЗИЦЬКИЙ<sup>1</sup>,  
Володимир ФЛЮД<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

<sup>2</sup>Політехніка Опольська (Ополе, Польща)  
вул. Прушковська, 76, 45-758, м. Ополе

e-mail: [yasinskyi.anatoliy@gmail.com](mailto:yasinskyi.anatoliy@gmail.com), ORCID: 0009-0007-9451-6436

e-mail: [vaklviv@ukr.net](mailto:vaklviv@ukr.net), ORCID: 0000-0001-7977-9667

e-mail: [volodymyr.flyud@lnu.edu.ua](mailto:volodymyr.flyud@lnu.edu.ua), ORCID: 0000-0003-2292-6472

Сформульовано та досліджено осесиметричну стаціонарну задачу оптимального керування температурними напруженнями півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. Керування здійснюється шляхом конвективного теплообміну з оточуючим середовищем. У просторі неперервних функцій побудовано розв'язок оберненої задачі термопружності, до якої зведено сформульовану задачу керування. Для конкретних випадків теплового навантаження півпростору числово досліджено та проаналізовано особливості поведінки знайденого розв'язку.

*Ключові слова:* оптимальне керування, обернена задача термопружності, температурні напруження.

### 1. Вступ

Елементи сучасного технологічного обладнання часто зазнають дії інтенсивного теплового навантаження, зокрема у вигляді нагрівання внутрішніми джерелами тепла. За певних умов це призводить до виникнення у них високоградієнтного температурного поля, що може спричинити і високий рівень температурних напружень ([1]). Для забезпечення надійного функціонування таких елементів та збереження ними проєктних функціональних та міцнісних властивостей, індукване джерелами

тепло потрібно відвести. Для цього часто використовують конвективний теплообмін з довкіллям. Ефективність такого тепловідведення можна істотно підвищити шляхом керованої зміни температури довкілля чи відповідним вибором величини коефіцієнта теплообміну за врахування відповідних обмежень на максимальні значення температурних напружень або переміщень, обумовлених технологічними вимогами ([2–6]).

Задачі оптимального керування напружено-деформованим станом однорідних, неоднорідних і термочутливих елементів конструкцій, коли за функцію керування вибрано теплове навантаження і задані додаткові обмеження на параметри теплового та термомеханічного процесу, досліджено у працях ([7]–[9]).

Задачі мінімізації температурних напружень теплонавантажених елементів конструкцій, виготовлених із неоднорідних, композитних та термочутливих матеріалів, шляхом підбору складових матеріалу, визначення закону розподілу його теплових і механічних характеристик за координатами чи вибору відповідної форми поверхні розглянуто у працях ([10]–[14]).

Задачі оптимального керування термонапруженим станом тіла за своїм змістом відносяться до обернених задач математичної фізики, у яких за наслідковими факторами потрібно визначити причинні характеристики, тому є випадки, коли їх доцільно розглядати і розв'язувати як обернені задачі термоджоружності ([15, 16]), скориставшись відповідними методами розв'язування обернених задач. У працях [8, 9] шляхом зведення до обернених задач термопластичності розв'язано задачі оптимального керування швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл за обмежень на функцію керування (температуру нагрівального середовища, тепловий потік на поверхні тіла) та максимальне значення інтенсивності напружень чи накопиченої пластичної деформації.

У цій статті для осесиметрично деформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, побудовано та досліджено розв'язок задачі оптимального керування розподілом першого інваріанта тензора температурних напружень у деякому перерізі, паралельному до його межевої поверхні, коли за функцію керування вибрано закон розподілу температури середовища, з яким відбувається конвективний теплообмін або коефіцієнт теплообміну, якщо закон розподілу температури оточуючого середовища відомий.

