

УДК 539.3

РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ, З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН НА ЇЇ ПРОДОВЖЕННІ

Микола СЛОБОДЯН, Лукіян МАРКЕВИЧ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-5357-8584
e-mail: Lukiiian.Markevych@lnu.edu.ua
ORCID: 0009-0005-7445-0375*

Розв'язано задачу про розтяг безмежної ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною ненаскрізною прямолінійною тріщиною. Вважається, що під дією зовнішнього навантаження на нескінченності на продовженні ненаскрісної тріщини утворилися пластичні зони, для яких виконуються умови пластичності Треска-Сен-Венана. Оскільки тріщина є ненаскрізною, тому розв'язок сформульованої задачі шукався у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (класична теорія). Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Побудовано графіки для довжин пластичних зон в залежності від зовнішнього навантаження та геометричних параметрів задачі.

Ключові слова: пластинка, тріщина, пластичні зони, граничні умови, теорія пружності, плоска задача, задача згину пластини, комплексні потенціали, задача лінійного спряження, сингулярні інтегральні рівняння, числові методи, коефіцієнти інтенсивності.

1. Вступ.

З технічних міркувань у пластинчастих конструкційних елементах можуть міститися отвори, а під час їх встановлення чи експлуатації можуть утворюватися ненаскрізні тріщини, які суттєво впливають на перерозподіл напружено-деформованого стану. Тому розробка та удосконалення методів оцінки напружено-деформованого стану пластин із тріщинами є важливою науковою проблемою прикладної математики.

Задача про знаходження довжин пластичних зон з використанням умови пластичності Мізеса у вершинах поверхневих тріщин в трубі розв'язана у статті [1]. У праці [2] розв'язано задачу згину нескінченної кусково-однорідної ізотропної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною наскрізною тріщиною, береги якої контактуються. Задачу про згин смуги з наскрізною тріщиною на продовженні якої утворилися пластичні зони розглянуто у [3]. У статті [4] досліджено задачу про розтяг круглої пластини з радіальною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони.

Отже, задачі розтягу пластин з отвором та тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, є актуальними.

2. Формулювання задачі

Розглянемо безмежну ізотропну пластину товщиною $2h$, яка містить наскрізний круговий отвір радіуса R та ненаскрізну прямолінійну радіальну тріщину завдовжки $2l$. Береги ненаскрізної тріщини та межа кругового отвору вільні від зовнішнього навантаження. Декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ розмістимо у серединній площині пластини з початком у центрі кругового отвору, при чому вісь Ox направимо по тріщині, а вісь $O\tilde{z}$ — перпендикулярно до серединної площини пластини. Введемо полярну систему координат $Or\theta$ з центром у точці O та полярною віссю Ox . У центрі тріщини розмістимо декартову систему координат $O_1x_1y_1\tilde{z}_1$. За дії рівномірно розподіленого розтягувального навантаження на безмежності P_1 і P_2 (див. рис. 1) на продовженні тріщини у областях «2» утворилися прямолінійні пластичні зони завдовжки w_1 і w_2 , а матеріал у перемичці (у області «1») за $h_1 \leq \tilde{z}_1 \leq h$ і $-l \leq x_1 \leq l$, також перейшов у пластичний стан. Через L позначимо межу кругового отвору; лінію, де розміщена тріщина позначимо L_1 , пластичні зони — L'_1 і L''_1 , відстань між центром отвору та центром тріщини — x_0 ; область всередині кругового отвору — S^+ , а ззовні — S^- ; довжини пластичних зон — w_1 і w_2 ; вершини тріщини — a і b ; вершини пластичних зон — c і d ; $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$.

