ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 67–74
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 67–74
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.67-74

УДК 517.9

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З δ-ПОТЕНЦІАЛОМ

Юрій ГОЛОВАТИЙ[1,2], **Катерина МАЛИШ**[1]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська,1, м. Львів, 79000*
[2] *Український католицький університет, вул.Козельницька 2а, м. Львів, 79026*
e-mail: yuriy.golovaty@lnu.edu.ua, yuriy.golovaty@ucu.edu.ua,
ORCID: 0000-0002-1758-0115
e-mail: kateryna.malysh@lnu.edu.ua,
ORCID: 0009-0005-2718-9557

Ми досліджуємо існування розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння з δ-потенціалом на прямій. Доведено, що в класі узагальнених функцій такий розв'язок існує тоді і лише тоді, коли відсутнє початкове відхилення струни в точці, де зосереджений δ-потенціал. У цьому випадку розв'язок єдиний і допускає явне аналітичне подання, яке є сумою класичної формули д'Аламбера для вільного поширення хвиль та доданка, що описує їх розсіювання на δ-потенціалі.

Ключові слова: Хвильове рівняння, точкова взаємодія, δ-потенціал, точна модель, розсіювання.

1. Вступ

Математична теорія набуває особливої цінності, коли поряд із загальними теоремами в ній є достатньо багатий клас задач, які можна розв'язати явно. Формули точних розв'язків роблять цю теорія привабливою для дослідників у прикладних галузях, забезпечуючи можливість безпосереднього аналізу моделей та виявлення впливу окремих факторів. Не менш важливу функцію точні формули виконують і для самих математиків, слугуючи своєрідними "реперними" точками, що дозволяють перевіряти загальні методи, тестувати точність наближень та формувати інтуїцію щодо структури розв'язків в складніших задачах. Перші дослідники рівнянь з частинними похідними підходили до цієї теорії з великим оптимізмом, який був

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 35L05; Secondary 35D30, 35L15 зумовлений успіхами в теорії звичайних диференціальних рівнянь, де широкі класи рівнянь вдалося розв'язати явно. Проте з'ясувалося, що навіть для лінійних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами точні формули для розв'язків є рідкістю і виникають у дуже спеціальних ситуаціях. Втім, у цій теорії було отримано кілька класичних результатів, які відіграли вагому роль у подальшому розвитку математичної фізики. Одним із найвідоміших прикладів є формула

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds, \tag{1}$$

отримана Жаном ле Роном д'Аламбером в 1747 році для розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

Задача моделює коливання безмежної струни в залежності від її початкового профілю ϕ та розподілу швидкостей ψ [1]. Формула (1) дає явний опис динаміки струни, демонструє механізм поширення хвиль, унаочнює залежність гладкості розв'язку від гладкості вхідних даних.

Проте ситуація істотно ускладнюється, якщо до хвильового рівняння додати потенціальний член:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + V(x)u = 0. \tag{3}$$

Такі рівняння виникають у багатьох прикладних задачах: у теорії розсіяння хвиль на неоднорідностях середовища [2], у моделях поширення акустичних та електромагнітних хвиль у неоднорідних матеріалах [3], а також у квантовій теорії поля (одновимірне рівняння Клейна-Гордона) та квантовій механіці [4, 5], де потенціал описує взаємодію з зовнішнім полем або локалізованими дефектами. Наявність потенціалу руйнує просту структуру характеристик і робить неможливою побудову явних формул для розв'язків.

Дотримуючись класичної моделі д'Аламбера, рівняння (3) можна інтерпретувати як модель коливань струни, що лежить на пружній підкладці. У класичній механіці чи механіці ґрунтів така система відома як модель з пружною основою Вінклера [6]. У цій інтерпретації струна з'єднана з множиною незалежних пружин, закріплених на абсолютно жорсткій основі; пружини діють лише в тих точках, де потенціал є ненульовим. Кожна точка струни має власну локальну "жорсткість", що створює додаткову відновлювальну силу. Коли характерний розмір опори є малим у порівнянні з довжиною струни, природною ідеалізацією класичного потенціалу стає точкова взаємодія, яку моделюють функцією Дірака. Моделі з точковими взаємодіями відіграють важливу роль у математичній фізиці і активно досліджуються протягом останніх десятиліть. Загальній теорії операторів із δ-потенціалами та іншими точковими взаємодіями присвячена монографія [7], де детально досліджено точні моделі з псевдопотенціалами у квантовій механіці. Такі моделі дозволяють замінити локалізовані структури простішими сингулярними потенціалами, зберігаючи при цьому основні риси фізичної взаємодії і залишаючи шанс на отримання явних розв'язків. Подібний підхід природно виникає і в задачах поширення хвиль, коли неоднорідність середовища має дуже малий просторовий масштаб. Гіперболічні рівнянням із сингулярними джерелами та δ-сингулярностями розв'язків вивчали у роботах [8, 9].

