ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 88–94
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 88–94
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.88-94

УДК 517.9

ЗОВНІШНІЙ ВПЛИВ НА ДИНАМІКУ ПОПУЛЯЦІЙ, ЯКІ СКЛАДАЮТЬСЯ З ОСОБИН ДВОХ СТАТЕЙ

Галина БАРАБАШ, Юліан ЄРЕМЕНКО

Львівський національний університет ім. І. Франка,
м. Львів, 79000, вул. Університетська, 1
e-mail: galynabarabash71@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3258-6518
e-mail: julian_lviv@yahoo.com, ORCID: 0009-0006-7668-7744

Дана робота присвячена опису динаміки популяції за допомогою диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних для твірної функції моментів. Використовуючи властивості твірної функції кумулянт, досліджено зовнішній вплив на число особин популяції. Встановлено умови збереження розміру популяції на сталому рівні.

Ключові слова: популяційна динаміка, диференціальні рівняння в частинних похідних.

В аграрному секторі економіки за обмеженості ресурсів виникає проблема керування числом особин популяції, необмежене зростання числа тварин приємне для шанувальників природи, але не є економічно можливим і доцільним. Природа не дає стовідсоткових гарантій, процеси розмноження описуються випадковими величинами. Виникає питання скільки і яких тварин вилучати, щоб зберігати популяцію сталою, не втрачаючи можливостей її зростання.

Припустимо, що популяція має тільки два типи особин, число яких в момент t виражається випадковими величинами $X(t)$ і $Y(t)$. Нехай можлива скінчена кількість змін числа особин популяції з сукупною ймовірністю одночасних переходів за інтервал часу Δt

$$P\{\Delta X(t) = j,\ \Delta Y(t) = k \mid X(t), Y(t)\} = f_{jk}(X, Y)\Delta t, \quad j \neq 0,$$

де j і k — ненульові цілі числа $(j^2 + k^2 \neq 0)$, а f_{jk} — деяка невід'ємна функція випадкових величин $X(t)$ і $Y(t)$.

Відомо, що такий процес описується диференціальним рівнянням в частинних похідних відносно твірної функції розподілу ймовірностей

2020 Mathematics Subject Classification: 39A14

$$\frac{\partial P(x,y,t)}{\partial t} = \sum_{j^2+k^2\neq 0} \left(x^j y^k - 1\right) f_{jk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right) P(x,y,t),$$

де $f_{jk}(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y})$ — оператор, який діє на $P(x,y,t)$. Відповідне рівняння для твірної функції моментів має вигляд

$$\frac{\partial M(\theta,\varphi,t)}{\partial t} = \sum_{j^2+k^2\neq 0} \left(e^{j\theta+k\varphi} - 1\right) f_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) M(\theta,\varphi,t),$$

де $M(\theta,\varphi,t) \equiv P\left(e^{\theta}, e^{\varphi}, t\right)$.

Розглянуто процес розмноження і загибелі в популяції, що має особини двох статей — жіночої та чоловічої, число яких описують випадкові величини $X(t)$ і $Y(t)$.

Нехай в початковий момент $t = 0$ число самок дорівнює a, а число самців $-b$. Припускаємо, що швидкість розмноження дорівнює β, відношення числа самок до числа самців при народженні дорівнює $\frac{p}{1-p}$. Ймовірність того, що в інтервалі часу Δt від даної самки народиться нова особина жіночої статті дорівнює $\beta p\Delta t$, а ймовірність народження нової особини чоловічої статті дорівнює $\beta(1-p)\Delta t$. Ймовірність того, що вся популяція в інтервалі часу Δt створить нову особину жіночої або чоловічої статті дорівнює відповідно $\beta pX\Delta t$ і $\beta(1-p)X\Delta t$.

Крім цього, припускаємо також, що ймовірність природньої смерті однієї самки за інтервал часу Δt дорівнює $\mu\Delta t$, а ймовірність насильницької смерті однієї самки за інтервал часу Δt дорівнює $s\Delta t$, тому для всієї популяції ймовірність загибелі однієї самки дорівнює $(\mu + s - 2\mu s)X\Delta t$. Аналогічно припускаємо, що ймовірність природньої смерті одного самця за інтервал часу Δt дорівнює $\mu'\Delta t$, а ймовірність насильницької смерті одного самця за інтервал часу Δt дорівнює $s'\Delta t$, тому для всієї популяції ймовірність загибелі одного самця дорівнює $(\mu' + s' - 2\mu' s')\,Y\Delta t$.