Оскільки у пластині міститься ненаскрізна тріщина, тому розв'язок сформульованої задачі подамо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (класична теорія згину пластини), за наступних граничних умов:

— на межі кругового отвору:

$$\sigma_{Pr} = 0, \quad \tau_{Pr\theta} = 0, \quad M_r = 0, \quad P_r = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

де σ_{Pr} і $\tau_{Pr\theta}$ — компоненти тензора напружень у полярній системі координат, M_r — згинальний момент, P_r — узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила;

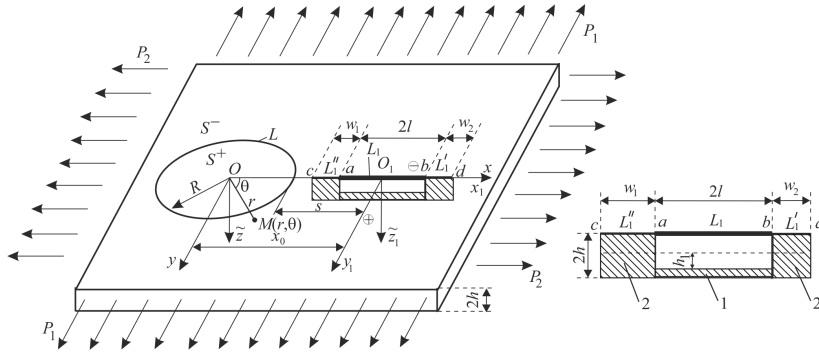


Рис. 1. Безмежна пластина з круговим отвором та тріщиною і пластичними зонами

— на берегах тріщини:

$$\sigma_{\Pi y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_Y b_1, \quad \tau_{\Pi x_1 y_1}^{\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{\pm} = \sigma_Y b_1, \quad H_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, \quad N_{y_1}^{\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

де $\sigma_{\Pi y_1 y_1}$ і $\tau_{\Pi x_1 y_1}$ — компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, M_{y_1} , $H_{x_1 y_1}$, N_{y_1} — згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила, σ_Y — границя текучості матеріалу, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини з пластичними зонами при $y_1 \rightarrow \pm 0$, $b_1 = \frac{h-h_1}{2h}$, $b_2 = \frac{h^2-h_1^2}{2h}$;

— у пластичних зонах “2”:

$$\sigma_{\Pi y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, \quad \tau_{\Pi x_1 y_1}^{\pm} = \tau_0^{(1)}, \quad M_{y_1}^{\pm} = M_0^{(1)}, \quad H_{x_1 y_1}^{\pm} = H_0^{(1)}, \quad N_{y_1}^{\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1', \quad (3)$$

$$\sigma_{\Pi y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, \quad \tau_{\Pi x_1 y_1}^{\pm} = -\tau_0^{(2)}, \quad M_{y_1}^{\pm} = M_0^{(2)}, \quad H_{x_1 y_1}^{\pm} = -H_0^{(2)}, \quad N_{y_1}^{\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1'', \quad (4)$$

де $\sigma_0^{(1)}$, $\sigma_0^{(2)}$, $\tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(2)}$ — невідомі нормальні та дотичні напруження у пластичних зонах, $M_0^{(1)}$, $M_0^{(2)}$, $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ — невідомі згинальні і крутні моменти у пластичних зонах.

3. Розв’язок задачі

З використанням комплексних потенціалів та задач лінійного спряження, як це зроблено в роботі [5], для однієї тріщини отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $Y(\eta)$ та $G(\eta)$, яка у безрозмірних змінних буде мати вигляд ([5])

