ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 27–66
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 27–66
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.27-66

УДК 517.95

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ФУР'Є. Частина I

Микола БОКАЛО[1], Тарас БОКАЛО[1], Михайло СИМОТЮК[2]

[1]*Львівський національний університет ім. І. Франка,*
Університетська 1, м. Львів, 79000
[2]*Ін-т прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Наукова, 3-б, м. Львів, 79060
mm.bokalo@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2533-0917
t.bokalo@gmail.com, ORCID: 0009-0004-4584-4845
mykhailo.m.symotiuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2246-516X

Ця праця має науково-методологічний характер, вона містить детальний виклад схеми досліджень крайових задач для лінійних рівнянь з диференціальними та псевдодиференціальними операторами. Основним інструментом є метод Фур'є: для розв'язків задач отримано зображення у вигляді рядів за ортогональними системами функцій. Вивчення властивостей розв'язків задач зведено до опису поведінки послідовності їх коефіцієнтів Фур'є. З цією метою у роботі запроваджено і описано властивості гільбертових просторів числових послідовностей, встановлено їх зв'язок із відповідними гільбертовими просторами функцій. Особливу увагу приділено ролі гільбертового простору як уніфікованого координатного середовища для аналізу відповідних задач.

Ключові слова: диференціальне рівняння, операторне рівняння, диференціально-операторне рівняння, крайова задача, ряд Фур'є, скінченне перетворення Фур'є, гільбертів простір, простір Лебега, простір Соболєва, ортонормована база

Розвинення періодичних функцій у тригонометричні ряди Фур'є виникли понад 200 років тому у працях Ж. Фур'є при вивченні задач теплопровідності. Проте ще раніше ця ідея зустрічалася у працях Л. Ейлера, Ж. Д'Аламбера, які досліджували коливання струни [25]. В цьому нарямку була також ідея Д. Бернуллі про

2020 Mathematics Subject Classification: 34B05, 35A22, 35B10, 35C10

можливість зображення складного коливання як суперпозиції простих гармонічних коливань. Згодом у XIX столітті чіткість теорії тригонометричних рядів забезпечили праці Л. Діріхле, Б. Рімана, А. Лебега, що сприяло перетворенню методу скінченних перетворень Фур'є на універсальний інструмент математичного аналізу. Подальший розвиток теорії привів до узагальнень у вигляді інтеграла Фур'є, нескінченного перетворення Фур'є, теорії узагальнених функцій і сучасного гармонічного аналізу. Це відкрило різноманітні застосування методу Фур'є у фізиці, цифровій обробці сигналів, квантовій механіці, чисельному моделюванні та інших сферах [12, 23, 24, 26, 30].

У класичних і сучасних працях, присвячених теорії рядів Фур'є, простежується поступовий перехід від дослідження конкретних тригонометричних розвинень до широкої теорії гармонічного аналізу. Фундаментальні монографії Н. К. Барі [15], А. Зигмунда [33], Д. Джексона [21], Р. Едвардса [19] формують цілісне уявлення про те, які саме властивості рядів Фур'є є центральними в математичному аналізі. У цих працях вивчаються питання поточкової, рівномірної, середньоквадратичної збіжності та збіжності майже всюди тригонометричних рядів. Значну увагу приділено висвітленню зв'язку між гладкістю функції та швидкістю спадання її коефіцієнтів Фур'є, а також проблемі єдиності тригонометричних розвинень. Саме ці питання дозволили зрозуміти, за яких умов функція може бути повністю відновлена за своєю спектральною інформацією. У праці Д. Джексона [21] описано апроксимаційні аспекти рядів Фур'є, які розглядаються як засіб наближення функцій.

У монографії Ю М. Березанського [16] теорія рядів Фур'є пов'язується зі загальною теорією самоспряжених операторів, а саме розвинення за тригонометричними функціями узагальнюється до розвинень за власними функціями операторів, що дозволяє розглядати ряд Фур'є як окремий випадок спектрального зображення елементів гільбертового простору. Подібний підхід підтримується і в праці О. О. Дезіна [18], де розвинення за власними функціями операторів використовуються для дослідження крайових задач математичної фізики. У цьому контексті ряди Фур'є стають не лише аналітичним інструментом, а й універсальною мовою для опису фізичних явищ, зокрема, процесів теплопровідності, коливань тощо.

Окремий напрям представляє праця Ж.-П. Кахана [22], у якій досліджено випадкові функційні ряди, зокрема, випадкові ряди Фур'є. У праці [22] класичну теорію доповнено ймовірнісними методами, які дозволяють аналізувати поведінку коефіцієнтів рядів Фур'є та їх збіжність у випадковому середовищі. Це відкриває широкі застосування випадкових рядів Фур'є в теорії сигналів, статистичній фізиці та стохастичних моделях.

Наступним етапом розвитку стала побудова багатовимірного гармонічного аналізу. Зокрема, у працях Л. В. Жіжіашвілі [32], І. Стейна, Г. Вейса [29] класична теорія тригонометричних рядів поширюється на функції багатьох змінних, а також на загальніші простори, зокрема, на простори функцій, заданих на многовидах. У цьому підході центральним об'єктом стає не окремий ряд, а перетворення Фур'є як інструмент аналізу структури функцій. Гармонічний аналіз вивчає властивості згорток, сингулярних інтегралів, мультиплікаторів та спектральних перетворень. Якщо в класичній теорії основною була проблема розвинення функції в ряд, то в гармонічному аналізі головною стає ідея зображення математичного об'єкта через його спектр.

Таким чином, у цитованих працях ряди Фур'є постають не лише як засіб розвинень періодичних функцій, а як фундаментальний засіб із застосуваннями у математичній фізиці, теорії диференціальних рівнянь, спектральній теорії операторів, гармонічному аналізі, числовому аналізі, цифровій обробці сигналів тощо.

В університетських курсах рівнянь математичної фізики та рівнянь із частинними похідними метод рядів Фур'є з огляду на його важливі операційні властивості відіграє центральну роль, оскільки за його допомогою можна конструктивно знайти розв'язки низки крайових задач [1–14, 17, 23, 26–28, 30, 31]. Проте у переважній більшості таких курсів метод Фур'є застосовується для побудови розв'язків задач для рівнянь із частинними похідними другого порядку, при цьому обґрунтування збіжності ряду Фур'є для розв'язку проводиться у відповідних класах гладких функцій з рівномірною нормою. Водночас метод Фур'є може бути ефективно застосований для вивчення розв'язків задач для диференціальних рівнянь високого порядку, псевдодиференціальних рівнянь, до того ж і в загальніших (вагових) функційних просторах.

Однією з центральних ідей у математиці є можливість описувати складні об'єкти за допомогою чисел. У звичайному скінченновимірному лінійному просторі кожен його елемент можна однозначно зобразити у вигляді лінійної комбінації за обраною базою. Це означає, що в цій базі кожному вектору — елементу простору — відповідає певний набір коефіцієнтів, які тлумачаться як його координати. Завдяки цьому геометричний або абстрактний об'єкт перетворюється на впорядкований набір чисел, над яким можна виконувати різні аналітичні дії. Саме ця ідея Р. Декарта [24] стала основою для переходу від наочного геометричного опису об'єктів до алгебраїчного.

Наступний розвиток цієї концепції привів до її перенесення на випадок нескінченновимірних просторів, насамперед гільбертових просторів, у яких роль векторів можуть відігравати функції або послідовності. Відомо, що в сепарабельному гільбертовому просторі існують ортонормовані бази, а отже, кожен елемент цього простору можна однозначно зобразити у вигляді нескінченного ряду — нескінченної лінійної комбінації базових елементів. Коефіцієнти цього розвинення виконують таку ж роль, що й координати елементів у скінченновимірному просторі: вони дозволяють зобразити складний об'єкт у числовій формі, яка є зручною для дослідження та опрацювання машинними методами.

Описана ідея координатизації має глибоке методологічне значення: вона показує, що функцію можна розглядати не тільки як аналітичний вираз, але як точку в абстрактному просторі, якій відповідає деяка послідовність чисел. Саме такий підхід координатизації обрано нами для викладу досліджень цієї статті.

У даній статті ми спочатку акцентуємо увагу читача на запровадженні і вивченні властивостей гільбертових просторів числових послідовностей. Скінченні перетворення Фур'є співставляють цим просторам послідовностей вагові простори функцій, гладкість яких описується поведінкою їх коефіцієнтів Фур'є. Досліджено умови розв'язності операторних рівнянь у просторах числових послідовностей та просторах функцій, які справджують певні крайові умови, встановлено альтернативу Фредгольма для таких рівнянь і показано, що її умови залежать від поведінки символу лівої частини операторного рівняння. Встановлено зв'язок між гладкістю розв'язку, правої частини та степенем операторного рівняння.

У другій частині роботи буде проведено узагальнення результатів цієї частини на випадок загальних вагових просторів числових послідовностей і відповідних їм функційних просторів, а також буде перенесено отримані результати на простори багатовимірних числових послідовностей і тензорні добутки розглянутих функційних просторів та операторних рівнянь на цих просторах. Векторні функції зі значеннями в просторах рядів Фур'є та задачі для диференціально-операторних рівнянь планується розглянути в третій частині.

1. **Операторні рівняння, породжені задачею знаходження періодичних розв'язків лінійного звичайного диференціального рівняння**

1.1. **Вступ.** Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x)$, яка є *класичним* розв'язком рівняння

$$u'' + au = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

і справджує умови 2π-періодичності

$$u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

У рівнянні (1) a — задане дійсне число, а його права частина $f(x)$ є скінченним тригонометричним многочленом вигляду

$$f(x) = \sum_{k\in M} q_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

де $M \subset \mathbb{Z}$ — довільна скінченна множина, $q_k \in \mathbb{C}$, $k \in M$.

Дослідимо питання про існування та єдиність розв'язку $u(x)$ задачі (1)–(3). Відзначимо, що єдиність розв'язку задачі (1)–(3) розуміємо в такому сенсі: або задача (1)–(3) взагалі не має розв'язку, або має тільки один.

Для встановлення умов єдиності задачі (1)–(3) знайдемо 2π-періодичні розв'язки однорідного рівняння

$$u'' + au = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

яке відповідає рівнянню (1). Якщо рівняння (4) має тільки тривіальний (тотожно рівний нулеві) 2π-періодичний розв'язок, то задача (1)–(3) має не більше одного розв'язку; у протилежному випадку — або має безліч, або не має жодного.

Розглянемо три можливі випадки: 1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $a > 0$.

1) Нехай $a < 0$. Покладемо $a = -\nu^2$, де $\nu > 0$. Тоді характеристичне рівняння диференціального рівняння (4) має вигляд $\lambda^2 - \nu^2 = 0$, звідки знаходимо $\lambda_1 = -\nu$, $\lambda_2 = \nu$. Отож, повний загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u(x) = C_1 e^{-\nu x} + C_2 e^{\nu x}, \tag{5}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Якщо функція (5) є 2π-періодичною, то для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$C_1 e^{-\nu x} + C_2 e^{\nu x} = C_1 e^{-\nu(x+2\pi)} + C_2 e^{\nu(x+2\pi)},$$

а отже, й рівність

$$C_1(1 - e^{-2\pi\nu})e^{-\nu x} + C_2(1 - e^{2\pi\nu})e^{\nu x} = 0. \tag{6}$$

Оскільки для випадку, коли $\nu \neq 0$, функції $e^{-\nu x}, e^{\nu x}$ є лінійно незалежними, то з рівності (6) отримуємо, що

$$C_1(1 - e^{-2\pi\nu}) = 0, \quad C_2(1 - e^{2\pi\nu}) = 0. \tag{7}$$

Враховуючи, що $(1-e^{-2\pi\nu}) \neq 0$ і $(1-e^{2\pi\nu}) \neq 0$, коли $\nu \neq 0$, з формул (7) випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тому тільки тривіальна функція $u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, є 2π-періодичним розв'язком рівняння (4). Отже, у випадку, коли $a < 0$, якщо задача (1)–(3) має розв'язок, то він єдиний.