## 2. Постановка задачі керування

Розглянемо, віднесений до циліндричної системи координат  $r, \varphi, z$ , однорідний ізотропний півпростір. Припустимо, що вільний від зовнішнього силового навантаження півпростір нагрівається залежними лише від координат  $r, z$  внутрішніми джерелами тепла, а через його межеву поверхню  $z = 0$  відбувається конвективний теплообмін із довкіллям, температура якого також не залежить від кутової координати  $\varphi$ . Тоді у ньому реалізується осесиметричне стаціонарне температурне поле  $T(r, z)$ . За зроблених припущень осесиметричний деформований стан півпростору, спричинений дією температурного поля  $T(r, z)$ , можна описати системою рівнянь

рівноваги ([1])

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rz}}{\rho} = 0, \quad \rho \in [0, \infty), \quad x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

фізичними співвідношеннями для осесиметричного напруженого стану

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left( \varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left( \varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right), \\ \sigma_{zz} &= 2G \left( \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right), \\ \sigma_{rz} &= 2G \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

співвідношеннями Коші, та межовими умовами

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \sigma_{rz}(\rho, 0) = 0, \quad (3)$$

де  $\rho = \frac{r}{R}$ ,  $x = \frac{z}{R}$  – безрозмірні циліндричні координати;  $R$  – деяка нормуюча довжина;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{z\varphi}$  – компоненти тензора напружень;  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rz}$  – компоненти тензора деформацій;  $e$  – об’ємна деформація;  $G$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Вважаємо, що всі компоненти тензора напружень прямують до нуля, коли  $\rho, x \rightarrow \infty$ .

Температурне поле півпростору  $T(\rho, x)$ , за наявності у ньому теплових джерел, задовольнятиме рівняння Пуассона ([1])

$$\Delta T(\rho, x) + Q(\rho, x) = 0, \quad \rho \in [0, \infty), \quad x \in (0, \infty) \quad (4)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \frac{\partial T(\rho, 0)}{\partial x} - \alpha [T(\rho, 0) - t_*(\rho)] = 0, \quad \rho \in [0, \infty), \\ \lim_{\rho, x \rightarrow \infty} T(\rho, x) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  – оператор Лапласа;  $Q(\rho, x) = \frac{R^2}{\lambda} Q_*(\rho, x)$  – відносна інтенсивність внутрішніх теплових джерел;  $Q_*(\rho, x)$  – інтенсивність внутрішніх теплових джерел;  $\alpha = \alpha_* \frac{R}{\lambda}$  – безрозмірний коефіцієнт теплообміну;  $\alpha_*$  – коефіцієнт теплообміну;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $t_*(\rho)$  – температура довкілля.

Вважатимемо, що функція розподілу теплових джерел  $Q(\rho, x)$  є заданою. За відомого значення коефіцієнта теплообміну  $\alpha$  потрібно знайти такий закон зміни температури довкілля  $t_*(\rho)$ ,  $\rho \in [0, \infty)$ , за якого функціонал

$$J(u) = \max_{\rho \in [0, \infty)} |S(\rho, x_1; t_*) - \varphi_*(\rho)|, \quad (6)$$

приймав би мінімальне значення. Тут  $S(\rho, x_1; t_*) = \sigma_{rr}(\rho, x_1; t_*) + \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, x_1; t_*) + \sigma_{zz}(\rho, x_1; t_*)$  – перший інваріант тензора напружень у заданому перерізі  $x = x_1$ ,

$x_1 = \text{const} \geq 0$  півпростору, паралельному до межевої поверхні;  $\varphi_*(\rho)$  — задана функція.

### 3. Зведення задачі керування до оберненої задачі термопружності

Проведені дослідження показують ([2], [16]–[18]), що розв’язання таких задач доцільно розпочинати з відшукування у просторі неперервних функцій керування, яке забезпечуватиме точну нижню грань функціоналу (6), тобто виконання рівності

$$S(\rho, x_1; t_*) = \varphi_*(\rho), \quad \rho \in [0, \infty). \quad (7)$$

З цією метою знайдемо розв’язки задач термопружності (1)–(3) та теплопровідності (4), (5) і запишемо їх у потрібному для нас вигляді.

У праці [18] побудовано розв’язок осесиметричної задач термопружності (1)–(3) у вигляді інтегральних залежностей компонент вектора переміщень від неязвезданого температурного поля. Скориставшись ним, компоненти тензора напружень можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left( e^{-s|x-\eta|} + (3-2sx)e^{-s(x+\eta)} \right) s^2 J_0(s\rho) - \right. \\ &\quad \left. - \left( e^{-s|x-\eta|} + (3-4\nu-2sx)e^{-s(x+\eta)} \right) \frac{sJ_1(s\rho)}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times \xi J_0(s\xi) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta - \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(\rho, x), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 4\nu e^{-s(x+\eta)} s^2 J_0(s\rho) + \left( e^{-s|x-\eta|} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3-4\nu-2sx)e^{-s(x+\eta)} \right) \frac{sJ_1(s\rho)}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times \xi J_0(s\xi) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta - \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(\rho, x), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\alpha_T E}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ (1+2sx)e^{-s(x+\eta)} - e^{-s|x-\eta|} \right] \times \\ &\quad \times s^2 \xi J_0(s\xi) J_0(s\rho) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $E$  — модуль Юнга;  $J_0(\rho)$ ,  $J_1(\rho)$  — функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків.