$$\text{Im} \left(\int_{-1}^1 \left\{ K(\eta, \xi) Y(\eta) + L(\eta, \xi) \overline{Y(\eta)} \right\} d\eta \right) + \text{Re} \left(\frac{\tilde{c}'_0}{X^2} \right) = \tilde{c}', \quad \xi \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left(\int_{-1}^1 \left\{ K(\eta, \xi) Y(\eta) + L(\eta, \xi) \overline{Y(\eta)} \right\} d\eta \right) - \text{Im} \left(\frac{\tilde{c}'_0}{X^2} \right) + \\ & + \frac{q}{2} \text{Re} \left(\int_{-1}^1 \left\{ R(\eta, \xi) G(\eta) + S(\eta, \xi) \overline{G(\eta)} \right\} \right) = \text{Re} H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\operatorname{Im} \left(\int_{-1}^1 \left\{ R(\eta, \xi) G(\eta) + S(\eta, \xi) \overline{G(\eta)} \right\} \right) = \operatorname{Im} H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} K(\eta, \xi) &= \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i(\eta - \xi)} + \tilde{\kappa} K^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) K^{II}(\eta, \xi) - \left(X - \frac{1}{X}\right) K^{III}(\eta, \xi) - \\ &\quad - \frac{1}{X^2} K^{IV}(\eta, \xi), \\ L(\eta, \xi) &= \tilde{\kappa} L^I(\eta, \xi) - \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) L^{II}(\eta, \xi) - \left(X - \frac{1}{X}\right) L^{III}(\eta, \xi) - \frac{1}{X^2} L^{IV}(\eta, \xi), \\ R(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + R^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) R^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) R^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} R^{IV}(\eta, \xi), \\ S(\eta, \xi) &= S^I(\eta, \xi) + \left(1 + \frac{1}{X^2}\right) S^{II}(\eta, \xi) + \left(X - \frac{1}{X}\right) S^{III}(\eta, \xi) + \frac{1}{X^2} S^{IV}(\eta, \xi), \\ K^I(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi i X(TX - 1)}, \\ K^{II}(\eta, \xi) &= -\frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{F}{(TX - 1)^2} + \frac{X^2 + 1}{X(TX - 1)} \right\}, \\ K^{III}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{\pi i \tilde{\kappa}(TX - 1)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{TX - 1}{X^2} - \frac{F}{X} - \frac{F}{X(TX - 1)} \right\}, \\ K^{IV}(\eta, \xi) &= -\frac{\tilde{\kappa} \lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*) X}{2\pi i(TX - 1)}, \\ L^I(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{F}{(TX - 1)^2} - \frac{\lambda(X^2 + 1)}{X(TX - 1)} \right\}, \\ L^{II}(\eta, \xi) &= -\frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi i X(TX - 1)}, \\ L^{III}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{\pi i X^2(TX - 1)} \left(1 + \frac{1}{2(TX - 1)} \right), \\ L^{IV}(\eta, \xi) &= -\frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi i T}, \quad F = X - \frac{1}{X}, \\ R^I(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi X(TX - 1)}, \\ R^{II}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{F}{(TX - 1)^2} - \frac{X^2 + 1}{X(TX - 1)} \right\}, \\ R^{III}(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi} \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{(TX - 1)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{X^2} + \frac{TX - 1}{X^2} - \frac{F}{X} - \frac{F}{X(TX - 1)} \right\}, \\ R^{IV}(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*) X}{2\pi(TX - 1)}, \\ S^I(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{F}{(TX - 1)^2} - \frac{X^2 + 1}{X(TX - 1)} \right\}, \end{aligned}$$

$$S^{II}(\eta, \xi) = \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi X(TX - 1)},$$

$$S^{III}(\eta, \xi) = -\frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{\pi X^2(TX - 1)} \left(1 + \frac{1}{2(TX - 1)}\right),$$

$$S^{IV}(\eta, \xi) = \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)}{2\pi T},$$

$$H(\xi) = p_1 + \frac{p_1 - p_2}{2X^4}, \quad p_1 = \frac{P_1}{\sigma_Y}, \quad p_2 = \frac{P_2}{\sigma_Y}, \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{3 + \nu}{1 - \nu},$$

$$i^2 = -1, \quad q = -\frac{3}{2}(1 + \nu)(1 + \gamma), \quad \gamma = \frac{h_1}{h},$$

$$X = \varepsilon + 0,5\lambda \{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\xi\}, \quad T = \varepsilon + 0,5\lambda \{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\eta\},$$

$$\varepsilon = \frac{x_0}{R}, \quad \lambda = \frac{l}{R}, \quad w_1^* = \frac{w_1}{l}, \quad w_2^* = \frac{w_2}{l},$$

$$\check{c}'_0 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-1}^1 \frac{\lambda(1 + 0,5w_1^* + 0,5w_2^*)Y(\eta)}{T} d\eta \right),$$

$$Y(\eta) = Y_1(\eta) + iY_2(\eta) = \frac{Eh^2}{\sigma_Y(1 + \tilde{\kappa})} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + i \frac{\partial w}{\partial y_1} \right) \right],$$

$$G(l\eta) = G_1(\eta) + iG_2(\eta) = \frac{2\mu h^2}{(1 + \kappa)\sigma_Y i} \left[\frac{\partial(u_{II} + iv_{II})}{\partial x_1} \right], \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