Знайдемо розв'язок задачі (1)–(3) методом неозначених коефіцієнтів, використовуючи принцип суперпозиції. У результаті отримаємо єдиний розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді

$$u(x) = \sum_{k \in M} \frac{q_k}{a - k^2} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Нехай тепер $a = 0$. Тоді рівняння (4) має вигляд $u'' = 0$ і, як легко переконатися, його повний загальний розв'язок зображується формулою

$$u(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Функція (8) є 2π-періодичною тоді і тільки тоді, коли $C_1 = 0$. Тому рівняння (4) має 2π-періодичні розв'язки вигляду

$$u(x) = C, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $C \in \mathbb{C}$ — довільна стала, і тільки такі. Отже, у випадку, коли $a = 0$, рівняння (4) має безліч розв'язків.

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1)–(3), коли $a = 0$. Дослідимо окремо два підвипадки: а) $0 \notin M$; б) $0 \in M$.

а) Якщо $0 \notin M$, то розв'язками задачі (1)–(3) є функції

$$u(x) = C - \sum_{k \in M} \frac{q_k}{k^2} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $C \in \mathbb{C}$ — довільна стала.

б) Якщо $0 \in M$ і $f(x) = q_0$, де $q_0 \in \mathbb{C}$ — ненульова стала, то рівняння $u'' = q_0$ має повний загальний розв'язок

$$u(x) = \frac{q_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

який не може бути 2π-періодичною функцією при жодному виборі сталих C_1, C_2. Очевидно, що у випадку, коли $a = 0$ і $0 \in M$, задача (1)–(3) не має розв'язку.

3) Нехай $a > 0$. Покладемо $a = \mu^2$, де $\mu > 0$. Тоді характеристичне рівняння диференціального рівняння (4) має вигляд

$$u'' + \mu^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i\mu.$$

Отже, повний загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u(x) = C_1 e^{-i\mu x} + C_2 e^{i\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.} \tag{9}$$

Як і раніше, переконуємося у тому, що функція (9) є 2π-періодичною тоді і лише тоді, коли виконуються рівності

$$C_1(1-e^{-i2\pi\mu})=0, \quad C_2(1-e^{i2\pi\mu})=0. \tag{10}$$

Розглянемо два підвипадки: а) $\mu\notin\mathbb{N}$; б) $\mu\in\mathbb{N}$.

а) Якщо $\mu\neq m$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, то $e^{i2\pi\mu}\neq 1$ і $e^{-i2\pi\mu}\neq 1$. Тому з рівностей (10) отримаємо, що $C_1=0$, $C_2=0$, а тоді з (9) випливає, що $u(x)\equiv 0$ — єдиний 2π-періодичний розв'язок рівняння (4). Тоді задача (1)–(3) має не більше одного розв'язку. Використовуючи метод неозначених коефіцієнтів, знаходимо єдиний 2π-періодичний розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x)=\sum_{k\in M}\frac{q_k}{a-k^2}e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

б) Якщо $\mu=m$ для деякого $m\in\mathbb{N}$, то з (9) отримуємо, що для довільних значень сталих C_1, C_2 функція

$$u(x)=C_1e^{-imx}+C_2e^{imx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

є 2π-періодичним розв'язком рівняння (4). Простий аналіз показує, що у випадку, коли $\pm m\notin M$, розв'язками задачі (1)–(3) є функції

$$u(x)=C_1e^{-imx}+C_2e^{imx}+\sum_{k\in M}\frac{q_k}{m^2-k^2}e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, а у випадку, коли $m\in M$ або $-m\in M$, задача (1)–(3) 2π-періодичних розв'язків не має.

Далі дослідимо задачу про періодичні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і вільними членами з різних просторів періодичних функцій, що є узагальненнями розглянутої задачі.

1.2. **Простори числових послідовностей.**

1.2.1. *Означення просторів* $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}_c$, $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, $s\in\mathbb{R}$. Позначимо через $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ лінійний простір послідовностей

$$c=(...,c_r,...,c_{-1},c_0,c_1,...,c_s,...)=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

комплексних чисел (тут $r,s\in\mathbb{Z}$, $r<0, s>0$), тобто лінійний простір відображень множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ в множину комплексних чисел $\mathbb{C}$, наділений стандартними операціями покоординатного додавання та множення на скаляр. На просторі $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ запровадимо таке поняття збіжності послідовності його елементів: *послідовність*

$$c^{\langle p\rangle}=(...,c^{\langle p\rangle}_r,...,c^{\langle p\rangle}_{-1},c^{\langle p\rangle}_0,c^{\langle p\rangle}_1,...,c^{\langle p\rangle}_s,...)=(c^{\langle p\rangle}_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad p\in\mathbb{N},$$

збігається до послідовності $c=(...,c_r,...,c_{-1},c_0,c_1,...,c_s,...)=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *в* $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, *якщо* $c^{\langle p\rangle}_k\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}c_k$ *для кожного* $k\in\mathbb{Z}$.

Послідовність $c=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ з простору $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ називається *фінітною*, якщо для деякої, залежної від c, скінченної множини $M\subset\mathbb{Z}$ для всіх $k\notin M$ виконуються рівності $c_k=0$, тобто існують цілі числа r і s, $r\leq s$, залежні від c, такі, що $c_k=0$, коли $k<r$ або $k>s$. Через $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}_c$ позначимо лінійний простір фінітних послідовностей з простору $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. На просторі $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}_c$ запровадимо таке поняття збіжності послідовності його елементів: *послідовність* $c^{\langle p\rangle} = (c_k^{\langle p\rangle})_{k\in\mathbb{Z}}$, $p\in\mathbb{N}$, *збігається до послідовності* $c=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *в* $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$, *якщо існує така скінченна множина* $M\subset\mathbb{Z}$, *що для кожного* $p\in\mathbb{N}$ *маємо* $c_k^{\langle p\rangle}=0$, *якщо* $k\notin M$, *і* $c_k^{\langle p\rangle}\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} c_k$ *для кожного* $k\in M$.

Нехай $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ — лінійний простір, складений з тих елементів $c=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, для яких $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2<\infty$. Простір $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, наділений скалярним добутком

$$(c,d)_{l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\overline{d_k}, \quad c,d\in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}), \tag{11}$$

і відповідною йому нормою

$$\|c\|_{l^2} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2\Big)^{1/2} \tag{12}$$

є гільбертовим (див., наприклад, [20]). Тут і далі символ $\overline{z}$ позначає комплексно-спряжене до $z\in\mathbb{C}$ число.

Нехай $s\in\mathbb{R}$ — яке-небудь число. Через $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ позначимо лінійний простір, складений з таких елементів $c=(c_k)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, що $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|c_k|^2<\infty$, наділений скалярним добутком

$$(c,d)_{h^s} := \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s c_k\overline{d_k} \tag{13}$$

та відповідною нормою

$$\|c\|_{h^s} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|c_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{14}$$

Простір $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ є гільбертовим (див., наприклад, [20]). Очевидно, що

$$h^0(\mathbb{Z};\mathbb{C}) = l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

Зауважимо, що для будь-яких $s',s''\in\mathbb{R}$ таких, що $s'<s''$, вкладення

$$h^{s''}(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset h^{s'}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \tag{15}$$

є неперервним і щільним. Справді, нехай c — довільний елемент простору $h^{s''}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. Тоді маємо

$$\|c\|^2_{h^{s'}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{s'}|c_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{s'}(1+k^2)^{-s''}(1+k^2)^{s''}|c_k|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{s''}|c_k|^2 = \|c\|^2_{h^{s''}}.$$

Тут використано нерівність $(1+k^2)^{s'}(1+k^2)^{-s''}=(1+k^2)^{s'-s''}\leqslant 1$, яка виконується для всіх $k\in\mathbb{Z}$ з огляду на те, що $s'-s''<0$.

Покладемо

$$h^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) := \bigcap_{s>0} h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}), \quad h^{-\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) := \bigcup_{s<0} h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

З наведених вище міркувань випливає, що виконуються вкладення

$$\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\subset h^{\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset h^{s''}(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset h^{s'}(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})\subset$$

$$\subset h^{-s'}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset h^{-s''}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset h^{-\infty}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad 0 < s' < s'', \tag{16}$$

які є неперервними і щільними.

1.2.2. *Спряжені простори.* Нехай $(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}})'$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$. Покажемо, що простір $(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}})'$ можна ототожнити з простором $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. З цією метою для кожного $k \in \mathbb{Z}$ через $e^{\langle k\rangle}$ позначимо той елемент простору $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$, всі координати якого є нулями, крім координати на k-му місці, яка дорівнює 1. Тоді для будь-якої послідовності $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$ маємо

$$c = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\langle k\rangle} \quad \text{(сума скінченна)}. \tag{17}$$

Нехай $F\colon \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ — лінійний неперервний функціонал. Тоді для довільної послідовності $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$ виконується рівність

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k F\big(e^{\langle k\rangle}\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k},$$

де

$$f_k = \overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)} \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Послідовність $f = \big(f_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ є елементом простору $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. І навпаки, якщо $f = \big(f_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, то відображення $F\colon \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$, задане за правилом

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k}, \quad c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}},$$

є лінійним неперервним функціоналом на просторі $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$. Отже, відображення

$$Q\colon \big(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\big)' \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},$$

задане за правилом $Q(F) = f$, де послідовність $f = \big(f_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ визначається за допомогою формули (18), є бієктивним.

Покажемо, що Q є антилінійним відображенням. Нехай $F^{\langle 1\rangle}$, $F^{\langle 2\rangle}$ — довільні елементи простору $\big(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\big)'$, а $f^{\langle 1\rangle} := Q(F^{\langle 1\rangle})$, $f^{\langle 2\rangle} := Q(F^{\langle 2\rangle})$ — їх образи при заданому відображенні Q (див. формулу (18)). Тоді

$$\begin{gathered} Q(F^{\langle 1\rangle} + F^{\langle 2\rangle}) = \Big(\overline{(F^{\langle 1\rangle} + F^{\langle 2\rangle})\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \\ = \Big(\overline{F^{\langle 1\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)} + \overline{F^{\langle 2\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \Big(\overline{F^{\langle 1\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} + \Big(\overline{F^{\langle 2\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \\ = f^{\langle 1\rangle} + f^{\langle 2\rangle} = Q(F^{\langle 1\rangle}) + Q(F^{\langle 2\rangle}). \end{gathered} \tag{19}$$

Тепер нехай $F \in \big(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\big)'$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — довільні, $f := Q(F)$. Тоді

$$Q(\lambda F) = \Big(\overline{(\lambda F)\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \Big(\overline{\lambda}\,\overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \overline{\lambda}\,\Big(\overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{Z}} = \overline{\lambda} f = \overline{\lambda}\, Q(F). \tag{20}$$

Із рівностей (19), (20) випливає, що Q є антилінійним відображенням. Це разом із бієктивністю Q дає можливість ототожнити простори $\big(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\big)'$ і $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, а операцію спряження між $\big(\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}\big)'$ і $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$ визначити за допомогою рівності

$$\langle c, f\rangle_{\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k}, \qquad c \in \mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}, \quad f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}.$$

Далі всюди вважатимемо, що це зроблено.