Функція f_{jk} приймає такі ненульові значення

$$f_{10} = \beta pX, \quad f_{01} = \beta(1-p)X,$$
$$f_{-10} = (\mu + s - 2\mu s)X,$$
$$f_{0-1} = (\mu' + s' - 2\mu' s')\,Y.$$

Отримали диференціальне рівняння в частинних похідних для твірної функції моментів

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left(\beta p\left(e^{\theta}-1\right) + (\mu + s - 2\mu s)\left(e^{-\theta}-1\right) + \beta(1-p)\left(e^{\varphi}-1\right)\right)\frac{\partial M}{\partial\theta} + $$
$$+ (\mu' + s' - 2\mu' s')\left(e^{-\varphi}-1\right)\frac{\partial M}{\partial\varphi}$$

з початковою умовою

$$M(\theta,\varphi,0) = e^{a\theta+b\varphi}.$$

Відповідні характеристичні рівняння мають такий вигляд:

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\theta}{\beta p\left(e^{\theta}-1\right)+(\mu+s-2\mu s)\left(e^{-\theta}-1\right)+\beta(1-p)\left(e^{\varphi}-1\right)} =$$
$$= \frac{d\varphi}{\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)\left(e^{-\varphi}-1\right)} = \frac{dM}{0}.$$

Перший інтеграл знаходимо з рівняння $dM = 0, M = C = \text{const}$. Поступово розв'яжемо систему

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\varphi}{\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)\left(e^{-\varphi}-1\right)},$$
$$\left(e^{\varphi}-1\right)e^{\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)t} = C_1, \quad C_1 = \text{ const}.$$
$$\frac{dt}{1} = \frac{d\theta}{\beta p\left(e^{\theta}-1\right)+(\mu+s-2\mu s)\left(e^{-\theta}-1\right)+\beta(1-p)C_1 e^{(-\mu'-s'+2\mu's')t}}.$$

Зробивши заміну $e^{\theta} = z(t)$, де $z(t)$ — нова шукана функція, маємо

$$\frac{dz}{dt} + z\left(\beta p+\mu+s-2\mu s-\beta(1-p)C_1 e^{\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}\right) = z^2\beta p+\mu+s-2\mu s.$$

Одержали рівняння Рікаті, яке в квадратурах не вдалось розв'язати. Застосуємо твірну функцію кумулянт $K = \ln M$. Отримали диференціальне рівняння в частинних похідних для твірної функції кумулянт

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left(\beta p\left(e^{\theta}-1\right)+(\mu+s-2\mu s)\left(e^{-\theta}-1\right)+\beta(1-p)\left(e^{\varphi}-1\right)\right)\frac{\partial K}{\partial \theta}+$$
$$+\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)\left(e^{-\varphi}-1\right)\frac{\partial K}{\partial \varphi}$$

з початковою умовою

$$K(\theta,\varphi,0) = a\theta+b\varphi.$$

Враховуючи звичайний розклад твірної функції кумулянт

$$K \equiv k_{10}\theta+k_{01}\varphi+\frac{k_{20}\theta^2}{2!}+\frac{2k_{11}\theta\varphi}{2!}+\frac{k_{02}\varphi^2}{2!}+\cdots$$

та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\theta,\varphi,\theta^2,\theta\varphi,\varphi^2$, отримаємо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dk_{10}}{dt} = (\beta p-\mu-s+2\mu s)k_{10}, \\ \frac{dk_{01}}{dt} = \beta(1-p)k_{10}-\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)k_{01}, \\ \frac{dk_{20}}{dt} = (\beta p+\mu+s-2\mu s)k_{10}+2(\beta p-\mu-s+2\mu s)k_{20}, \\ \frac{dk_{11}}{dt} = \beta(1-p)k_{20}+\left(\beta p-\mu-s+2\mu s-\mu'-s'+2\mu's'\right)k_{11}, \\ \frac{dk_{02}}{dt} = \beta(1-p)k_{10}+\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)k_{01}+2\beta(1-p)k_{11}- \\ -2\left(\mu'+s'-2\mu's'\right)k_{02}. \end{cases}$$

Для першого рівняння системи маємо задачу Коші

$$\frac{dk_{10}}{dt} = (\beta p - \mu - s + 2\mu s)k_{10}, \quad k_{10}(0) = a.$$

Отримали розв'язок

$$k_{10} = ae^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}.$$

Аналогічно для другого рівняння системи маємо задачу Коші

$$\frac{dk_{01}}{dt} = \beta(1-p)k_{10} - (\mu' + s' - 2\mu' s')\, k_{01}, \quad k_{01}(0) = b.$$