Звідси можна отримати, що

$$S(\rho, x) = \frac{2\alpha_T E}{1-\nu} \left[ (1+\nu) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+\eta)} s^2 \xi J_0(s\xi) J_0(s\rho) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta - T(\rho, x) \right]. \quad (9)$$

На основі отриманих співвідношень (8) також можна встановити, що для осесиметричної задачі термопружності для півпростору мають місце наступні залежності

між компонентами тензора напружень і їх першим інваріантом:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{S}{2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s^2 \xi S(\xi, \eta) \left[ (3 - 2sx) e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{4\rho} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s \xi S(\xi, \eta) \left[ (7 - 2sx) e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] J_0(s\xi) J_1(s\rho) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{S}{2} + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s^2 \xi S(\xi, \eta) e^{-s(x+\eta)} J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds d\xi d\eta - \\ &- \frac{1}{4\rho} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s \xi S(\xi, \eta) \left[ (7 - 2sx) e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] J_0(s\xi) J_1(s\rho) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s^2 \xi S(\xi, \eta) \left[ (1 + 2sx) e^{-s(x+\eta)} - e^{-s|x-\eta|} \right] J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds d\xi d\eta, \\ \sigma_{rz} &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty s^2 \xi S(\xi, \eta) \left[ (1 - 2sx) e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \operatorname{sign}(x - \eta) \right] J_0(s\xi) J_1(s\rho) ds d\xi d\eta, \end{aligned}$$

з яких слідує, що керуючи першим інваріантом тензора напружень, можна опосередковано керувати і кожною із компонент цього тензора.

Застосувавши до задачі теплопровідності (4), (5) інтегральне перетворення Ганкеля ([19]) за координатою  $\rho$ , її розв'язок запишемо так ([18]):

$$T(\rho, x) = \int_0^\infty G_*(\rho, x; \xi) t_*(\xi) d\xi + \int_0^\infty G_0(\rho, x; \xi, \eta) Q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (10)$$

де

$$G_*(\rho, x; \xi) = \alpha \xi \int_0^\infty \frac{s e^{-sx}}{s + \alpha} J_0(s\rho) J_0(s\xi) ds,$$

$$G_0(\rho, x; \xi, \eta) = \frac{\xi}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{s - \alpha}{s + \alpha} e^{-s(x+\eta)} + e^{-s|x-\eta|} \right] J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds.$$

Маючи розв'язки задач теплопровідності та термопружності у вигляді (8)–(10), зведемо сформульовану задачу керування до оберненої задачі термопружності. Для цього розв'язок (10) підставимо у подання (9) і на основі співвідношення (8), після відповідних перетворень, отримаємо наступне інтегральне рівняння першого роду

типу згортки [20] на шукану функцію  $t_*(\rho)$ :

$$\int_0^{\infty} K(\rho, x_1, \xi) t_*(\xi) d\xi = f(\rho), \quad (11)$$

де

$$K(\rho, x_1, \xi) = -\alpha \int_0^{\infty} \frac{s\xi e^{-sx_1}}{s+\alpha} J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds,$$

$$f(\rho) = \varphi(\rho) - \frac{1}{1-\nu} \iiint_0^{\infty} \xi Q(\xi, \eta) A(s, \eta, x_1) J_0(s\xi) J_0(s\rho) d\eta d\xi ds,$$

$$A(s, \eta, x_1) = \frac{e^{-s(x_1+\eta)}}{s+\alpha} [(1+\nu)(1+(s+\alpha)\eta)s + \alpha - s] - e^{-s|x_1-\eta|},$$

$$\varphi(\rho) = \frac{\varphi_*(\rho)}{\alpha_T E}.$$

Таким чином, вихідна задача оптимізації зведена до оберненої задачі термопружності, яка описується інтегральним рівнянням (11).