Тепер покажемо, що $\big(h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)' \cong h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ для довільного $s \in \mathbb{R}$. Справді, нехай $s \in \mathbb{R}$ — довільне фіксоване число, а $F\colon h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ — будь-який лінійний неперервний функціонал. Якщо $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, то для кожного $p \in \mathbb{N}$ покладемо

$$c^{\langle p\rangle} = \big(..., 0, c_{-p}, ..., c_{-1}, c_0, c_1, ..., c_p, 0, ...\big),$$

тобто $c^{\langle p\rangle}$ — елемент простору $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$, компоненти якого з номерами від $-p$ до p співпадають з відповідними компонентами елемента c, а решта дорівнюють нулеві. Очевидно, що $c^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} c$ в $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, а значить, враховуючи неперервність і лінійність функціоналу F, отримуємо

$$F(c) = F\Big(\lim_{p\to\infty} c^{\langle p\rangle}\Big) = \lim_{p\to\infty} F(c^{\langle p\rangle}) = \lim_{p\to\infty} F\left(\sum_{|k|\le p} c_k e^{\langle k\rangle}\right) =$$
$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{|k|\le p} c_k F\big(e^{\langle k\rangle}\big) = \lim_{p\to\infty} \sum_{|k|\le p} c_k \overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k}, \tag{21}$$

де $f_k, k \in \mathbb{Z}$, визначені у формулі (18). Покажемо, що послідовність $f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ належить до простору $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. Справді, маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s/2} c_k (1+k^2)^{-s/2} \overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \overline{g_k}, \tag{22}$$

де

$$d_k := (1+k^2)^{s/2} c_k, \quad g_k := (1+k^2)^{-s/2} f_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Очевидно, що $d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. Визначимо відображення $S : h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ за правилом:

$$S(c) = ((1+k^2)^{s/2} c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

Легко переконатися, що відображення S — взаємно однозначне та ізометричне, тобто $\|S(c)\|_{l^2} = \|c\|_{h^s}$ для всіх $c \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, а обернене до нього відображення $S^{-1}\colon l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \to h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ визначається рівністю

$$S^{-1}(d) = ((1+k^2)^{-s/2} d_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

Покладемо $G := F \circ S^{-1}$. Очевидно, що G — лінійний і неперервний функціонал на $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, як композиція лінійних і неперервних відображень. На підставі рівностей (21) і (22) отримуємо, що $G(d) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_k \overline{g_k}$. Оскільки $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ є гільбертовим простором, то звідси за теоремою Ріса випливає, що $g = (g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ належить до простору $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ і $\|G\| = \|g\|_{l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})}$. На підставі означення елемента g маємо, що $f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ належить простору $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ і $\|g\|_{l^2} = \|f\|_{h^{-s}}$. Покажемо, що $\|F\| = \|G\|$. Справді, згідно з означенням функціоналу G дістаємо

$$|G(d)| = |F(S^{-1}(d))| \leqslant \|F\| \cdot \|S^{-1}(d)\|_{h^s} = \|G\| \cdot \|d\|_{l^2} \quad \forall d \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}),$$

звідки отримуємо нерівність $\|G\| \leqslant \|F\|$. З іншого боку, оскільки $F = G \circ S$, то

$$|F(c)| = |G(S(c))| \leqslant \|G\| \cdot \|S(c)\|_{l^2} = \|G\| \cdot \|c\|_{h^s} \quad \forall c \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}),$$

звідки отримуємо, що $\|F\| \leqslant \|G\|$. З отриманих вище нерівностей для норм $\|F\|$ і $\|G\|$ випливає, що $\|F\| = \|f\|_{h^{-s}}$.

Використовуючи нерівність Коші—Буняковського, легко переконатися, що для будь-якого елемента $f = (f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ з простору $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ відображення

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k}, \quad c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}),$$

є лінійним і неперервним функціоналом на $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, тобто елементом спряженого простору $\big(h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)'$, причому його норма рівна $\|f\|_{h^{-s}}$. Отже, зі сказаного вище випливає, що відображення $Q\colon \big(h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)' \to h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, визначене за правилом (18), є бієктивним та ізометричним. Аналогічно, як і вище, переконуємося, що воно є антилінійним. Тому можна ототожнити простори $\big(h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)'$ і $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, а також визначити операцію спряження між $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ і $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ за правилом

$$\langle c, f\rangle_{h^s} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{f_k}, \quad c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}), \quad f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

Звідси видно, що для будь-якого елемента $c \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ і $f \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ виконується рівність

$$\langle c, f\rangle_{h^s} = (c, f)_{l^2}.$$

Це показує узгодження операції спряження між просторами $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ і $h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ зі скалярним добутком в $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, тобто для кожного $s > 0$ вкладення просторів

$$h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \tag{24}$$

є щільними і неперервними.

1.3. **Функційні простори.**

1.3.1. *Простір* $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Позначимо через $C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ лінійний простір визначених на $\mathbb{R}$ зі значеннями в $\mathbb{C}$ неперервних і 2π-періодичних функцій, тобто $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, якщо $u \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $u(x+2\pi) = u(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. На просторі $C_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ визначимо скалярний добуток $(u,v) := \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\,dx$ і відповідну йому норму $\|u\| = \Big(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$. Поповнення отриманого лінійного простору зі скалярним добутком можна ототожнити з гільбертовим простором $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, що $u(x+2\pi) = u(x)$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ і $\int_0^{2\pi} |u(x)|^2\,dx < \infty$, зі скалярним добутком

$$(u,v)_{L^2_{2\pi}} := \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

і відповідною йому нормою

$$\|u\|_{L^2_{2\pi}} := \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Як відомо (див., наприклад, [20]), у просторі $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ можна вибрати ортонормовану базу

$$w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Отже, будь-який елемент $u \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ можна подати у вигляді суми збіжного в $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ряду Фур'є

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

де

$$\widehat{u}_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Послідовність $\widehat{u} := (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ називають *скінченним перетворенням Фур'є* функції u. Як відомо, виконується рівність Парсеваля

$$\|u\|^2_{L^2_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}_k|^2, \tag{28}$$

звідки отримуємо включення $\widehat{u} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. З іншого боку, якщо $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, то легко довести, що ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

збігається в $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, а значить, його сума u є елементом простору $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, причому $\widehat{u}_k = c_k$, $k \in \mathbb{Z}$, і норма цього елемента дорівнює $\|c\|_{l^2}$. Отже, відображення (скінченне перетворення Фур'є)

$$L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni u \quad \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \quad \widehat{u} \in l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}),$$

визначене за правилом (27), є лінійною ізометрією між просторами $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$. Базуючись на цьому, можна означити скалярний добуток $(u,v)_{L^2_{2\pi}}$ іншим способом. Справді, нехай $u, v \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Позначимо для кожного $p \in \mathbb{N}$:

$$u^{\langle p\rangle}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\le p} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad v^{\langle p\rangle}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\le p} \widehat{v}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $u^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u$, $v^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і скалярний добуток в гільбертовому просторі є неперервним за обома аргументами, то

$$(u,v)_{L^2_{2\pi}} = \lim_{p\to\infty} (u^{\langle p\rangle}, v^{\langle p\rangle})_{L^2_{2\pi}} = \lim_{p\to\infty} \sum_{|k|\le p} \widehat{u}_k \cdot \overline{\widehat{v}_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k \cdot \overline{\widehat{v}_k}.$$

Тут ми врахували також ортонормованість системи (25), тобто

$$\frac{1}{2\pi} (e^{ik\cdot}, e^{im\cdot})_{L^2_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = m; \\ 0, & \text{якщо} \quad k \ne m. \end{cases}$$

Отже, маємо

$$(u,v)_{L^2_{2\pi}} = (\widehat{u}, \widehat{v})_{l^2}, \quad u, v \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \tag{29}$$

а отже, $\|u\|_{L^2_{2\pi}} = \|\widehat{u}\|_{l^2}$.

1.3.2. *Простори Соболєва цілого порядку періодичних функцій* $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Позначимо через $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, де $n\in\mathbb{N}$ — довільне фіксоване, простір Соболєва, складений з функцій u з простору $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, які мають узагальнені похідні $u^{(\nu)}$ з простору $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ для кожного $\nu\in\{1,...,n\}$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(\!(u,v)\!)_{H^n_{2\pi}} := \int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{n} u^{(\nu)}(x)\overline{v^{(\nu)}(x)}\,dx = \sum_{\nu=0}^{n}(u^{(\nu)},v^{(\nu)})_{L^2_{2\pi}} \tag{30}$$

і відповідною йому нормою

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{H^n_{2\pi}} := \Big(\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{n}|u^{(\nu)}(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Покажемо, що для довільних $u,v\in H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ маємо рівність

$$(\!(u,v)\!)_{H^n_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(\sum_{\nu=0}^{n}k^{2\nu}\big)\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k}. \tag{31}$$

де $\widehat{u}$ і $\widehat{v}$ є скінченними перетвореннями Фур'є елементів u і v з простору $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Справді, для довільного $\nu\in\{1,...,n\}$ маємо

$$(u^{(\nu)},v^{(\nu)})_{L^2_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u^{(\nu)}}_k\,\overline{\widehat{v^{(\nu)}}_k}. \tag{32}$$

Але для будь-якого $k\in\mathbb{Z}$ на підставі формули інтегрування частинами одержуємо

$$\widehat{u^{(\nu)}}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}u^{(\nu)}(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{(ik)^\nu}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}u(x)e^{-ikx}\,dx = (ik)^\nu\widehat{u}_k. \tag{33}$$

Аналогічно, як і в (32), для довільного $k\in\mathbb{Z}$ отримуємо, що

$$\widehat{v^{(\nu)}}_k = (ik)^\nu\widehat{v}_k. \tag{34}$$

Із (30) на підставі (32)–(34) здобуваємо (31). Звідси маємо, зокрема, рівність

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{H^n_{2\pi}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\nu=0}^{n}k^{2\nu}\Big)|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Тепер зауважимо, що

$$\sum_{\nu=0}^{n}k^{2\nu}\sim(1+k^2)^n \quad \text{при} \quad |k|\to+\infty,$$

звідки випливає, що на просторі $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ можна ввести еквівалентні скалярному добутку $(\!(\cdot,\cdot)\!)_{H^n_{2\pi}}$ і відповідній нормі $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{H^n_{2\pi}}$ новий скалярний добуток

$$(u,v)_{H^n_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^n\widehat{u}_k\,\overline{\widehat{v}_k}$$

і відповідну йому норму

$$\|u\|_{H^n_{2\pi}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^n|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Далі в просторі $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ будемо розглядати скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_{H^n_{2\pi}}$ і відповідну йому норму $\|\cdot\|_{H^n_{2\pi}}$. Тоді, як випливає вище сказаного, простори $H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $h^n(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ є ізометричними.