У цій роботі ми знайшли умови, при яких задача Коші для одновимірного хвильового рівняння з δ-потенціалом має розв'язок. Також ми отримали точний аналітичний опис цього розв'язку, що узагальнює класичну формулу д'Аламбера і дозволяє безпосередньо простежити, як точкова взаємодія модифікує поширення хвиль. Ця формула дозволяє відокремити ефекти вільного поширення хвиль та їхнього розсіяння на δ-потенціалі.

2. Формулювання задачі та результатів

Розглянемо задачу Коші

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + 2\alpha\delta(x)v, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{4}$$

$$v(x,0) = \phi(x),\ \ v_t(x,0) = \psi(x), \tag{5}$$

де $\delta(x)$ — функція Дірака, α — стала взаємодії і a — додатна швидкість поширення хвиль. Диференціальне рівняння розуміємо в сенсі узагальнених функцій, причому добуток $\delta(x)v(x,t)$ інтерпретується як $v(0,t)\delta(x)$. Добуток коректно визначений за умови, що розв'язок v є неперервним в точках $(0,t)$. Водночас похідна v_x повинна мати в цих точках розриви першого роду, щоб друга узагальнена похідна v_{xx} містила доданок вигляду $b(t)\delta(x)$. Цей доданок має компенсувати у рівнянні потенціальний член. Тому задачу (4), (5) можна переформулювати як задачу з умовами спряження на додатній півосі $x = 0$:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ t > 0, \qquad v(x,0) = \phi(x),\ \ v_t(x,0) = \psi(x), \tag{6}$$

$$v(+0,t) - v(-0,t) = 0, \qquad a^2\big(v_x(+0,t) - v_x(-0,t)\big) + 2\alpha v(0,t) = 0. \tag{7}$$

Нехай $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t>0}$ — верхня півплощина в $\mathbb{R}^2_{x,t}$, а

$$\omega = \{(x,t) \colon t > 0,\ -at < x < at\}$$

— сектор в Ω, вирізаний характеристиками хвильового рівняння $x \pm at = 0$, що виходять з початку координат (див. Рис. 1).

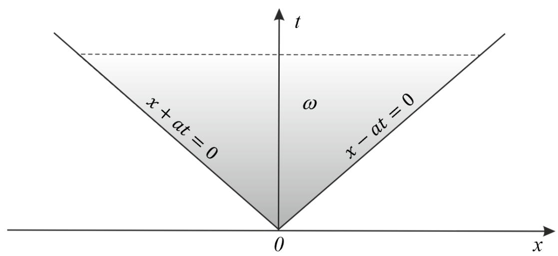

Рис. 1. Область ω, в якій міститься носій функції w.

Основний результат статті є таким.

Теорема. *Нехай $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ і $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Задача Коші* (4), (5) *має розв'язок в просторі узагальнених функцій тоді і лише тоді, коли $\phi(0) = 0$. Цей розв'язок единий і має вигляд*

$$v(x,t) = u(x,t) + w(\alpha, x, t),$$

де функція u відповідає вільному проходженню хвиль і задається формулою (1), *а зосереджений в секторі ω доданок*

$$w(\alpha,x,t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2a^2} \displaystyle\int_0^{at-|x|} e^{\alpha a^{-2}(at-|x|-s)} \left(\varphi(s) + \varphi(-s) + \frac{1}{a}\int_{-s}^{s} \psi(r)\,dr \right) ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{коли } (x,t) \in \omega, \\ 0, \quad \text{коли } (x,t) \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

описує розсіювання хвиль на δ-потенціалі.