Застосувавши до отриманого рівняння (11) інтегральне перетворення Ганкеля за координатою  $\rho$ , можна знайти його аналітичний розв'язок, який подамо так:

$$t_*(\rho) = \frac{1}{1-\nu} \iiint_0^{\infty} \xi \frac{s+\alpha}{\alpha} e^{sx_1} Q(\xi, \eta) A(s, \eta, x_1) J_0(s\xi) J_0(s\rho) d\xi d\eta ds - \\ - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \xi s(s+\alpha) e^{sx_1} \varphi(\xi) J_0(s\xi) J_0(s\rho) d\xi ds. \quad (12)$$

#### 4. Числовий аналіз розв'язку

Як приклад за допомогою формули (12) дослідимо оптимальний розподіл температури довкілля, який забезпечує нульовий розподіл першого інваріанта тензора напружень  $\varphi(\rho) = 0$  на межовій поверхні півпростору  $x_1 = 0$ , коли внутрішні теплові джерела зосереджені у круговій області  $D = \{\rho : \rho \leq a\}$ ,  $a = \text{const}$  площини  $x = x_0$ , паралельної до межі півпростору, тобто  $Q(\rho, x) = q(\rho)H(a-\rho)\delta(x-x_0)$ , де  $H(\rho)$  — функція Гевісайда;  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака.

На рис. 1 кривими 1–4 зображено поведінку безрозмірної функції керування  $t(\rho) = \frac{t_*(\rho)}{q_0}$ , розрахованої за формулою (12) для випадку, коли  $q(\rho) = q_0(1-\rho^2)$ ,  $q_0 = \text{const}$ ,  $\alpha = 2$ ,  $a = 1$ ,  $\nu = 0.3$  і відповідно  $x_0 = 0.2; 0.3; 1.0; 3.0$ . Як видно з рисунка і як показали дослідження, за близького розташування теплових джерел до межі півпростору і малих значеннях коефіцієнта теплообміну функція керування має осцилюючий за радіальною координатою характер і приймає як додатні, так і від'ємні значення. Це означає, що у цьому випадку для забезпечення нульового

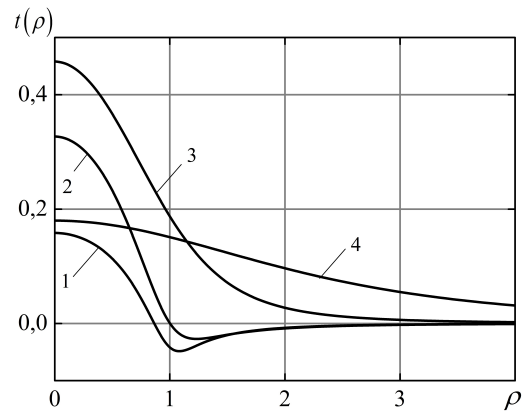


Рис. 1.

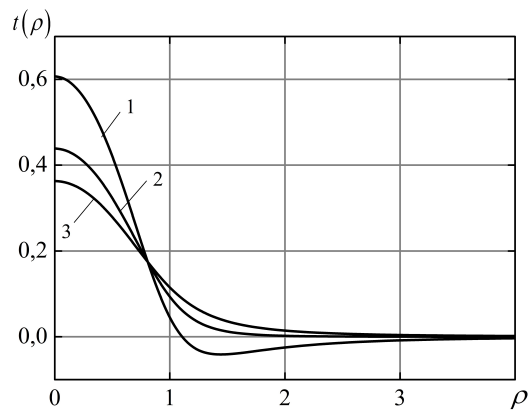


Рис. 2.

розподілу першого інваріанта тензора напружень на межовій поверхні півпростору зони нагрівання повинні чергуватися із зонами охолодження. При віддаленні області тепловиділення  $D$  від межової поверхні півпростору, за фіксованого значення коефіцієнта теплообміну  $\alpha$ , функція керування приймає лише додатні значення і забезпечити нульовий розподіл першого інваріанта тензора напружень на межовій поверхні півпростору можна за допомогою лише нагрівання межової поверхні. Встановлено також, що віддалення області тепловиділення  $D$  від межової поверхні півпростору спочатку призводить до незначного зростання абсолютної величини функції керування (крива 3), а після деякого граничного значення  $x_0^*$  до спадання цієї величини зі збільшенням зони охолодження у напрямку зростання радіальної

координати (крива 4). Пов'язано це з тим, що в межах розглядуваної математичної моделі термопружності (1)–(5), віддалення теплових джерел від межевої поверхні півпростору зменшує їх вплив на температурні напруження цієї поверхні, що дає змогу забезпечити поставлену мету керування (7) меншим за абсолютною величиною значенням температури довкілля. При збільшенні чи зменшенні розміру  $a$  області  $D$  функція керування якісно зберігає наведену на рис. 1 поведінку з відповідним збільшенням чи зменшенням зони охолодження у напрямку зростання чи спадання радіальної координати.