1.3.3. *Простори Соболева дробового порядку* $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Нехай s — яке-небудь дійсне число. Введемо простір $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, складений з рядів Фур'є

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

де $\widehat{u} = (\widehat{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s\big(\mathbb{Z};\mathbb{C}\big)$. Простір $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u,v)_{H^s_{2\pi}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k} \tag{35}$$

і відповідною нормою

$$\|u\|_{H^s_{2\pi}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{36}$$

Визначимо на декартовому добутку $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\times H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ білінійну **(півтоналінійну)** форму за правилом

$$\langle u,v\rangle_{H^s_{2\pi}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k} = \langle\widehat{u},\widehat{v}\rangle_{h^s}, \tag{37}$$

якщо

$$u(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ik\cdot} \in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad v(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_k e^{ik\cdot} \in H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$

$$\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}), \quad \widehat{v} = (\widehat{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

Форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s_{2\pi}}$ є коректно визначеною, що випливає з нерівності Коші-Буняковського:

$$\Big|\langle u,v\rangle_{H^s_{2\pi}}\Big| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k}\Big| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{s/2}|\widehat{u}_k|(1+k^2)^{-s/2}|\widehat{v}_k| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^s|\widehat{u}_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{-s}|\widehat{v}_k|^2\right)^{1/2} = \|u\|_{H^s_{2\pi}}\|v\|_{H^{-s}_{2\pi}}.$$

З (24) і (35)–(37) отримуємо, що для будь-яких $s>0$ маємо неперервні і щільні вкладення

$$H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \tag{38}$$

причому для будь-яких $u\in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $w\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ маємо

$$\langle u,w\rangle_{H^s_{2\pi}} = (u,w)_{L^2_{2\pi}}.$$

1.3.4. *Спряжені простори.* Нехай s — довільне дійсне число. Розглянемо простір $\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$. Покажемо, що коли $W \in \big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$, то існує і тільки один елемент $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_k e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$, з простору $H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, для якого маємо

$$W(u) = \langle u, w\rangle_{H^s_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k\, \overline{\widehat{w}_k} \equiv \langle \widehat{u}, \widehat{w}\rangle_{h^s} \quad \forall u(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{ik\cdot}, \tag{39}$$

де $\widehat{w} = (\widehat{w}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in h^s(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ — скінченне перетворення Фур'є елемента w.

Покажемо коректність (39). З цією метою для кожного $p \in \mathbb{N}$ покладемо

$$u^{\langle p\rangle}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\le p} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Легко переконатися, що $u^{\langle p\rangle} \to u$ при $p \to \infty$ в $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Оскільки W є лінійним і неперервним відображенням простору $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ в простір $\mathbb{C}$, то

$$W(u) = \lim_{p\to\infty} W(u^{\langle p\rangle}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{p\to\infty} \sum_{|k|\le p} \widehat{u}_k W(e^{ik\cdot}) = \lim_{p\to\infty} \sum_{|k|\le p} \widehat{u}_k\, \overline{\widehat{w}_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k\, \overline{\widehat{w}_k}, \tag{40}$$

де

$$\widehat{w}_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{W(e^{ik\cdot})}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{41}$$

Оскільки відображення

$$h^s\big(\mathbb{Z};\mathbb{C}\big) \ni \widehat{u} \ \ \mapsto \ \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k \overline{\widehat{w}_k} \in \mathbb{C}$$

є лінійним і неперервним функціоналом, то з попереднього пункту отримуємо, що $\widehat{w} = (\widehat{w}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ належить $h^{-s}\big(\mathbb{Z};\mathbb{C}\big)$. Звідси і (40) випливає, що правильна рівність (39), в якій $\widehat{w}$ визначено в (41).

Правильне і обернене твердження: якщо $w \in H^{-s}_{2\pi}\big(\mathbb{R};\mathbb{C}\big)$, то функціонал

$$H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni u \to \langle u, w\rangle_{H^s_{2\pi}} \in \mathbb{C}$$

є елементом простору $\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$.

Підсумовуючи вище сказане приходимо до висновку, що для кожного $W \in \big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ існує і тільки один елемент w простору $H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ такий, що

$$W(u) = \langle u, w\rangle_{H^s_{2\pi}} \quad \forall u \in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \tag{42}$$

і для кожного $w \in H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ відображення W, визначене в (42), є елементом простору $\big(H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$, причому

$$\|W\| = \|w\|_{H^{-s}_{2\pi}}.$$

Отже, відображення $W \mapsto w\colon \big(H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)' \to H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, яке позначимо через R, є бієктивним. Аналогічно, як і в попередньому розділі, можна показати, що відображення R є антилінійним. Справді, нехай $W, W^{\langle 1\rangle}, W^{\langle 2\rangle}$ — довільні елементи простору $\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ і

$$W \overset{R}{\mapsto} w, \quad W^{\langle 1\rangle} \overset{R}{\mapsto} w^{\langle 1\rangle}, \quad W^{\langle 2\rangle} \overset{R}{\mapsto} w^{\langle 2\rangle}.$$

Згідно з (42) маємо

$$\big(W^{\langle 1\rangle}+W^{\langle 2\rangle}\big)(u)=\langle u,R(W^{\langle 1\rangle}+W^{\langle 2\rangle})\rangle_{H^s_{2\pi}},$$

$$\big(W^{\langle 1\rangle}+W^{\langle 2\rangle}\big)(u)=W^{\langle 1\rangle}(u)+W^{\langle 2\rangle}(u)=$$

$$=\langle u,R(W^{\langle 1\rangle})\rangle_{H^s_{2\pi}}+\langle u,R(W^{\langle 2\rangle})\rangle_{H^s_{2\pi}}=$$

$$=\langle u,R\big(W^{\langle 1\rangle}\big)+R\big(W^{\langle 2\rangle}\big)\rangle_{H^s_{2\pi}}\quad \forall u\in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Звідси випливає, що

$$R(W^{\langle 1\rangle}+W^{\langle 2\rangle})=R(W^{\langle 1\rangle})+R(W^{\langle 2\rangle})$$

для будь-яких $W^{\langle 1\rangle},W^{\langle 2\rangle}\in\big(H^n_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$. Далі скористаємося властивістю (див. (37))

$$\lambda\langle u,w\rangle_{H^s_{2\pi}}=\lambda\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k\overline{\widehat{w}}_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k\overline{\overline{\lambda}\widehat{w}_k}=\langle\widehat{u},\widehat{\overline{\lambda}w}\rangle_{h^s}=\langle u,\overline{\lambda}w\rangle_{H^s_{2\pi}},\quad u\in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Врахувавши це, для будь-яких $W\in\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ і $\lambda\in\mathbb{C}$ на підставі (42) маємо

$$(\lambda W)(u)=\langle u,R(\lambda W)\rangle_{H^s_{2\pi}},$$

$$(\lambda W)(u)=\lambda W(u)=\lambda\langle u,w\rangle_{H^s_{2\pi}}=\langle u,\overline{\lambda}w\rangle_{H^s_{2\pi}}=\langle u,\overline{\lambda}R(W)\rangle_{H^s_{2\pi}}\quad\forall u\in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Звідси випливає, що $R(\lambda W)=\overline{\lambda}R(W)$.

Отже, відображення

$$R\colon\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'\to H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

є антилінійною ізометрією, що дозволяє ототожнити простори $\big(H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ і $H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, і далі будемо вважати це зробленим.

Зауважимо, що для довільного

$$w(\cdot)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{w}_ke^{ik\cdot}\in H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

згідно з (41) і (42) маємо

$$\widehat{w}_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle e^{ik\cdot},w(\cdot)\rangle_{H^s_{2\pi}}},\quad k\in\mathbb{Z}.\tag{43}$$

У випадку $s>0$ це узгоджується з означенням коефіцієнтів ряду Фур'є для елементів простору $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Справді, оскільки в цьому випадку маємо $L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, то якщо $w\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, то і $w\in H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, а тоді маємо

$$\widehat{w}_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}w(x)e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(w(\cdot),e^{ik\cdot}\big)_{L^2_{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\big(e^{ik\cdot},w(\cdot)\big)_{L^2_{2\pi}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle e^{ik\cdot},w(\cdot)\rangle_{H^s_{2\pi}}}.$$

1.3.5. *Простори $B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.* Введемо ще позначення. Через $B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ позначимо лінійний простір функцій $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, які зображуються у вигляді скінченних сум

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ikx},\quad x\in\mathbb{R},$$

де $\widehat{u}=(\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$, тобто лінійний простір тригонометричних поліномів. Очевидно, що

$$\widehat{u}_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}u(x)e^{-ikx}\,dx,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Скажемо, що послідовність $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$ збігається до u в $B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, якщо послідовність $\widehat{u}^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, скінченних перетворень Фур'є елементів $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, збігається до $\widehat{u}$ в просторі $\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}$.

Під $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ розумітимемо простір рядів Фур'є

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ikx},\quad x\in\mathbb{R},$$

де $\widehat{u}=(\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Скажемо, що послідовність $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, збігається до u в $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, якщо послідовність $\widehat{u}^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, скінченних перетворень Фур'є елементів $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, збігається до $\widehat{u}$ в просторі $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Як і вище, можемо показати, що простір $\big(B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ можна ототожнити з простором $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, використовуючи відображення, цілком аналогічне до введеного раніше відображення R і, зокрема, опираючись на такий факт: для-будь-якого $W\in\big(B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\big)'$ існує єдиний елемент $w\in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ такий, що

$$W(u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u_k}\overline{\widehat{w}_k}=\langle\widehat{u},\widehat{w}\rangle_{\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}},$$

де $\widehat{w}_k$ визначено в (41).

Операцію спряження до просторів $B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ визначимо за правилом

$$\langle u,w\rangle_{B_{2\pi}}:=\langle\widehat{u},\widehat{w}\rangle_{\mathbb{C}_c^{\mathbb{Z}}}.$$

Звідси отримуємо, що (див. (43))

$$\widehat{w}_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle e^{ik\cdot},w(\cdot)\rangle_{B_{2\pi}}},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{44}$$

Отже, на підставі введених позначень, понять і проведених міркувань приходимо до висновку про наявність неперервних і щільних включень:

$$\begin{gathered}B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset H^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset\ldots\subset H^{s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset\ldots\subset H^{1}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset L^{2}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset\\ \subset H^{-1}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset\ldots\subset H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset\ldots\subset H^{-\infty}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\subset B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),\end{gathered} \tag{45}$$

де $H^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}):=\bigcap_{s>0}H^{s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\quad H^{-\infty}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}):=\bigcup_{s>0}H^{-s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

1.4. **Рівняння з диференціальними операторами на просторах періодичних функцій.** Розглянемо оператор

$$D\colon B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$

визначений для кожного

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

за правилом

$$Du(x) := -iu'(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Розширимо оператор D на простір $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Для цього зауважимо, що для будь-яких елементів $u, v\in B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ маємо за формулою інтегрування частинами

$$(v,u')_{L^2_{2\pi}} = \int\limits_0^{2\pi} v(x)\overline{u'(x)}\,dx = v(x)\overline{u(x)}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} v'(x)\overline{u(x)}\,dx =$$

$$-\int\limits_0^{2\pi} v'(x)\overline{u(x)}\,dx = -(v',u)_{L^2_{2\pi}},$$

звідки маємо

$$(v,Du)_{L^2_{2\pi}} = i(v,u')_{L^2_{2\pi}} = -i(v',u)_{L^2_{2\pi}} = (Dv,u)_{L^2_{2\pi}}.$$

Опираючись на цей факт, визначимо оператор

$$D\colon B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

за правилом: *для довільного елемента $u\in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ елемент $Du\in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ задаємо тотожністю*

$$\langle v, Du\rangle_{B_{2\pi}} = \langle Dv, u\rangle_{B_{2\pi}} \quad \forall v\in B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}). \tag{46}$$

Елемент Du в просторі $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ існує та тільки один, оскільки права частина рівності (46) визначає елемент простору $\Big(B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\Big)'$, а, як уже було встановлено, $\Big(B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\Big)' \cong B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Знайдемо вираз Du у вигляді ряду Фур'є з простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Нехай $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx}$, $x\in\mathbb{R}$, — який-небудь елемент простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Тоді

$$Du(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\widehat{Du})_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{47}$$

Згідно з (44) і означенням оператора D (див. (46)) маємо

$$\widehat{(Du)}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle e^{ik\cdot}, Du(\cdot)\rangle_{B_{2\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle De^{ik\cdot}, u(\cdot)\rangle_{B_{2\pi}}} = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\overline{\langle e^{ik\cdot}, u(\cdot)\rangle_{B_{2\pi}}} = k\widehat{u}_k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Звідси і з (47) отримуємо

$$Du(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

для будь-якого $u \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Згідно з ланцюгом включень (45) ми можемо розглядати звуження оператора D на простір $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, тобто рівність (48) буде виконуватися для довільного елемента u з простору $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, де $s \in \mathbb{R}$ — будь-яке.