Якщо значення $\phi(0)$ відмінне від нуля, то задача (4), (5) *не має розв'язків у просторі узагальнених функцій.*

3. Побудова розв'язку і доведення теореми

Розв'язок задачі (4), (5) шукатимемо у вигляді збурення класичного розв'язку д'Аламбера

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds + w(\alpha,x,t).$$

Функція w є розв'язком задачі Коші

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ t > 0, \qquad w(x,0) = 0, \ \ w_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$w(+0,t) - w(-0,t) = 0, \quad a^2(w_x(+0,t) - w_x(-0,t)) + 2\alpha w(0,t) = -\alpha H(at) \tag{9}$$

з неоднорідною умовою спряження, де

$$H(\tau) = \phi(\tau) + \phi(-\tau) + \frac{1}{a}\int_{-\tau}^{\tau} \psi(s)\,ds.$$

Позаяк швидкість поширення збурень в цій моделі дорівнює a, то носій w міститься в секторі ω. Шукатимемо цю функцію у вигляді

$$w(x,t) = \begin{cases} f(x+at), & \text{коли } \ -at < x < 0; \\ g(x-at), & \text{коли } 0 < x < at; \\ \quad 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{10}$$

Це найзагальніша форма для такого розв'язку, бо породжене δ-потенціалом збурення поширюється вздовж характеристик хвильового рівняння у два боки від початку координат; інших хвиль тут не виникає. Щоб функція w була неперервно диференційовною на межі ω, тобто на характеристиках $x \pm at = 0$, необхідно вимагати виконання умов $f(0) = f'(0) = 0$ і $g(0) = g'(0) = 0$.

З умов спряження (9) отримуємо систему

$$f(\tau) - g(-\tau) = 0, \quad a^2(g'(-\tau) - f'(\tau)) + 2\alpha f(\tau) = -\alpha H(\tau).$$

Звідси випливає, що f задовольняє задачу Коші

$$\frac{df}{d\tau}(\tau) - \frac{\alpha}{a^2}\, f(\tau) = \frac{\alpha}{2a^2}\, H(\tau), \quad f(0) = 0.$$

для лінійного неоднорідного рівняння першого порядку. Розв'язавши її, знаходимо обидва хвильові профілі:

$$f(\tau) = \frac{\alpha}{2a^2}\int_0^{\tau} e^{\alpha a^{-2}(\tau - s)} H(s)\, ds, \quad g(\tau) = \frac{\alpha}{2a^2}\int_0^{-\tau} e^{\alpha a^{-2}(-\tau - s)} H(s)\, ds.$$

Підставляючи явні зображення для f і g в (10), отримуємо

$$w(\alpha, x, t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2a^2}\displaystyle\int\limits_0^{x+at} e^{\alpha a^{-2}(x+at-s)} H(s)\, ds, & \text{коли } -at < x < 0; \\ \dfrac{\alpha}{2a^2}\displaystyle\int\limits_0^{at-x} e^{\alpha a^{-2}(at-x-s)} H(s)\, ds, & \text{коли } 0 < x < at; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{11}$$

Ця функція має компактніше подання

$$w(\alpha, x, t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2a^2}\displaystyle\int\limits_0^{at-|x|} e^{\alpha a^{-2}(at-|x|-s)} H(s)\, ds, & (x,t) \in \omega; \\ 0, & (x,t) \in \Omega \setminus \omega. \end{cases} \tag{12}$$

Зауважимо, що розв'язок w вдалося побудувати однозначно, не використовуючи умов $f'(0) = 0$ та $g'(0) = 0$. Тому функція w є лише неперервною на характеристиках $x \pm at = 0$, тоді як її перші частинні похідні, взагалі кажучи, можуть мати розрив першого роду на цих променях.