На рис. 2 кривими 1–3 зображено поведінку безрозмірної функції керування  $t(\rho) = \frac{t_*(\rho)}{q_0}$ , розрахованої за формулою (12), для випадку нагрівання півпростору вказаними вище джерелами тепла, за сталого значення параметра  $x_0 = 0.5$  і змінних значеннях коефіцієнта теплообміну  $\alpha = 1.0; 3.0; 30.0$ . Як бачимо, збільшення значення коефіцієнта теплообміну  $\alpha$ , тобто підвищення інтенсивності тепловідведення через межеву поверхню півпростору, дає змогу досягнути поставленої мети меншою за модулем функцією керування, за решти незмінних параметрів. При цьому для фіксованого значення  $x_0$  за малих значень коефіцієнта теплообміну функція керування також має осцилюючий за радіальною координатою характер.

Зазначимо, що у випадку, коли закон розподілу температури довкілля  $t(\rho)$  є відомим, а невідомим є коефіцієнт теплообміну, то сформульовану вище задачу оптимізації можна переформулювати і розглядати як задачу на відшукання значення коефіцієнта теплообміну  $\alpha$ , за якого буде досягати мінімуму функціонал (6).

Із формули (12) видно, що існування функції керування  $t(\rho)$ , яка забезпечує точну нижню грань функціонала (6), безпосередньо пов'язане з існуванням невластних інтегралів, що стоять у правій частині цієї формули. Якщо функції  $Q(\rho, x)$  і  $\varphi(\rho)$  або інші параметри задачі є такими, що наведені вище інтеграли розбігаються, то це означатиме, що припущення про існування у просторі неперервних функцій керування  $t(\rho)$ , яка забезпечує точну нижню грань функціонала (6), порушується. Тоді, аналогічно як і у працях [2, 17], за допомогою розв'язку (12) у просторі неперервних функцій можна побудувати функціональну послідовність, яка мінімізуватиме критерій оптимальності (6).

## 5. Висновки

Для осесиметрично деформованого півпростору, який нагрівається внутрішніми стаціонарними джерелами тепла, сформульовано задачу оптимального керування розподілом першого інваріанта тензора температурних напружень у деякому заданому перерізі, паралельному до його межевої поверхні. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін або коефіцієнт теплообміну, якщо закон розподілу температури оточуючого середовища відомий, а за критерій оптимальності — мінімальне значення рівномірного відхилення керуваного розподілу напружень від заданого. На основі припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, сформульована задача оптимізації зведена до оберненої задачі термопружності, яку описує інтегральне рівняння першого роду типу згортки. За допомогою інтегрально-го перетворення Ганкеля побудовано аналітичний розв'язок оберненої задачі. Для