Нехай $\nu \in \mathbb{N}$, $u \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ — які-небудь. Визначимо

$$D^\nu u(x) = D(D^{\nu-1}u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^\nu \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажемо, що оператор D^ν переводить простір $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ в простір $H^{s-\nu}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ для будь-якого $s \in \mathbb{R}$. Справді, маємо

$$\|D^\nu u\|^2_{H^{s-\nu}_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s-\nu} k^{2\nu} |\widehat{u}_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s (1+k^2)^{-\nu} k^{2\nu} |\widehat{u}_k|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |\widehat{u}_k|^2 = \|u\|^2_{H^s_{2\pi}}.$$

Розглянемо ***диференціальний оператор***

$$L(D) := a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n I \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D^{n-\nu},$$

де $n \in \mathbb{N}$ — довільне фіксоване число, $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = \overline{0,n}$, $a_0 \neq 0$, I — тотожній оператор.

Для довільного елемента

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ на підставі сказаного вище маємо

$$\begin{aligned} L(D)u(x) &= a_0 D^n u(x) + a_1 D^{n-1} u(x) + \ldots + a_n u(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu D^{n-\nu} u(x) \equiv \\ &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu k^{n-\nu} \Big) \widehat{u}_k e^{ikx} \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} L(k) \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{49}$$

де

$$L(k) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu k^{n-\nu} \equiv a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, що відображення

$$L(D)\colon B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad L(D)\colon B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

є лінійними і неперервними.

Розглянемо таку ***задачу***: *для заданого елемента* $f \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *знайти елемент* $u \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *такий, що*

$$L(D)u = f. \tag{50}$$

Зі сказаного вище легко випливає таке твердження.

Лема 1. *Для заданого елемента*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *розв'язком рівняння* (50) *є елемент*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{51}$$

простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$*, де* $\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *(скінченне перетворення Фур'є) є розв'язком системи рівнянь*

$$L(k)\widehat{u}_k = \widehat{f}_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{52}$$

Введемо позначення

$$N_L := \{k \in \mathbb{Z} \mid L(k) = 0\}.$$

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма)**.** *Нехай*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{53}$$

задано. Тоді можливі такі три випадки:
1. *Якщо* $N_L = \varnothing$*, то рівняння* (50) *має і тільки один розв'язок, причому він зображується у вигляді*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}_k}{L(k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{54}$$

2. *Якщо* $N_L \neq \varnothing$ *і* $\widehat{f}_k = 0$ *для всіх* $k \in N_L$*, то рівняння* (50) *має безліч розв'язків і їх можна записати у вигляді*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in N_L} c_k e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus N_L} \frac{\widehat{f}_k}{L(k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{55}$$

де $c_k,\ k \in N_L,$ *— довільні комплексні числа.*
3. *Якщо* $N_L \neq \varnothing$ *та існує* $k' \in N_L$ *таке, що* $\widehat{f}_{k'} \neq 0$*, то рівняння* (50) *не має розв'язку.*

Доведення. Доведення легко випливає з леми 3. □

Дамо еквівалентне теоремі 1 твердження. Для цього введемо такі позначення:

$$U_L := \{v \in B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,|\, v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{ikx}, \text{ де } \widehat{v}_k = 0 \text{ для всіх } k \in \mathbb{Z} \setminus N_L\} \equiv$$

$$\equiv \{v \in B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,|\, Lv = 0\,\},$$

$$U_L^{\perp} := \{w \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \,|\, \langle v, w\rangle_{B_{2\pi}} = 0 \ \ \forall\, v \in B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})\}$$

— ортогональне доповнення до U_L.

Легко бачити, що U_L та $U_L^{\perp}$ — лінійні підпростори простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і

$$B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) = U_L \oplus U_L^{\perp}.$$

Відмітимо, що оператор L переводить підпростір $U_L^{\perp}$ на себе бієктивно. У випадку $U_L = \varnothing$ визначимо оператор

$$L^{-1}(D)\colon B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

за правилом

$$L^{-1}(D)w(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{w}_k}{L(k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{для всіх} \ \ v \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$

а у випадку $U_L \neq \varnothing$ визначимо оператор

$$L_{\perp}^{-1}(D)\colon U_L^{\perp} \to U_L^{\perp}$$

за правилом

$$L_{\perp}^{-1}(D)w(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus N_L} \frac{\widehat{w}_k}{L(k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{для всіх} \ \ w \in U_L^{\perp}.$$

Теорема 2 (альтернатива Фредгольма; еквівалентне формулювання)**.** *Нехай*

$$f \in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \tag{56}$$

довільно задано. Тоді можливі такі три випадки:
1. *Якщо $U_L = \varnothing$, то рівняння* (50) *має і тільки один розв'язок, причому він зображується у вигляді*

$$u(x) = L^{-1}(D)f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

2. *Якщо $U_L \neq \varnothing$ і $f \in U_L^{\perp}$, то рівняння* (50) *має безліч розв'язків і їх можна записати у вигляді*

$$u(x) = v(x) + L_{\perp}^{-1}f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{58}$$

де v — довільний елемент множини U_L.
3. *Якщо $U_L \neq \varnothing$ і $f \notin U_L^{\perp}$, то рівняння* (50) *не має розв'язку.*

Теорема 3. *Нехай $N_L = \varnothing$ і $f \in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, де s — яке-небудь фіксоване дійсне число. Тоді (єдиний) розв'язок операторного рівняння* (50) *належить простору $H^{s+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$|L(k)| \geqslant |a_0||k|^n - (|a_1||k|^{n-1} + ... + |a_n|), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Звідси випливає існування сталих $q \in \mathbb{N}$ і $c > 0$ таких, що

$$|L(k)| \geqslant c|k|^n \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{Z} \ \text{ таких, що } \ |k| \geqslant q. \tag{59}$$

Тоді згідно з (54), врахувавши, що $(1 + k^2)n \leqslant 2^n k^{2n}, k \geqslant q$, отримаємо

$$\sum_{|k|\geqslant q} (1+k^2)^{s+n} \Big|\frac{\widehat{f}_k}{L(k)}\Big|^2 \leqslant c^{-2} \sum_{|k|\geqslant q} (1+k^2)^{s+n} \big|\widehat{f}_k\big|^2 |k|^{-2n} \leqslant$$
$$\leqslant c^{-2}2^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s \big|\widehat{f}_k\big|^2 \leqslant c^{-2}2^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s \big|\widehat{f}_k\big|^2 = C\|\widehat{f}\|^2_{h^s}, \tag{60}$$

де $C := c^{-2}2^n$. Звідси легко випливає наше твердження. $\square$

Наслідок 1. *Нехай в рівнянні* (50) *коефіцієнт* $a_0 \neq 0$ *є довільним фіксованим. Тоді існує множина* $S(a_0) \subset \mathbb{C}^n$ *нульової міри за Лебегом така, що для будь-якого вектора* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus S(a_0)$ *рівняння* (50) *має і тільки один розв'язок, причому оператор* $L(D)$ *реалізує ізоморфізм між просторами* $H^{s+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *і* $H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *для будь-якого* $s \in \mathbb{R}$.

Доведення. Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо множину

$$S_k(a_0) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n |\ a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0\}.$$

Очевидно, що множина $S_k(a_0)$ є гіперплощиною в просторі $\mathbb{C}^n$ і має в цьому просторі нульову міру за Лебегом для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Тоді множина $S(a_0) := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} S_k(a_0)$ має нульову міру за Лебегом в просторі $\mathbb{C}^n$.

Нехай $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus S(a_0)$. Покажемо, що $L(D)u \in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, якщо $u \in H^{s+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Згідно з (49) маємо

$$(\widehat{L(D)u})_k = L(k)\widehat{u}_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже,

$$\|L(D)u\|_{H^s_{2\pi}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s |L(k)|^2 |\widehat{u}_k|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^s (1+k^2)^n |\widehat{u}_k|^2 = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s+n} |\widehat{u}_k|^2 < \infty.$$

Тут ми використали нерівність

$$|L(k)|^2 \leqslant C(1+k^2)^n, \quad k \in \mathbb{Z},$$

з деякою сталою $C > 0$.

Те, що $u \in H^{s+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, коли $L(D)u \in H^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, безпосередньо випливає з теореми 3. $\square$

1.4. Рівняння з псевдодиференціальними операторами на просторах періодичних функцій. Нехай $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — послідовність дійсних чисел така, що

$$\ldots \leqslant \lambda_{-r} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{-1} \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_s \leqslant \ldots,$$

де $r, s \in \mathbb{N}$ і $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to -\infty$ та $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Для кожного $s \in \mathbb{R}$ введемо простір послідовностей комплексних чисел $\widetilde{h}^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, складений з тих елементів $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, для яких

$$\|c\|_{\widetilde{h}^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+\lambda_k^2)^s |c_k|^2 \Big)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно, що

$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}_c \subset \ldots \subset \widetilde{h}^s(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset \ldots \subset \widetilde{h}^1(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset l^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset$$
$$\subset \widetilde{h}^{-1}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset \ldots \subset \widetilde{h}^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset \ldots \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},$$

причому $\big(\widetilde{h}^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)' = \widetilde{h}^{-s}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, де $s > 0$ (це доводиться цілком аналогічно як у випадку простору $h^s(\mathbb{Z};\mathbb{C})$).

Розглянемо простори $B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, введені раніше, а також простори

$$\widetilde{H}^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) := \Big\{v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{v}_k e^{ikx} \,|\, \widehat{v} = (\widehat{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{h}^m(\mathbb{Z};\mathbb{C})\Big\}, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Очевидно, що

$$B_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset ... \subset \widetilde{H}^s_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset ... \subset \widetilde{H}^1_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset L^2_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset$$

$$\subset \widetilde{H}^{-1}_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset ... \subset \widetilde{H}^{-s}_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \subset ... \subset B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}),$$

і $\big(\widetilde{H}^s_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C})\big)' = \widetilde{H}^{-s}_{2\pi}(\mathbb{Z};\mathbb{C})$, де $s\in\mathbb{R}$.

Розглянемо на просторі $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ псевдодиференціальний оператор P, визначений за правилом:

$$Pu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

де

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

— довільний елемент простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

Нехай

$$L(P) := a_0P^n + a_1P^{n-1} + \ldots + a_nI_0 \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P^{n-\nu},$$

де $n\in\mathbb{N}$, $a_\nu\in\mathbb{C}$, $\nu=\overline{0,n}$, $a_0\neq 0$.

Позначимо

$$L(\lambda_k) := a_0\lambda_k^n + a_1\lambda_k^{n-1} + \ldots + a_n \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\lambda_k^{n-\nu}.$$

Розглянемо в $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ операторне рівняння

$$L(P)u = f, \tag{61}$$

де $f\in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ — заданий елемент, а $u\in B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ — невідомий елемент.

Зі сказаного вище легко випливає таке твердження.

