

УДК 519.217

## ПРОЦЕСИ ПУАССОНА З НЕЛІНІЙНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ЧАСУ

Оксана ЯРОВА, Юліанна ХИМИШИНЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1 м. Львів, 79000  
e-mail: [oksana.yarova@lnu.edu.ua](mailto:oksana.yarova@lnu.edu.ua)  
ORCID: 0000-0002-6284-1193  
e-mail: [yulianna.khymyshynets@lnu.edu.ua](mailto:yulianna.khymyshynets@lnu.edu.ua)  
ORCID: 0009-0009-0021-9567

Дана робота присвячена дослідженню процесу Пуассона з нелінійним нормуванням. Розглядається процес Пуассона з нелінійною апроксимацією часу  $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ , де  $g(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Знайдено розподіл даного процесу та наведено приклад, що демонструє вплив функції нормування на поведінку ймовірностей.

*Ключові слова:* Процес Пуассона, нелінійна апроксимація, процеси з незалежними приростами, ймовірнісний розподіл.

Дослідження випадкових процесів та систем у змінних масштабах часу дозволяє описати їх граничну поведінку при малих параметрах. У роботах [4, 5] розглядаються рівняння відновлення та напівмарковські випадкові еволюції в умовах нелінійної апроксимації часу. Нелінійне нормування часу використовується для аналізу асимптотики процесів при малих параметрах та дозволяє виділити граничні режими їх функціонування. Підходи пуассонівської апроксимації та граничні результати для процесів з незалежними приростами наведено в [1, 2], що дає змогу дослідити відповідні ймовірнісні розподіли. В даній роботі доліджуються процеси Пуассона з нелінійною апроксимацією часу.

Розглянемо процес Пуассона  $N(t)$  з нелінійним нормуючим множником  $g(\varepsilon)$ , таким що  $g(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Означення 1.**  $N_\varepsilon(t) = N(\frac{t}{g(\varepsilon)})$  — процес Пуассона з нелінійною апроксимацією часу, якщо він набуває цілочислових невід'ємних значень та володіє наступними властивостями:

1.  $N_\varepsilon(0) = 0$
2.  $\forall t_n \quad n = \overline{0, k} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k : N_\varepsilon(t_1) - N_\varepsilon(t_0), \dots, N_\varepsilon(t_k) - N_\varepsilon(t_{k-1})$   
є незалежними
3.  $\forall t, h > 0 : N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t) = N_\varepsilon(h)$
4.  $\mathbb{P}\{N_\varepsilon(h) = 1\} = \lambda h, \quad \mathbb{P}\{N_\varepsilon(h) > 1\} = o(h)$

**Теорема 1.** Нехай  $N_\varepsilon(t)$  — процес Пуассона з нелінійним множником  $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді

$$\mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m\} = \frac{\left(\lambda \frac{t}{g(\varepsilon)}\right)^m e^{-\lambda \frac{t}{g(\varepsilon)}}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

*Доведення.* Позначимо  $p_0(t) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = 0\}$ ,  $p_0(t+h) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) = 0\}$ . Розглянемо

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t) = 0\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) - N_\varepsilon(0) = 0\},$$

$$p_0(t+h) = \mathbb{P}\{\underbrace{N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t)}_{N_\varepsilon(h)} = 0\} p_0(t),$$

$$p_0(t+h) = \left(1 - \lambda \frac{h}{g(\varepsilon)} + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right)\right) p_0(t),$$

$$p_0(t+h) = p_0(t) - \lambda \frac{h}{g(\varepsilon)} p_0(t) + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right) p_0(t) \quad | : h,$$

$$\frac{p_0(t+h)}{h} = \frac{p_0(t)}{h} - \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_0(t) + \frac{o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right)}{h} p_0(t),$$

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_0(t) + \frac{o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right)}{h} p_0(t),$$

при  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_0(t), \\ p_0(0) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(0) = 0\} = 1 \\ \frac{dp_0(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_0(t) \quad | \times \frac{dt}{p_0(t)} \end{cases}$$

$$\frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} dt, \quad \ln |p_0(t)| = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} t + \ln |C|, \quad p_0(t) = e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} C.$$

З початкової умови  $p_0(0) = 1$  маємо, що  $C = 1$ .

Отже,

$$p_0(t) = e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}.$$

Нехай  $p_m(t) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m\}$ ,  $p_m(t+h) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) = m\}$ .

$$\begin{aligned} p_m(t+h) &= \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) = m\} = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t) = 0\} + \\ &\quad + \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m-1\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t) = 1\} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m-k\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t+h) - N_\varepsilon(t) = k\} = \\ &= \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(h) = 0\} + \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m-1\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(h) = 1\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=2}^m \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m - k\} \mathbb{P}\{N_\varepsilon(h) = k\} = \\
 & = p_m(t) \left( 1 - \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right) \right) + p_{m-1}(t) \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + \sum_{k=2}^m p_{m-k}(t) o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right).
 \end{aligned}$$

Отримуємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned}
 p_m(t+h) &= p_m(t) \left( 1 - \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right) \right) + p_{m-1}(t) \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + \sum_{k=2}^m p_{m-k}(t) o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right), \\
 p_m(t+h) &= p_m(t) - \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} p_m(t) + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right) p_m(t) + p_{m-1}(t) \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + \sum_{k=2}^m p_{m-k}(t) o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right), \\
 p_m(t+h) - p_m(t) &= -\frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} p_m(t) + o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right) p_m(t) + p_{m-1}(t) \frac{\lambda h}{g(\varepsilon)} + \sum_{k=2}^m p_{m-k}(t) o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right), \\
 \frac{p_m(t+h) - p_m(t)}{h} &= -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_m(t) + \frac{o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right)}{h} p_m(t) + p_{m-1}(t) \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} + \sum_{k=2}^m \frac{p_{m-k}(t) o\left(\frac{h}{g(\varepsilon)}\right)}{h},
 \end{aligned}$$

при  $h \rightarrow 0$  :

$$\begin{cases} p_m^*(t) = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_m(t) + \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_{m-1}(t); \\ p_m(0) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(0) = m\} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

розглянемо рівняння

$$\begin{aligned}
 p_m^*(t) &= -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_m(t), \quad \frac{dp_m(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_m(t), \\
 \frac{dp_m(t)}{p_m(t)} &= -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} dt, \quad \ln |p_m(t)| = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} t + \ln |C|, \quad \widetilde{p}_m(t) = C e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо частковий розв'язок  $p_m^*(t) = v_m(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}$

$$p_m^*(t) = -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_m(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} + v_m'(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}},$$

підставляємо в рівняння з системи (1)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_m(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} + v_m'(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} &= -\frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_m(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} + \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_{m-1}(t), \\
 v_m'(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} &= \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} p_{m-1}(t), \quad v_m'(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} e^{\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} p_{m-1}(t).
 \end{aligned}$$

Підставимо  $m = 1$

$$v_1'(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} e^{\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} p_0(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} e^{\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)}, \quad v_1(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} t.$$

Розглянемо систему

$$\begin{cases} v_m'(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} e^{\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} p_{m-1}(t); \\ p_m^*(t) = v_m(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}, \end{cases} \quad (2)$$

з рівняння системи (2):

$$p_{m-1}(t) = v_{m-1}(t)e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}},$$

підставляємо в рівняння системи (2):

$$v'_m(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} e^{\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} v_{m-1}(t) e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_{m-1}(t)$$

$$m = 1: \quad v'_1(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_0(t)$$

$$m = 2: \quad v'_2(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_1(t), \quad v_1(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} t, \quad v'_2(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} t, \quad v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2(g(\varepsilon))^2}$$

$$m = 3: \quad v'_3(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} v_2(t), \quad v'_3(t) = \frac{\lambda}{g(\varepsilon)} \frac{(\lambda t)^2}{2(g(\varepsilon))^2}, \quad v_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{2 \cdot 3(g(\varepsilon))^3}$$

$$v_m(t) = \frac{\left(\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}\right)^m}{m!}$$

Отже

$$p_m^*(t) = \frac{\left(\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}\right)^m}{m!} e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}, \quad p_m(t) = \widetilde{p}_m(t) + p_m^*(t), \quad p_m(t) = C e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}} + \frac{\left(\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}\right)^m}{m!} e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}},$$

підставляючи початкову умову  $p_m(0) = 0$ , маємо  $C = 0$ . Звідси отримуємо

$$p_m(t) = \mathbb{P}\{N_\varepsilon(t) = m\} = \frac{\left(\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}\right)^m}{m!} e^{-\frac{\lambda t}{g(\varepsilon)}}.$$

□

Розглянемо приклад. Середня кількість запитів, що обробляються сервером за одну хвилину, дорівнює трьом. Під впливом зовнішнього навантаження на систему (фонове шифрування або перевірка безпеки) швидкість обробки запитів зменшується. Вплив навантаження на систему описується параметром  $\varepsilon = 0.5$ , а уповільнення часу — функцією  $g(\varepsilon)$ . Нехай  $t \in [0, 5]$  — час роботи сервера. Знайти ймовірність того, що за час  $t$  сервер обробить рівно п'ять запитів, якщо

1.  $g(\varepsilon) = \sin \varepsilon$     3.  $g(\varepsilon) = 1$
2.  $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$     4.  $g(\varepsilon) = \varepsilon$

Оскільки без впливу зовнішнього навантаження середня кількість запитів за одну хвилину дорівнює 3, то  $\mathbb{E}(N(1)) = \lambda \cdot 1 = 3$ , звідки  $\lambda = 3$ . Ймовірність того, що сервер обробить рівно п'ять запитів за час  $t$ , має вигляд

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = 5\right\} = \frac{\left(\lambda \frac{t}{g(\varepsilon)}\right)^5 e^{-\lambda \frac{t}{g(\varepsilon)}}}{5!}.$$

1.  $g(\varepsilon) = \sin \varepsilon$

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{t}{\sin 0.5}\right) = 5\right\} = \frac{\left(3 \cdot \frac{t}{\sin 0.5}\right)^5 e^{-3 \cdot \frac{t}{\sin 0.5}}}{5!}.$$