де w — прогин точок пластини у задачі згину, u_{II} , v_{II} — компоненти вектора переміщень у плоскій задачі, $Y_1(\eta)$, $Y_2(\eta)$, $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$ — дійсні функції, $\xi = \frac{x_1}{l}$, $\eta = \frac{t}{l}$ — безрозмірні змінні, E — модуль пружності матеріалу пластини, а ν — коефіцієнт Пуассона.

Систему рівнянь (5)–(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_1(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 G(\eta) d\eta = 0, \quad (8)$$

які виражають відповідно однозначність кутів повороту, прогину пластини та переміщень за обходу контуру тріщини.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ) $k = k_1 + ik_2$ та коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) визначимо за формулами ([6])

$$k^{c,d} = \mp \lim_{x_1 \rightarrow c,d} \left(\frac{h^3}{\sigma_Y} G(x_1) \sqrt{\frac{(c+x_1)(d-x_1)}{l}} \right),$$

$$K^{c,d} = \mp \lim_{x_1 \rightarrow c,d} \left(\frac{h^4}{\sigma_Y} Y(x_1) \sqrt{\frac{(c+x_1)(d-x_1)}{l}} \right).$$

У вершинах пластичних зон c , d КІЗ і КІМ рівні нулеві, тоді

$$k^c = 0, \quad k^d = 0, \quad K^c = 0, \quad K^d = 0. \quad (9)$$

Для пластичних зон L'_1 і L''_1 запишемо умови пластичності Треска-Сен-Венана ([6])

$$\max \left\{ |\sigma_1^{(j)}|, |\sigma_2^{(j)}|, |\sigma_1^{(j)} - \sigma_2^{(j)}| \right\} = \sigma_Y, \quad (10)$$

де

$$\sigma_{1,2}^{(j)} = 0,5 \left(\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_0^{(j)} \pm \sqrt{(\sigma_{xx}^{(j)} - \sigma_0^{(j)})^2 + 4(\tau_0^{(j)})^2} \right), \quad j = 1, 2.$$

Отже, для знаходження невідомих функцій $G_1(\eta)$, $G_2(\eta)$, $Y_1(\eta)$, $Y_2(\eta)$, невідомих нормальних і дотичних напруження у пластичних зонах $\sigma_0^{(1)}$, $\sigma_0^{(2)}$, $\tau_0^{(1)}$, $\tau_0^{(2)}$, невідомих згинальних і крутних моментів у пластичних зонах $M_0^{(1)}$, $M_0^{(2)}$, $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ та довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* отримано систему рівнянь (5)–(10).

4. Числовий аналіз

Було проведено числовий аналіз задачі, який поданий на Рис. 2-3 при $\nu = 0.3$, $\gamma = \frac{h_1}{h} = 0.9$.

Система сингулярних інтегральних рівнянь (5)–(8) розв'язувалася числовим методом механічних квадратур ([7]), а система рівнянь (9), (10) розв'язувалася числовим методом Ньютона.

Рис. 2 побудовано для безрозмірених довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* від параметра $\varepsilon = \frac{s}{R}$ коли $\lambda = \frac{l}{R} = 0.5$, $p_2 = 0$. Графіки 1 (для w_1^*), 2 (для w_2^*) побудовано при $p_1 = 0.6$, графіки 3 (для w_1^*), 4 (для w_2^*) – $p_1 = 0.5$, графіки 5 (для w_1^*), 6 (для w_2^*) – $p_1 = 0.4$.

Рис. 3 отримано для безрозмірених довжин пластичних зон w_1^* , w_2^* від параметра $\varepsilon = \frac{s}{R}$ коли $\lambda = \frac{l}{R} = 0.3$, $p_2 = 0$. Графіки 1 (для w_1^*), 2 (для w_2^*) побудовано при $p_1 = 0.6$, графіки 3 (для w_1^*), 4 (для w_2^*) – $p_1 = 0.5$, графіки 5 (для w_1^*), 6 (для w_2^*) – $p_1 = 0.4$.