Лема 2. *Розв'язком рівняння* (61) *є функція*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_k e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

де $\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ *— розв'язок системи рівнянь*

$$L(\lambda_k)\widehat{u}_k = \widehat{f}_k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Позначимо

$$\widetilde{N}_L := \{k\in\mathbb{Z} \,|\, L(\lambda_k) = 0\}.$$

Теорема 4. *Нехай*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

— довільний елемент простору $B'_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Тоді правильні такі три твердження:

1. Якщо $\widetilde{N}_L = \varnothing$, то рівняння (61) *має і тільки один розв'язок, причому він зображується у вигляді*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}_k}{L(\lambda_k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Якщо $\widetilde{N}_L \neq \varnothing$ і $\widehat{f}_k = 0$ для всіх $k \in \widetilde{N}_L$, то рівняння (61) *має безліч розв'язків і їх можна записати у вигляді*

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\widetilde{N}_L} c_k e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\widetilde{N}_L} \frac{\widehat{f}_k}{L(\lambda_k)} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{62}$$

де c_k, $k \in \widetilde{N}_L$, — довільні комплексні числа.

3. Якщо $\widetilde{N}_L \neq \varnothing$ і існує $k' \in \widetilde{N}_L$ таке, що $\widehat{f}_{k'} \neq 0$, то рівняння (61) *не має розв'язку.*

Теорема 5. *Нехай $\widetilde{N}_L = \varnothing$ і $f \in \widetilde{H}^m_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, де $m \in \mathbb{N}$. Тоді єдиний розв'язок рівняння* (61) *належить простору $\widetilde{H}^{m+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.*

Наслідок 2. *Нехай $a_0 \neq 0$ — довільно задане і фіксоване число. Тоді для майже всіх $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ рівняння* (61) *має і тільки один розв'язок, причому оператор $L(P)$ реалізує ізоморфізм між просторами $\widetilde{H}^{s+n}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ і $\widetilde{H}^{s}_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ для кожного $s \in \mathbb{R}$.*

Теореми 4 і 5 та наслідок 2 доводяться аналогічно як, відповідно, теореми 1 і 3 та наслідок 1.

2. Операторні рівняння, породжені крайовою задачею для диференціального рівняння парного порядку

2.1. **Вступ.** Нехай $\mathbb{P}$ — поле дійсних чисел, тобто $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, або поле комплексних чисел, тобто $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

Розглянемо крайову ***задачу***: знайти функцію $u\colon [0,\pi] \to \mathbb{P}$, яка задовольняє рівняння

$$\widetilde{a}_0 u^{(2n)} + \widetilde{a}_1 u^{(2n-2)} + \ldots + \widetilde{a}_n u = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{63}$$

та крайові умови

$$u^{(2j)}(0) = 0, \quad u^{(2j)}(\pi) = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{64}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a}_k \in \mathbb{P}$, $k = \overline{1,n}$, $\widetilde{a}_0 \neq 0$, $g\colon (0,\pi) \to \mathbb{P}$ — задані.

Розглянемо питання існування і єдиності розв'язків даної задачі в різних відповідних цій задачі функційних просторах. Для цього спочатку введемо ці простори і запишемо задачу (63), (64) у вигляді операторного рівняння.

Зауважимо, що рівняння (63) можна записати у вигляді

$$a_0\Big(-\frac{d^2}{dx^2}\Big)^n u + a_1\Big(-\frac{d^2}{dx^2}\Big)^{n-1} u + \ldots + a_n u = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{65}$$

де $a_k \in \mathbb{P},\ k=\overline{0,n}$, $a_0 \neq 0$ — задані.

Звідси бачимо, що задача (63), (64) є одновимірним випадком ***задачі***: знайти функцію $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{P}$, яка задовольняє рівняння

$$a_0\big(-\Delta\big)^n u + a_1\big(-\Delta\big)^{n-1} u + \ldots + a_n u = g(x), \quad x \in \Omega. \tag{66}$$

та крайові умови

$$\Delta^j u\big|_{\Gamma} = 0, \quad j = \overline{0,n-1}, \tag{67}$$

де Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma := \partial\Omega$ — межа Ω, $a_k \in \mathbb{P},\ k=\overline{0,n}$, $a_0 \neq 0$, $g\colon \Omega \to \mathbb{P}$ — задані.

В цьому розділі дослідимо цю задачу та її узагальнення.

2.2. **Простори числових послідовностей.**

2.2.1. *Поняття просторів числових послідовностей.* Позначимо через $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ лінійний простір послідовностей $c=(c_1,...,c_k,...)=(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ елементів поля $\mathbb{P}$. На просторі $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ введемо таке поняття збіжності послідовності його елементів: *послідовність* $c^{\langle p\rangle} = (c_1^{\langle p\rangle},...,c_k^{\langle p\rangle},...)$, $\quad p\in\mathbb{N}$, *збігається до послідовності* $c=(c_1,...,c_k,...)$ *в* $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, *якщо* $c_k^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} c_k$ *для кожного* $k\in\mathbb{N}$.

Через $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$ позначимо лінійний простір фінітних послідовностей з простору $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, тобто послідовностей вигляду

$$c = (c_1,...,c_r,0,...),$$

якщо $c_k=0$, коли $k>r$, де $r\in\mathbb{N}$ — залежне від c число (може бути і $c_1=0$). На просторі $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$ введемо таке поняття збіжності послідовності його елементів: *послідовність* $c^{\langle p\rangle} = (c_1^{\langle p\rangle},...,c_{r_p}^{\langle p\rangle},0,...)$, $p\in\mathbb{N}$, *збігається до послідовності* $c=(c_1,...,c_r,0,...)$ *в* $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$, *якщо існує натуральне число* r' *таке, що для кожного* $p\in\mathbb{N}$ *маємо* $c_k^{\langle p\rangle}=0$, *якщо* $k>r'$, *і* $c_k^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} c_k$ *для кожного* $k\in\{1,\ldots,r'\}$.

Позначимо через $l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$ — лінійний простір, складений з елементів $c\in\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ таких, що $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|c_k|^2<\infty$. Простір $l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$, наділений скалярним добутком

$$(c,d)_{l^2} := \begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k d_k, & \text{якщо } \ \mathbb{P}=\mathbb{R}; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k \overline{d_k}, & \text{якщо } \ \mathbb{P}=\mathbb{C}, \end{cases} \tag{68}$$

і відповідною йому нормою

$$\|c\|_{l^2} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{69}$$

є гільбертовим (див., наприклад, [20]). Тут і далі через $\overline{z}$ позначаємо комплексно-спряжене до $z\in\mathbb{C}$ число. Очевидно, що коли $z\in\mathbb{R}$, то $\overline{z}=z$, і далі будемо цим користуватися.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ — яке-небудь. Під $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ розумітимемо лінійний простір, складений з елементів $c \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ таких, що

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}|c_k|^2 < \infty,$$

і наділений скалярним добутком

$$(c,d)_{h^s} := \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s} c_k \overline{d_k} \tag{70}$$

та відповідною нормою

$$\|c\|_{h^s} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}|c_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{71}$$

Простір $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ є гільбертовим (див., наприклад, [20]).

Покладемо

$$h^{\infty}(\mathbb{N};\mathbb{P}) := \bigcap_{s>0} h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}), \quad h^{-\infty}(\mathbb{N};\mathbb{P}) := \bigcup_{s>0} h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P}).$$

Зі сказаного вище випливає, що правильні неперервні і щільні включення

$$\begin{gathered}\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c \subset h^{\infty}(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset ... \subset h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset ... \subset h^1(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset l^2(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset \\ \subset h^{-1}(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset ... \subset h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset ... \subset h^{-\infty}(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}^{\mathbb{N}}, \quad s>0.\end{gathered} \tag{72}$$

2.2.2. *Спряжені до просторів числових послідовностей простори.* Для довільного $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $e^{\langle k\rangle}$ елемент простору $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$, всі елементи якого є нулями, крім елемента на k-му місці, який дорівнює 1.

Нехай $F\colon \mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c \to \mathbb{P}$ — неперервний лінійний функціонал, а $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — будь-який елемент простору $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$. Тоді маємо

$$c = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e^{\langle k\rangle} \quad \text{(сума скінченна)}, \tag{73}$$

а отже,

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k F\big(e^{\langle k\rangle}\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \overline{f_k} \quad \forall c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c,$$

де

$$f_k = \overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)} \in \mathbb{P}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Зрозуміло, що коли $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то $f_k = F\big(e^{\langle k\rangle}\big) \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Послідовність $f = \big\{f_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ є елементом простору $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$. І навпаки, якщо $f = \big\{f_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ — довільний елемент простору $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, то відображення $F\colon \mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c \to \mathbb{P}$, задане за правилом

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \overline{f_k},$$

є неперервним лінійним функціоналом на просторі $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c$. Отже, відображення

$$Q\colon \big(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c\big)' \to \mathbb{P}^{\mathbb{N}},$$

задане за правилом $Q(F) = f$, де f визначене в (74), є бієктивним.

Покажемо, що Q є лінійним у випадку $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ і антилінійним у випадку $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ відображенням. Нехай $F^{\langle 1\rangle}$, $F^{\langle 2\rangle}$ — довільні елементи простору $\big(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}_c\big)'$, а $f^{\langle j\rangle} :=$

$Q(F^{\langle j\rangle})$, $j = 1,2$, — їх образи при заданому відображенні Q (див. формулу (74)). Тоді

$$Q(F^{\langle 1\rangle}+F^{\langle 2\rangle}) = \Big(\overline{(F^{\langle 1\rangle}+F^{\langle 2\rangle})\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} =$$
$$= \Big(\overline{F^{\langle 1\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}+\overline{F^{\langle 2\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(\overline{F^{\langle 1\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} + \Big(\overline{F^{\langle 2\rangle}\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} =$$
$$= f^{\langle 1\rangle}+f^{\langle 2\rangle} = Q(F^{\langle 1\rangle})+Q(F^{\langle 2\rangle}).$$

Тепер нехай $F\in\big(\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}\big)'$, $\lambda\in\mathbb{P}$ — довільні, $f := Q(F)$. Тоді

$$Q(\lambda F) = \Big(\overline{(\lambda F)\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(\overline{\lambda}\cdot\overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} = \overline{\lambda}\cdot\Big(\overline{F\big(e^{\langle k\rangle}\big)}\Big)_{k\in\mathbb{N}} = \overline{\lambda}f = \overline{\lambda}Q(F).$$

Звідси випливає, що Q є лінійним у випадку $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ і антилінійним у випадку $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ відображенням. Це разом із бієктивністю Q дає можливість ототожнити простори $\big(\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}\big)'$ і $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$, а операцію спряження між $\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}$ і $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ визначити за правилом

$$\langle c,f\rangle_{\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}} := \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\overline{f_k}, \quad c\in\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}},\ f\in\mathbb{P}^{\mathbb{N}}.$$

Далі вважатимемо, що це зроблено.