При  $t \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{1}{\sin 0.5}\right) = 5\right\} = \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{\sin 0.5}\right)^5 e^{-3 \cdot \frac{1}{\sin 0.5}}}{5!} \approx 0.1532,$$

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{2}{\sin 0.5}\right) = 5\right\} = \frac{\left(3 \cdot \frac{2}{\sin 0.5}\right)^5 e^{-3 \cdot \frac{2}{\sin 0.5}}}{5!} \approx 0.0094,$$

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{3}{\sin 0.5}\right) = 5\right\} = \frac{\left(3 \cdot \frac{3}{\sin 0.5}\right)^5 e^{-3 \cdot \frac{3}{\sin 0.5}}}{5!} \approx 0.0001,$$

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{4}{\sin 0.5}\right) = 5\right\} = \frac{\left(3 \cdot \frac{4}{\sin 0.5}\right)^5 e^{-3 \cdot \frac{4}{\sin 0.5}}}{5!} \approx 1.10344 \times 10^{-6}.$$

Аналогічно обраховано значення для  $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ,  $g(\varepsilon) = 1$  та  $g(\varepsilon) = \varepsilon$ . Візуалізуємо поведінку ймовірності

$$\mathbb{P}\left\{N\left(\frac{t}{g(0.5)}\right) = 5\right\}$$

залежно від параметра

$t \in [0, 5]$  для різних функцій уповільнення часу  $g(\varepsilon)$ .

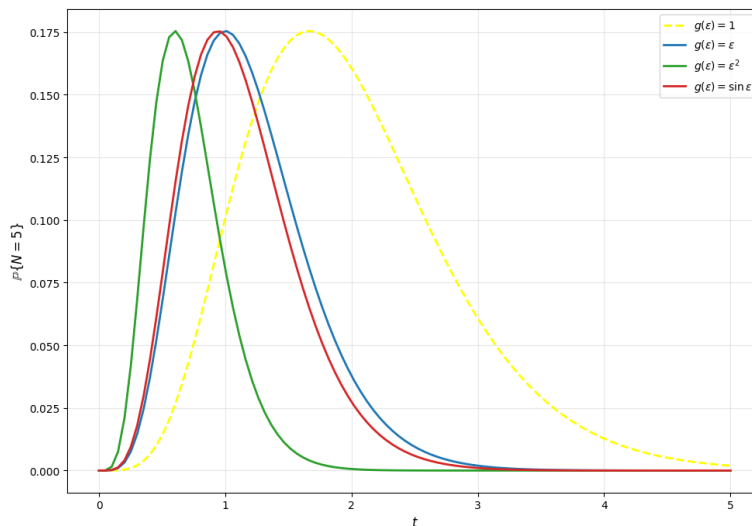


Рис. 1. Порівняння залежностей ймовірності для всіх функцій  $g(\varepsilon)$

З рисунка видно, що функція нормування  $g(\varepsilon)$  визначає ефективну інтенсивність процесу обробки запитів. При менших значеннях  $g(\varepsilon)$ , зокрема при  $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$  відбувається сильніше стискання часу, внаслідок чого ймовірність обробки п'яти запитів досягає максимуму при менших  $t$ . Натомість при  $g(\varepsilon) = 1$  процес відповідає стандартному пуассонівському потоку без уповільнення, і максимум ймовірності зміщується вправо, що відображає повільніше досягнення заданої кількості запитів.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Koroliuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. *Poisson approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching*// Stochastic Analysis and Applications. – 2011. – V.29. – P. 769–778.

2. Samoilenko I.V. *Large deviations for random evolutions with independent increments in the scheme of the Poisson approximation*// Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2012. – no.85. – P. 107–114. doi:10.1090/S0094-9000-2013-00878-3.
3. Skorokhod A.V., Lectures on the theory of stochastic processes, Lybid, 1990, 168 p.
4. Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. *The renewal equation in nonlinear approximation*// Mat. Stud. – 2021. – V.56, No.1. – P. 103–106. doi:10.30970/ms.56.1.103-106.
5. Yarova O.A. *Sumish napivmarkovskyykh vypadkovyykh evoliutsii v neliniinii aproksymatsii*// Вісник of Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2025. – V.97. – P. 114–119. doi:10.30970/vmm.2025.97.114-119.

*Стаття: вперше надійшла 10.12.2025  
прийнята до друку 15.04.2026  
опублікована 29.04.2026*

## POISSON PROCESSES WITH NONLINEAR TIME APPROXIMATION

**Oksana YAROVA, Yulianna KHYMYSHYNETS**

*Ivan Franko Lviv National University,  
Universytetska str., 1, L'viv, 79000  
e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua  
ORCID: 0000-0002-6284-1193  
e-mail: yulianna.khymyshynets@lnu.edu.ua  
ORCID: 0009-0009-0021-9567*

This work is devoted to the study of a Poisson process with nonlinear time normalization. We consider a Poisson process with nonlinear time approximation  $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ , where  $g(\varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . The distribution of the process is derived, and an example illustrating the effect of the normalization function on the behavior of probabilities is presented.

*Key words:* Poisson process, nonlinear time approximation, processes with independent increments, probability distribution.