Одержали розв'язок

$$k_{01} = be^{\left(-\mu' - s' + 2\mu' s'\right)t} +$$
$$+\frac{\beta(1-p)a}{\beta p - \mu - s + 2\mu s + \mu' + s' - 2\mu' s'}\left(e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t} - e^{\left(-\mu' - s' + 2\mu' s'\right)t}\right).$$

Далі послідовно розв'язуючи диференціальні рівняння, маємо такі розв'язки:

$$k_{20} = \frac{(\beta p + \mu + s - 2\mu s)a}{\beta p - \mu - s + 2\mu s}\left(e^{2(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t} - e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}\right),$$

$$k_{02} = \frac{\beta(1-p)a\, e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{\beta p - \mu - s + 2\mu s + 2\mu' + 2s' - 4\mu' s'} + b\, e^{\left(-\mu' - s' + 2\mu' s'\right)t} +$$
$$+\frac{(\mu' + s' - 2\mu' s')\,\beta(1-p)a}{\beta p - \mu - s + 2\mu s + \mu' + s' - 2\mu' s'}\left(\frac{e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{\beta p - \mu - s + 2\mu s + 2\mu' + 2s' - 4\mu' s'} -\right.$$
$$\left.-\frac{e^{\left(-\mu' - s' + 2\mu' s'\right)t}}{\mu' + s' - 2\mu' s'}\right) +$$
$$+\frac{2\beta^2(1-p)^2(\beta p + \mu + s - 2\mu s)a}{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)}\left(\frac{e^{2(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{2(\beta p - \mu - s + 2\mu s + \mu' + s' - 2\mu' s')^2} -\right.$$
$$\left.-\frac{e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{(\mu' + s' - 2\mu' s')(\beta p - \mu - s + 2\mu s + 2\mu' + 2\mu' + 2s' - 4\mu' s')}\right) +$$
$$+\frac{2\beta^2(1-p)^2(\beta p + \mu + s - 2\mu s)a\, e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s - \mu' - s' + 2\mu' s')t}}{(\mu' + s' - 2\mu' s')(\beta p - \mu - s + 2\mu s + 2\mu' + 2s' - 4\mu' s')^2}$$
$$+\left(b - \frac{\beta^2(1-p)^2(\beta p + \mu + s - 2\mu s)a}{(\mu' + s' - 2\mu' s')(\beta p - \mu - s + 2\mu s)}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{2}{(\beta p - \mu - s + 2\mu s + 2\mu' + 2s' - 4\mu' s')} +\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\beta p - 2\mu - 2s + 4\mu s - \mu' - s' + 2\mu' s'}{(\beta p + \mu + s - 2\mu s + \mu' + s' - 2\mu' s')^2}\right)\right) e^{2\left(-\mu' - s' + 2\mu' s'\right)t},$$

$$k_{11} = \frac{\beta(1-p)(\beta p + \mu + s - 2\mu s)a}{\beta p - \mu - s + 2\mu s}\left(\frac{e^{2(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{\beta p - \mu - s + 2\mu s + \mu' + s' - 2\mu' s'} -\right.$$
$$\left.-\frac{e^{(\beta p - \mu - s + 2\mu s)t}}{\mu' + s' - 2\mu' s'}\right) +$$

$$+\frac{\beta(1-p)(\beta p+\mu+s-2\mu s)a\, e^{\left(\beta p-\mu-s+2\mu s-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}}{(\mu'+s'-2\mu's')\,(\beta p-\mu-s+2\mu s+\mu'+s'-2\mu's')}.$$

Враховуючи властивості твірної функції кумулянт, можемо записати вираз математичного сподівання числа самок популяції

$$m(X(t))=a\, e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}$$

і вираз математичного сподівання числа самців популяції

$$m(Y(t))=b\, e^{\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}+$$
$$+\frac{\beta(1-p)a}{\beta p-\mu-s+2\mu s+\mu'+s'-2\mu's'}\left(e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}-e^{\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}\right).$$