Тепер покажемо, що $\big(h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})\big)' \cong h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ для довільного $s\in\mathbb{R}$. Справді, нехай $s\in\mathbb{R}$ — довільне фіксоване число, а $F\colon h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})\to\mathbb{P}$ — який-небудь неперервний лінійний функціонал. Якщо $c=(c_k)_{k\in\mathbb{N}}\in h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})$, то для кожного $p\in\mathbb{N}$ покладемо

$$c^{\langle p\rangle} = \big(c_1,...,c_p,0,...\big),$$

тобто $c^{\langle p\rangle}$ — елемент простору $\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}$, компоненти якого з номерами від 1 до p співпадають з відповідними компонентами елемента c, а решта — нулі. Очевидно, що $c^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} c$ в $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})$, а значить, враховуючи неперервність і лінійність функціоналу F, маємо

$$F(c) = F(\lim_{p\to\infty} c^{\langle p\rangle}) = \lim_{p\to\infty} F(c^{\langle p\rangle}) = \lim_{p\to\infty} F\Big(\sum_{k=1}^{p} c_k e^{\langle k\rangle}\Big) =$$
$$= \lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} c_k F\big(e^{\langle k\rangle}\big) = \lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} c_k\overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\overline{f_k}, \tag{75}$$

де f_k, $k\in\mathbb{N}$, визначені за правилом (74). Покажемо, що $f=(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ належить до $h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$. Справді, маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^s c_k k^{-s}\overline{f_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k\overline{g_k}, \tag{76}$$

де

$$d_k := k^s c_k, \quad g_k := k^{-s} f_k, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{77}$$

Очевидно, що $d=(d_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$. Відображення

$$l^2(\mathbb{N};\mathbb{P}) \ni d \ \overset{G}{\mapsto}\ \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k\overline{g_k}$$

є лінійним і неперервним функціоналом. Звідси випливає, що $g\in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і $\|G\| = \|g\|_{l^2}$. Це, зокрема, означає, що $f\in h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$. Оскільки $\|d\|_{l^2} = \|c\|_{h^s}$, $\|g\|_{l^2} = \|f\|_{h^{-s}}$,

$\|G\| = \|F\|$ (див. доведення аналогічного результату у попередньому розділі), то $\|F\| = \|f\|_{h^{-s}}$.

Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, легко переконатися, що для будь-якого елемента $f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з простору $h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ відображення

$$F(c) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\overline{f_k}, \quad c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^n(\mathbb{N};\mathbb{P}),$$

є лінійним і неперервним функціоналом на $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})$, тобто елементом спряженого простору $\big(h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})\big)'$, причому $\|F\| = \|f\|_{h^{-s}}$. Отже, зі сказаного вище випливає, що відображення $Q\colon \big(h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})\big)' \to h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$, визначене за правилом (74), є ізометрією. Аналогічно, як і вище, переконуємося, що воно є антилінійним. Тому ми маємо право ототожнити простори $\big(h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})\big)'$ і $h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і визначити операцію спряження між $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і $h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ за правилом

$$\langle c, f\rangle_{h^n} := \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\overline{f_k}, \quad c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}), \quad f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P}).$$

Звідси бачимо, що для будь-якого елемента $c \in h^n(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і $f \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ маємо

$$\langle c, f\rangle_{h^n} = (c, f)_{l^2},$$

що показує узгодження між операцією спряження між просторами $h^s(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і $h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ і скалярним добутком в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$, тобто коректність для кожного $s > 0$ трійки просторів

$$h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset l^2(\mathbb{N};\mathbb{P}) \subset h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P}).$$

2.3. **Функційні простори.**

2.3.1. *Простір Лебега* $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$. Позначимо через $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ гільбертів простір класів еквівалентних вимірних за Лебегом функцій $u\colon (0,\pi) \to \mathbb{P}$ таких, що $\int_0^\pi |u(x)|^2\,dx < \infty$ зі скалярним добутком

$$(u,v)_{L^2} := \begin{cases} \int_0^\pi u(x)v(x)\,dx, & \text{якщо } \mathbb{P} = \mathbb{R};\\ \int_0^\pi u(x)\overline{v(x)}\,dx, & \text{якщо } \mathbb{P} = \mathbb{P}, \end{cases}$$

і відповідною йому нормою

$$\|u\|_{L^2} := \Big(\int_0^\pi |u(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Розглянемо оператор $A\colon D(A) \to L^2(0,\pi;\mathbb{P})$, де

$$D(A) := \{u \in H^2(0,\pi;\mathbb{P}) \,\big|\, u(0) = 0,\, u(\pi) = 0\}, \quad Au = -u''.$$

Цей оператор є самоспряженим, додатнім і його резольвента $(cI + A)^{-1}$ існує для будь-яких $c > 0$ і є компактним оператором (див., наприклад, [16]). Це означає, що у просторі $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ можна вибрати ортонормовану базу, складену з власних елементів цього оператора. Безпосередньо знаходимо, що такою базою є система функцій

$$w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, \quad x \in [0,\pi], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

причому
$$Aw_k = k^2 w_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{79}$$
Отже, будь-який елемент $u \in L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ можна подати у вигляді суми збіжного в $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ ряду Фур'є
$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi), \tag{80}$$
де
$$\widehat{u}_k := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{81}$$
Послідовність $\widehat{u} := (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ називають *скінченним перетворенням Фур'є* (або його ще називають *sin-перетворенням*) функції u. Як відомо, виконується рівність Парсеваля
$$\|u\|^2_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\widehat{u}_k|^2, \tag{82}$$
звідки отримуємо включення $\widehat{u} \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$. З іншого боку, якщо $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$, то легко довести, що ряд
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \sin kx, \ \ x \in (0,\pi),$$
збігається в $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$, а значить його сума є елементом простору $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$, причому норма цього елемента дорівнює $\|c\|_{l^2}$. Отже, відображення (скінченне перетворення Фур'є)
$$L^2(0,\pi;\mathbb{P}) \ni u \ \ \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \ \ \widehat{u} \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{P}),$$
визначене за правилом (81), є лінійною ізометрією між просторами $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ і $l^2(\mathbb{N};\mathbb{P})$. Базуючись на цьому, можна означити скалярний добуток $(u,v)_{L^2}$ інакшим способом. Справді, нехай $u, v \in L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ і
$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \quad v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{v}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi).$$
Позначимо для кожного $p \in \mathbb{N}$:
$$u^{\langle p\rangle}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{p} \widehat{u}_k \sin kx, \quad v^{\langle p\rangle}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{p} \widehat{v}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi).$$
Оскільки $u^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u$, $v^{\langle p\rangle} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ і скалярний добуток в гільбертовому просторі є неперервним за обидвома аргументами, то
$$(u,v)_{L^2} = \lim_{p\to\infty} (u^{\langle p\rangle}, v^{\langle p\rangle})_{L^2} = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \widehat{u}_k \overline{\widehat{v}_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \overline{\widehat{v}_k}.$$
Тут ми врахували також ортонормованість системи (78), тобто
$$\big(w_k, w_m\big)_{L^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \sin mx \, dx = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = m; \\ 0, & \text{якщо} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Отже, маємо

$$(u,v)_{L^2} = (\widehat{u},\widehat{v})_{l^2}, \quad u,v \in L^2(0,\pi;\mathbb{P}), \tag{83}$$

зокрема,

$$\|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{l^2}.$$

2.3.2. *Простори Соболєва позитивного парного порядку.* Нехай n — довільне фіксоване натуральне число. Позначимо через $H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ простір Соболєва, складений з функцій u з простору $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$, які мають узагальнені похідні $u^{(\nu)}$ з простору $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$ для кожного $\nu \in \{1,...,2n\}$ і задовольняють умови $u^{(2\nu)}(0)=0,\ u^{(2\nu)}(\pi)=0,\ \nu=\overline{0,n-1}$. Цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(\!(u,v)\!)_{H_0^{2n}} := \sum_{\nu=0}^{n}(u^{(2\nu)},v^{(2\nu)})_{L^2} \tag{84}$$

і відповідною йому нормою

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{H_0^{2n}} := \Big(\int_0^\pi \sum_{\nu=0}^{n}|u^{(2\nu)}(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Покажемо, що для довільних $u,v \in H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ маємо рівність

$$(\!(u,v)\!)_{H_0^{2n}} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\big[\sum_{\nu=0}^{n}(k^{2\nu})^2\big]\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k}, \tag{85}$$

де $\widehat{u}$ і $\widehat{v}$ є скінченними перетвореннями Фур'є елементів u і v простору $H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$. Справді, для довільного $\nu \in \{1,...,n\}$ маємо

$$(u^{(2\nu)}(\cdot),v^{(2\nu)}(\cdot))_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\widehat{u^{(2\nu)}})_k\,\overline{(\widehat{v^{(2\nu)}})_k}. \tag{86}$$

Але для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ на підставі формули інтегрування частинами одержуємо

$$(\widehat{u^{(2\nu)}})_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{2\pi} u^{(2\nu)}(x)\sin kx\,dx = k^{2\nu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} u(x)\sin kx\,dx = k^{2\nu}\widehat{u}_k. \tag{87}$$

Аналогічно, як і в (87), для довільного $k\in\mathbb{N}$ отримуємо, що

$$(\widehat{v^{(2\nu)}})_k = k^{2\nu}\widehat{v}_k. \tag{88}$$

Із (84) на підставі (86) — (88) здобуваємо (85). Звідси маємо, зокрема, рівність

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{H_0^{2n}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{\nu=0}^{n}(k^{2\nu})^2\Big]|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Тепер зауважимо, що

$$\sum_{\nu=0}^{n}(k^{2\nu})^2 \sim k^{4n} \quad \text{при} \quad k\to+\infty,$$

звідки випливає, що на просторі $H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ можна ввести еквівалентні скалярному добутку $(\!(\cdot,\cdot)\!)_{H_0^{2n}}$ і відповідній нормі $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{H_0^{2n}}$ новий скалярний добуток

$$(u,v)_{H_0^{2n}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{4n}\widehat{u}_k\,\overline{\widehat{v}_k}$$

і відповідну йому норму

$$\|u\|_{H_0^{2n}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{4n}|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Далі в просторі $H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ будемо розглядати скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_{H_0^{2n}}$ і відповідну йому норму $\|\cdot\|_{H_0^{2n}}$. Тоді, як випливає з вище сказаного, простори $H_0^{2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ і $h^{2n}(\mathbb{N};\mathbb{P})$ є ізометричними.

2.3.3. *Простори $H^s_{2\pi}(0,\pi;\mathbb{P})$, $s\in\mathbb{R}$.* Нехай s — довільне дійсне число. Розглянемо простір $H^s_{2\pi}(0,\pi;\mathbb{P})$, складений з рядів Фур'є

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k \sin kx, \quad x\in(0,\pi),$$

де $\widehat{u} = (\widehat{v}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^s\big(\mathbb{N};\mathbb{P}\big)$. Простір $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u,v)_{H_0^s} := \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k}$$

і відповідною нормою

$$\|u\|_{H_0^s} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}|\widehat{u}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Визначимо на декартовому добутку $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\times H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$ білінійну (**півторалінійну**) форму за правилом

$$\langle u,v\rangle_{H_0^s} := \sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\overline{\widehat{v}_k} = \langle\widehat{u},\widehat{v}\rangle_{h^s}, \tag{89}$$

якщо

$$u(\cdot) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k \sin k\cdot \in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}), \quad v(\cdot) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{v}_k \sin k\cdot \in H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P}).$$

$$\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^s(\mathbb{N};\mathbb{P}), \quad \widehat{v} = (\widehat{v}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P}).$$

2.3.4. *Спряжені простори.* Нехай s — довільне дійсне число. Розглянемо простір $\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$. Покажемо, що для довільного $W\in\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ існує і тільки один елемент $w\in H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$ (тобто

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{w}_k \sin kx, \ x\in(0,\pi),$$

де $\widehat{w} = (\widehat{w}_k)\in h^{-s}(\mathbb{N};\mathbb{P})$) такий, що рівність

$$W(u) = \langle u,w\rangle_{H_0^s} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\,\overline{\widehat{w}_k} \equiv \langle\widehat{u},\widehat{w}\rangle_{h^s} \tag{90}$$

виконується для для всіх

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k \sin kx, \quad x\in(0,\pi).$$

З цією метою для кожного $p \in \mathbb{N}$ покладемо

$$u^{\langle p\rangle}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{p} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi).$$

Легко переконатися, що $u^{\langle p\rangle} \to u$ при $p \to \infty$ в $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$. Оскільки W є неперервним і лінійним відображенням $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$ в $\mathbb{P}$, то

$$W(u) = \lim_{p\to\infty} W(u^{\langle p\rangle}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \widehat{u}_k W(\sin k\cdot) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \widehat{u}_k\, \overline{\widehat{w}_k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k\, \overline{\widehat{w}_k}, \tag{91}$$

де

$$\widehat{w}_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \overline{W(\sin k\cdot)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{92}$$

Оскільки відображення

$$h^s\big(\mathbb{N};\mathbb{P}\big) \ni \widehat{u} \quad \mapsto \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \overline{\widehat{w}_k} \in \mathbb{P}$$

є лінійним і неперервним функціоналом, то з пункту 2.2.2 отримуємо, що $\widehat{w} = (\widehat{w}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ належить $h^{-s}\big(\mathbb{N};\mathbb{P}\big)$, тобто правильна рівність (90), в якій $\widehat{w}$ визначено в (92).