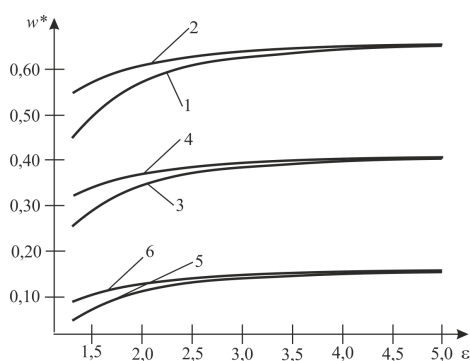


Рис. 2.

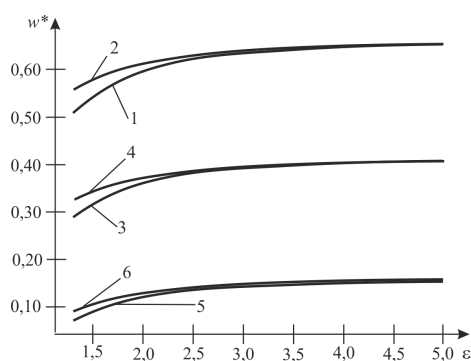


Рис. 3.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Q. Pei, X.-M. Yao, L.-Z. Jin, C.-Y. Zhou, Constraint effect and crack-tip plastic zone of the pipe with internal inclined surface cracks under external pressure, *Journal of Pressure Vessel Technology*, **147** (2025) no.2, 021306 <https://doi.org/10.1115/1.4067676>.
2. M. Slobodian, I. Zvizlo, O. Bilash, M. Sorokatyi, O. Petruchenko, L. Markevych, *Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and*

- radial crack considering the strip contact of its edges*, *Vibroengineering Procedia*, **55** (2024), 54–59. <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24515>.
3. O. Bilash, M. Slobodian, R. Seliverstov, I. Zvizlo, O. Petruchenko, R. Kovalchuk, *Pure bending of a strip (Beam) with a transversal through crack located asymmetrically relative to its axis on the assumption of crack closure and striplike plastic zone near one of the tips*, *AIP Conference Proceedings*, **2949** (2023), 020002 <https://doi.org/10.1063/5.0165477>.
 4. М. Шайнога, Л. Маркевич, *Розтяг круглої пластини з радіальною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони*, Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, **97** (2025), 43–52. <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.043-052>
 5. М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, *Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія*, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
 6. Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук, *Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами*, СПОЛОМ, 2003, 320 с.
 7. М.П. Саврук, В.М. Зеленьак, *Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами*, Львів: РАСТР, 2009, 212 с.

*Стаття: вперше надійшла 29.02.2026
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026*

**TENSION OF A PLATE WITH A HOLE AND A RADIAL
NON-THROUGH CRACK, TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC
ZONES ON ITS EXTENSION****Mykola SLOBODIAN, Lukiian MARKEVYCH**

*Ivan Franko National University of Lviv,
str. Universytetska, 1, Lviv, 79007
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-5357-8584
e-mail: Lukiian.Markevych@lnu.edu.ua
ORCID: 0009-0005-7445-0375*

The problem of the tension of an infinite isotropic plate with a circular hole and a radial non-through rectilinear crack is solved. It is assumed that under the action of external loading at infinity, plastic zones have been formed on the extension of the non-through crack, for which the Tresca-Saint Venant plasticity conditions are satisfied. Since the crack is non-through, the solution of the formulated problem was sought in the form of solutions of two interrelated problems: the plane problem of elasticity theory and the plate bending problem (classical theory). The solution of the problem is constructed using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials, and is reduced to a system of singular integral equations, which is solved numerically using the method of mechanical quadratures. Graphs are plotted for the lengths of the plastic zones depending on the external load and the geometric parameters of the problem.

Key words: plate, crack, plastic zones, boundary conditions, elasticity theory, plane problem, plate bending problem, complex potentials, linear conjugation problem, singular integral equations, numerical methods, stress intensity factors.