Також одержали вирази дисперсій $\sigma^2(X(t))$ і $\sigma^2(Y(t))$:

$$\sigma^2(X(t))=\frac{(\beta p+\mu+s-2\mu s)a}{\beta p-\mu-s+2\mu s}\left(e^{2(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}-e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}\right),$$

$$\sigma^2(Y(t))=\frac{\beta(1-p)a\, e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}}{\beta p-\mu-s+2\mu s+2\mu'+2s'-4\mu's'}+b\, e^{\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}+$$
$$+\frac{(\mu'+s'-2\mu's')\,\beta(1-p)a}{\beta p-\mu-s+2\mu s+\mu'+s'-2\mu's'}\left(\frac{e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}}{\beta p-\mu-s+2\mu s+2\mu'+2s'-4\mu's'}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}}{\mu'+s'-2\mu's'}\right)+$$
$$\frac{2\beta^2(1-p)^2(\beta p+\mu+s-2\mu s)a}{(\beta p-\mu-s+2\mu s)}\left(\frac{e^{2(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}}{2(\beta p-\mu-s+2\mu s+\mu'+s'-2\mu's')^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s)t}}{(\mu'+s'-2\mu's')(\beta p-\mu-s+2\mu s+2\mu'+2\mu'+2s'-4\mu's')}\right)+$$
$$+\frac{2\beta^2(1-p)^2(\beta p+\mu+s-2\mu s)a\, e^{(\beta p-\mu-s+2\mu s-\mu'-s'+2\mu's')t}}{(\mu'+s'-2\mu's')(\beta p-\mu-s+2\mu s+2\mu'+2s'-4\mu's')^2}$$
$$+\left(b-\frac{\beta^2(1-p)^2(\beta p+\mu+s-2\mu s)a}{(\mu'+s'-2\mu's')(\beta p-\mu-s+2\mu s)}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{2}{(\beta p-\mu-s+2\mu s+2\mu'+2s'-4\mu's')}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\beta p-2\mu-2s+4\mu s-\mu'-s'+2\mu's'}{\left(\beta p+\mu+s-2\mu s+\mu'+s'-2\mu's'\right)^2}\right)\right)e^{2\left(-\mu'-s'+2\mu's'\right)t}.$$

Щоб отримати умови, за яких число особин популяції в скінченному майбутньому (в короткостроковій перспективі) залишалось близьке до початкового значення було досліджено умови

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to T} m(X(t))=a,\\ \lim\limits_{t\to T} m(Y(t))=b.\end{cases}$$

Одержали, що ймовірності народження, ймовірності природної смерті та ймовірності насильницької смерті самок і самців мають задовольняє такі умови:

$$\begin{cases} \beta p > \mu, \\ 0 < \mu < 0,5, \\ \mu' > 0,5, \\ s \to \dfrac{\beta p - \mu}{1 - 2\mu}, \\ s' \to \dfrac{\mu'}{2\mu' - 1}. \end{cases}$$

При виконанні попередніх умов дисперсія випадкової величини $X(t),\ t \in [0;T]$, задовольняє умову

$$\sigma^2(X(t)) \leqslant 2\beta paT.$$

В результаті знайдемо вирази математичних сподівань та дисперсій числа самок і самців популяції. Встановлено достатні умови збереження розміру популяції на сталому рівні.

Отож, для збереження розміру популяції на рівні початкових значень (підтримання екологічного балансу чи комерційного планування) пропонується керувати зовнішнім впливом, як ймовірністю насильницької смерті.

Список використаної літератури

1. Allman E.S., Rhodes J. Mathematical Models in Biology// Cambridge. University Press, 2004, 386 p.
2. Grossman St., Turner J. Mathematics for the Biologital Scienes// Macmillan Publishing Co., Inc.New York, 1974, 405 p.
3. Барабаш Г.М., Єременко Ю.П. *Дослідження зовнішнього впливу на процеси розмноження*// Canada: XI Міжнародна науково-практична конференція "Innovative development of science, tehnology and education". – 2024. – С. 169–171.
4. Barabash G.M., Yeremenko I.P. *External influence on the dynamics of populations consisting of two sexes*// Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння і аналіз даних". – 2025. – С. 85.

Стаття: вперше надійшла 12.01.2026
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

EXTERNAL INFLUENCE ON THE DYNAMICS OF POPULATIONS COMSISTING OF TWO SEXES

Galyna BARABASH, Iulian YEREMENKO

Ivan Franko Lviv National University,
Universytetska str., 1, L'viv, 79000
e-mail: galynabarabash71@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3258-6518
e-mail: julian_lviv@yahoo.com, ORCID: 0009-0006-7668-7744

This article is devoted to the description of population dynamics using first-order differential equations in partial derivatives for the generating function of moments. Using the properties of the generating function of cumulants, the external influence on the number of individuals in the population is studied. The conditions for maintaining the population size at a constant level are established.

Key words: population dynamics, partial differential equations.