Лема. Функція $w(\alpha, x, t)$ в просторі узагальнених функцій є розв'язком диференціального рівняння

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} - 2\alpha\delta(x) w = \frac{\alpha\phi(0)}{a}\big((1-a)\delta(x+at) - (a+1)\delta(x-at)\big). \tag{13}$$

Доведення. Нехай функція h є двічі неперервно диференційовною на прямій, за винятком початку координат, де вона лише неперервна і має скінченний стрибок похідної $[h']_0 = h'(+0) - h'(-0)$. Введемо позначення

$$\Omega_- = \{(x,t)\colon x < 0, t > 0\}, \qquad \Omega_+ = \{(x,t)\colon x > 0, t > 0\}.$$

Розглянемо в області Ω_+ хвилю $r(x,t) = h(x - at)$, що рухається вправо. Через розрив похідної h' на прямій $x - at = 0$ другі узагальнені похідні r містять δ-доданки. Безпосереднє обчислення дає

$$r_{xx}(x,t) = h''(x - at) + [h']_0 \delta(x - at), \quad r_{tt}(x,t) = a^2 h''(x - at) - a[h']_0 \delta(x - at).$$

Тоді в області Ω_+ функція r є розв'язком рівняння

$$r_{tt} - a^2 r_{xx} = a(a+1)\,[h']_0\,\delta(x-at).$$

Аналогічно, хвиля $l(x,t) = h(x+at)$, що рухається вліво, задовольняє рівняння

$$l_{tt} - a^2 l_{xx} = a(a-1)\,[h']_0\,\delta(x+at)$$

в області Ω_-. Твердження леми випливає з того, що функція $w(\alpha, x, t)$ складена з обох таких хвиль (див. (10)), причому

$$[w_x]_{x=-at} = [w_x]_{x=at} = \frac{\alpha\phi(0)}{a^2} \tag{14}$$

згідно з поданням (11). □

Отже, функція $w = w(\alpha, x, t)$, задана формулою (12), буде розв'язком рівняння (4) тоді і лише тоді, коли $\phi(0) = 0$, бо стала взаємодії α відмінна від нуля за припущенням. Згідно (14) ця умова забезпечує неперервну диференційовність w на характеристиках $x \pm at = 0$.

В загальному випадку умова неперервності похідних на характеристиках є лише достатньою для того, щоб функція задовольняла однорідне хвильове рівняння. Так, наприклад, функція w є розв'язком рівняння $w_{tt} - w_{xx} = 0$ в області Ω_- навіть при ненульовому значенні $\phi(0)$, тобто при розривному градієнті на характеристиці $x + at = 0$. Справді, рівняння (13) в Ω_- має вигляд

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = \frac{\alpha(1-a)\phi(0)}{a}\,\delta(x+at),$$

і його права частина зникає для $a = 1$.

Єдиність розв'язку задачі (4), (5) фактично вже встановлена, оскільки вона еквівалентна єдиності хвильових профілів f та g у поданні (10). Строге доведення можна отримати безпосередньо. Для цього область Ω треба розбити променями $x = -at$, $x = 0$ та $x = at$ на чотири сектори. В кожному секторі ω_k загальний розв'язок хвильового рівняння має вигляд суми двох біжучих хвиль

$$v(x,t) = f_k(x+at) + g_k(x-at).$$

Підставляючи ці представлення у задачу (6), (7), можна переконатися, що в результаті однозначно відтворюється саме той розв'язок v, який наведено в теоремі.

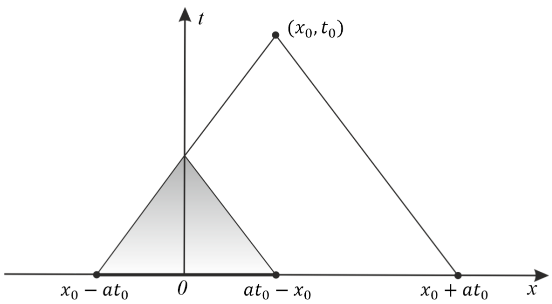

Рис. 2. Область залежності розв'язку v.

4. Деякі зауваження

Хоча ми шукали розв'язок v в просторі узагальнених функцій, він є досить регулярною функцією:

$$v \in W_2^1(\Omega), \quad v \in W_2^2(\Omega_\pm), \quad v \in C^1(\Omega_\pm),$$

де W_2^s — класичні простори Соболєва. Крім того, цей розв'язок є двічі неперервно диференційовний у секторах $\omega_1, \dots, \omega_4$, описаних вище.