конкретного випадку теплового навантаження півпростору числово проаналізовано поведінку знайденого керування. Якщо припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, порушується, запропоновано методику побудови у просторі неперервних функцій послідовності, яка мінімізуватиме цей критерій.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. M.R. Eslami, R.B. Hetnarski, J. Ignaczak, N. Noda, N. Sumi, Y. Tanigawa, *Theory of elasticity and thermal stresses: Explanations, problems and solutions*, Dordrecht, Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-6356-2
2. Р.М. Кушнір, В.С. Попович, А.В. Ясінський, *Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл, Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл*, Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: В. 5 т., т. 5, Львів, Сполом, 2011.
3. F. Ashida, T. Morimoto, T. Yamada, *Adaptive control of maximum thermal stress in a smart piezocomposite disk*, J. Thermal Stresses, **39** (2016), no.3, 314–325.  
<https://doi.org/10.1080/01495739.2015.1125199>
4. R. Kushnir, A. Yasinsky, *Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone*, J. Thermal Stresses, **33** (2010), no.3, 251–261. DOI: 10.1080/01495730903542969
5. R.M. Kushnir, A.V. Yasinsky, *Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material*, J. Engineering Mathematics, **78** (2013), no.1, 83–98.  
<https://doi.org/10.1007/s10665-011-9467-3>
6. J. Taler, P. Dzierwa, M. Jaremkiewicz, D. Taler, K. Kaczmarek, M. Trojan, *Thermal stress monitoring in thick-walled pressure components based on the solutions of the inverse heat conduction problems*, J. Thermal Stresses, **41** (2018), no.10–12, 1501–1524.  
<https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1520621>
7. В.Ф. Чекурін, Л.І. Постолакі, *Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним напруженням станом циліндра*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **60** (2017), no.2, 105–116.
8. F. Ashida, S. Sakata, K. Matsumoto, *Control of thermal stress in a piezo-composite disk*, J. Thermal Stresses, **30** (2007), no.1, 1025–1040. DOI: 10.1080/01495730701499081
9. S. Ding, G. Li, B. Luo, *Active control thermal-loading method to ameliorate stress in aeroengine turbine disk*, J. Thermophys. Heat Transfer, **27** (2013), no.2, 274–285.  
DOI: 10.2514/1.T3907
10. A. Deka, D. Datta, *B-spline curve based optimum profile on annular fins using multiobjective genetic algorithm*, J. Thermal Stresses, **40** (2017), no.6, 733–746.  
<https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1276419>
11. S. Ding, T.-P. Wu, *Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties*, Inter. J. Mechanics and Materials in Design, **14** (2018), no.4, 527–549.
12. A. Elswaf, F. Ashida, S. Sakata, *Optimum structure design of a multilayer piezo-composite disk for control of thermal stress*, J. Thermal Stresses, **35** (2012), no.9, 805–819.  
DOI: 10.1080/01495739.2012.689233
13. M. Nemat-Alla, *Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials*, Acta Mechanica, **208** (2009), 147–161.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-008-0136-1>

14. Q. Yang, B. Gao, Z. Xu, W. Xie, S. Meng, *Topology optimisations for integrated thermal protection systems considering thermo-mechanical constraints*, J. Applied Therm. Engineering, **150** (2019), no.5, 995–1001. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.01.067>
15. Y. Ootao, *Inverse problem of thermal deformation in a cylinder*, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer, Dordrecht, **5** (2014), 2578–2585.
16. A. Yasinsky, *Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems*, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer, Dordrecht, **2** (2014), 916–924.
17. A. Yasinsky, Y. Tokovyy, O. Ierokhova, *Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources*, J. Thermal Stresses, **39** (2016), no.9, 1084–1097. DOI: 10.1080/01495739.2016.1192854
18. А. Ясінський, *Оптимізація осесиметричних температурних переміщень півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., **97** (2025), 158–168. doi: <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.158-168>
19. S.J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers*, New York, Dover Publ., 1993.
20. C. Corduneanu, *Integral equations and applications*, Cambridge, Cambridge univer. press, 2008.

*Стаття: вперше надійшла 23.08.2026  
прийнята до друку 15.04.2026  
опублікована 29.04.2026*

## OPTIMAL CONTROL OF AXISYMMETRIC STRESS IN A HALF-SPACE VIA CONVECTIVE HEAT TRANSFER

Anatoliy YASINSKY<sup>1</sup>, Valeriy KOZYTSKY<sup>1</sup>,  
Volodymyr FLYUD<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Ivan Franko Lviv National University,  
Universytetska str., 1, L'viv, 79000*

<sup>2</sup>*Opole University of Technology,  
Prózkowska Street 76, 45-758, Opole*

*e-mail: yasinsky.anatoliy@gmail.com, ORCID: 0009-0007-9451-6436*

*e-mail: vaklviv@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7977-9667*

*e-mail: volodymyr.flyud@lnu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-2292-6472*

An axisymmetric steady-state problem of optimal control of thermal stresses in a half-space heated by internal heat sources is formulated and studied. The control is implemented via convective heat transfer with the surrounding environment. A solution to the inverse problem of thermoelasticity, to which the formulated control problem is reduced, is constructed in the space of continuous functions. For specific cases of thermal loading of the half-space, the features of the behavior of the obtained solution are investigated numerically and analyzed.

*Key words:* optimal control, inverse thermoelasticity problem, thermal stresses.