В класичній формулі д'Аламбера у випадку відсутності початкових швидкостей, $\psi = 0$, область залежності розв'язку

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big)$$

від початкового відхилення ϕ є двоточковою множиною: для обчислення значення $u(x_0, t_0)$ достатньо знати функцію ϕ лише в точках $x_0 - at_0$ та $x_0 + at_0$. Присутність δ-потенціалу у хвильовому рівнянні змінює ситуацію. Тепер розв'язок v в секторі ω можна записати так

$$\begin{aligned} v(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big) + \\ + \frac{\alpha}{2a^2}\, e^{\frac{\alpha}{a^2}(at-|x|)} \int_0^{at-|x|} e^{-\frac{\alpha}{a^2}s}\big(\phi(s) + \phi(-s)\big)\, ds = \\ = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big) + \frac{\alpha}{2a^2}\, e^{\frac{\alpha}{a^2}(at-|x|)} \int_{|x|-at}^{at-|x|} e^{-\frac{\alpha}{a^2}|s|}\phi(s)\, ds. \end{aligned}$$

Щоб знайти значення $v(x_0, t_0)$, треба знати початкову функція ϕ на значно більшій множині, а саме на відрізку $\big[\,|x_0| - at_0, at_0 - |x_0|\,\big]$ і ще одній ізольованій точці. Така область залежності виникає в наслідок відбиття хвиль від потенціалу (див. Рис. 2).

Крім того, останнє зображення розв'язку v пояснює появу експонент у структурі розсіяних хвиль. Річ у тім, що функція $E(x) = \frac{1}{2\omega}e^{-\omega|x|}$ є фундаментальним розв'язком диференціального оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$, тобто

$$-E'' + \omega^2 E = \delta(x).$$

Саме такі рівняння за просторовою змінною виникають, коли провести відокремлення змінних у рівнянні (4).

Список використаної літератури

1. J. D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration,* Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, **3** (1747), 214–219. www.exhibit.xavier.edu/oresme_2017Sept/4/
2. D. Colton, R. Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer, 2019.
3. S. Moradi, K.A. Innanen, *Scattering of homogeneous and inhomogeneous seismic waves in low-loss viscoelastic media*, Geophysical Journal International, **202.3** (2015), 1722–1732. DOI: 10.1093/gji/ggv242

4. I.O. Vakarchuk, Quantum mechanics, Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2012. (in Ukrainian)
5. R. Shankar, Principles of quantum mechanics, Springer Science & Business Media, 2012.
6. J.E. Bowles, Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, McGraw-Hill, New York, 1974.
7. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, Solvable models in quantum mechanics. Springer Science & Business Media, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-88201-2
8. M. Oberguggenberger, Y. Wang, *Delta-waves for semilinear hyperbolic Cauchy problems*, Mathematische Nachrichten, **166** (1994) no.1, 317–327. DOI: 10.1002/mana.19941660124
9. I. Kmit, *Delta waves for a strongly singular initial-boundary hyperbolic problem with integral boundary condition*, Z. Anal. Anwend., **24** (2005), no.1, 29–74. DOI: 10.4171/ZAA/1229

Стаття: вперше надійшла 23.12.2025
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH A δ-POTENTIAL

Yuriy GOLOVATY[1,2], Kateryna MALYSH[1]

[1] *Ivan Franko Lviv National University,*
Universytetska str., 1, Lviv, 79000
[2] *Ukrainian Catholic university,*
Kozelnytska str. 2a, Lviv, 79026
e-mail: yuriy.golovaty@lnu.edu.ua, yuriy.golovaty@ucu.edu.ua,
ORCID: 0000-0002-1758-0115
e-mail: kateryna.malysh@lnu.edu.ua,
ORCID: 0009-0005-2718-9557

We study the existence of solutions to the Cauchy problem for the one-dimensional wave equation with a δ-potential. It is proved that, in the class of generalized functions, a solution exists if and only if the initial displacement vanishes at the point where the δ-potential is concentrated. In this case, the solution is unique and admits an explicit analytical representation given by the sum of the classical d'Alembert formula for free wave propagation and an additional term describing the scattering of waves by the δ-potential.

Key words: Wave equation, point interaction, δ potential, exactly solvable model, scattering.