Правильне і обернене твердження: якщо $\widehat{w} \in h^{-s}\big(\mathbb{N};\mathbb{P}\big)$, то відображення W, визначене в (90), є елементом $\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$.

Із (90) і (89) випливає, що для кожного $W \in \big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ існує і тільки одне $w \in H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$ таке, що

$$W(u) = \langle u, w\rangle_{H_0^s}, \quad u \in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}), \tag{93}$$

і для кожного $w \in H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$ відображення W, визначене в (93), є елементом простору $\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$, причому

$$\|W\| = \|w\|_{H_0^{-s}}.$$

Дане відображення $W \mapsto w$ позначимо через R. Аналогічно, як і в попередньому пункті, можна показати, що відображення R є лінійним у випадку $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ і антилінійним у випадку $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Справді, нехай $W, W^{\langle 1\rangle}, W^{\langle 2\rangle}$ — довільні елементи простору $\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ і

$$W \overset{R}{\mapsto} w, \quad W^{\langle 1\rangle} \overset{R}{\mapsto} w^{\langle 1\rangle}, \quad W^{\langle 2\rangle} \overset{R}{\mapsto} w^{\langle 2\rangle}.$$

Згідно з (93) маємо

$$\begin{gathered}
\big(W^{\langle 1\rangle} + W^{\langle 2\rangle}\big)(u) = \langle u, R(W^{\langle 1\rangle} + W^{\langle 2\rangle})\rangle_{H_0^s},\\
\big(W^{\langle 1\rangle} + W^{\langle 2\rangle}\big)(u) = W^{\langle 1\rangle}(u) + W^{\langle 2\rangle}(u) =\\
= \langle u, R(W^{\langle 1\rangle})\rangle_{H_0^s} + \langle u, R(W^{\langle 2\rangle})\rangle_{H_0^s} =\\
= \langle u, R\big(W^{\langle 1\rangle}\big) + R\big(W^{\langle 2\rangle}\big)\rangle_{H_0^s} \quad \forall u \in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}).
\end{gathered}$$

Звідси випливає, що

$$R(W^{\langle 1\rangle} + W^{\langle 2\rangle}) = R(W^{\langle 1\rangle}) + R(W^{\langle 2\rangle})$$

для будь-яких $W^{\langle 1\rangle}, W^{\langle 2\rangle} \in \big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$.

Далі скористаємося властивістю

$$\lambda\langle u,w\rangle_{H_0^s}=\lambda\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\overline{\widehat{w}}_k=\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\overline{\overline{\lambda}\widehat{w}_k}=\langle u,\overline{\lambda}w\rangle_{H_0^s}\quad\forall u\in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}),\lambda\in\mathbb{P}.$$

Враховуючи це, для будь-яких $W\in\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ і $\lambda\in\mathbb{P}$ на підставі (93) маємо

$$(\lambda W)(u)=\langle u,R(\lambda W)\rangle_{H_0^s},$$

$$(\lambda W)(u)=\lambda W(u)=\lambda\langle u,R(W)\rangle_{H_0^s}=\langle u,\overline{\lambda}R(W)\rangle_{H_0^s},\quad u\in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}).$$

Звідси випливає, що $R(\lambda W)=\overline{\lambda}R(W)$. Отже, відображення

$$R\colon \big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'\to H_{2\pi}^{-n}(0,\pi;\mathbb{P})$$

є лінійною, якщо $\mathbb{P}=\mathbb{R}$, і антилінійною, якщо $\mathbb{P}=\mathbb{R}$, ізометрією, що дозволяє ототожнити простори $\big(H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ і $H_{2\pi}^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$, що далі будемо вважати є зробленим.

Зауважимо, що для довільного

$$w(\cdot)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{w}_k\sin k\cdot\in H_{2\pi}^{-n}(0,\pi;\mathbb{P})$$

згідно з (92) і (93) маємо

$$\widehat{w}_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\overline{\langle\sin k\cdot,w(\cdot)\rangle_{H_0^s}},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{94}$$

У випадку $s>0$ це узгоджується з означенням коефіцієнтів ряду Фур'є для елементів простору $L^2(0,\pi;\mathbb{P})$. Справді, якщо $w\in L^2(0,\pi;\mathbb{P})$, то і $w\in H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P})$, а тоді маємо

$$\widehat{w}_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\big(w(\cdot),\sin k\,\cdot\,\big)_{L^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\overline{\big(\sin k\cdot,w(\cdot)\big)_{L^2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\overline{\langle\sin k\cdot,w(\cdot)\rangle_{H_0^s}}.$$

2.3.5. *Простори* $B_0(0,\pi;\mathbb{P})$, $B(0,\pi;\mathbb{P})$. Введемо ще позначення. Через $B_0(0,\pi;\mathbb{P})$ позначимо лінійний простір функцій $u\colon(0,\pi)\to\mathbb{P}$, які зображуються у вигляді скінченних сум

$$u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\sin kx,\quad x\in(0,\pi),$$

де $\widehat{u}=(\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}$. Очевидно, що

$$\widehat{u}_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(x)\sin kx\,dx,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Скажемо, що послідовність $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, збігається до u в $B_0(0,\pi;\mathbb{P})$, якщо послідовність $\widehat{u}^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, скінченних перетворень Фур'є елементів $u^{\langle p\rangle}$, $p\in\mathbb{N}$, збігається до $\widehat{u}$ в просторі $\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}$.

Під $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ розумітимемо простір рядів Фур'є

$$u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\widehat{u}_k\sin kx,\quad x\in(0,\pi),$$

де $\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P}^{\mathbb{N}}$. Скажемо, що послідовність $u^{\langle p\rangle}$, $p \in \mathbb{N}$, збігається до u в $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$, якщо послідовність $\widehat{u}^{\langle p\rangle}$, $p \in \mathbb{N}$, скінченних перетворень Фур'є елементів $u^{\langle p\rangle}$, $p \in \mathbb{N}$, збігається до $\widehat{u}$ в просторі $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$. Як і вище, можемо показати, що простір $\big(B_0(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ можна ототожнити з простором $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$, використовуючи відображення, цілком аналогічне до введеного раніше відображення R і опираючись на такий факт: для-будь-якого $W \in \big(B_0(0,\pi;\mathbb{P})\big)'$ існує єдиний елемент $w \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ такий, що

$$W(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u_k}\overline{\widehat{w_k}} = \langle \widehat{u}, \widehat{w}\rangle_{\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}} \quad \forall u \in B_0(0,\pi;\mathbb{P}).$$

Операцію спряження до просторів $B_0(0,\pi;\mathbb{P})$ і $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ визначимо за правилом

$$\langle u, w\rangle_{B_0} := \langle \widehat{u}, \widehat{w}\rangle_{\mathbb{P}_c^{\mathbb{N}}}, \quad u \in B_0(0,\pi;\mathbb{P}),\ w \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P}).$$

Звідси отримуємо, що

$$\widehat{w}_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\overline{\langle \sin k\cdot, w(\cdot)\rangle_{B_0}}\,.$$

Отже, на підставі введених позначень, понять і проведених міркувань приходимо до висновку про наявність неперервних і щільних включень:

$$\begin{gathered} B_0(0,\pi;\mathbb{P}) \subset H_0^{\infty}(0,\pi;\mathbb{P}) \subset \ldots \subset H_0^{s}(0,\pi;\mathbb{P}) \subset \ldots \subset L^2(0,\pi;\mathbb{P}) \subset \\ \subset \ldots \subset H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P}) \subset \ldots \subset H_0^{-\infty}(0,\pi;\mathbb{P}) \subset B_0'(0,\pi;\mathbb{P}), \end{gathered} \tag{95}$$

де

$$H_0^{\infty}(0,\pi;\mathbb{P}) := \bigcap_{s>0} H_0^{s}(0,\pi;\mathbb{P}), \quad H_0^{-\infty}(0,\pi;\mathbb{P}) := \bigcup_{s>0} H_0^{-s}(0,\pi;\mathbb{P}).$$

2.3. Операторні рівняння, породжені крайовою задачею для диференціального рівняння. Поширимо на простір $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ оператор

$$A\colon H_0^2(0,\pi;\mathbb{P}) \to L^2(0,\pi;\mathbb{P}),$$

визначений за правилом

$$Au(x) := -u''(x).$$

Для цього зауважимо, що для будь-яких елементів $u, v \in H_0^2(0,\pi;\mathbb{P})$ маємо за формулою інтегрування частинами

$$(u'', v)_{L^2} = \int_0^{\pi} u''(x)\overline{v(x)}\,dx = u'(x)\overline{v(x)}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)\overline{v'(x)}\,dx =$$

$$= -\,u(x)\overline{v'(x)}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} u(x)\overline{v''(x)}\,dx = \int_0^{\pi} u(x)\overline{v''(x)}\,dx = (u, v'')_{L^2},$$

звідки отримуємо

$$(Au, v)_{L^2} = -(u'', v)_{L^2} = -(u, v'')_{L^2} = (u, Av)_{L^2}.$$

Також маємо

$$Au(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi),$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98

якщо

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \ x \in (0,\pi),$$

— довільний елемент простору $B_0(0,\pi;\mathbb{P})$.

Опираючись на ці факти, визначимо оператор

$$A\colon B_0'(0,\pi;\mathbb{P}) \to B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$$

за правилом: *для довільного елемента* $u \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ *елемент* $Au \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ *задається тотожністю*

$$\langle v, Au\rangle_{B_0} = \langle Av, u\rangle_{B_0} \quad \forall v \in B_0(0,\pi;\mathbb{P}). \tag{96}$$

Нехай

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi)$$

, — який-небудь елемент простору $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$. Покажемо, що Au існує та задається формулою

$$Au(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi). \tag{97}$$

Для цього припустимо, що $Au \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$. Тоді

$$Au(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{(Au)}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi). \tag{98}$$

Згідно з означенням оператора A і коефіцієнтів $\widehat{(Au)}_k$ ряду Фур'є для елемента Au маємо

$$\widehat{(Au)}_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \overline{\langle \sin k\cdot, Au(\cdot)\rangle_{B_0}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \overline{\langle A\sin k\cdot, u(\cdot)\rangle_{B_0}} =$$
$$= k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \overline{\langle \sin k\cdot, u(\cdot)\rangle_{B_0}} = k^2\, \widehat{u}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси і з (98) отримуємо (97), звідки легко випливає наше твердження.

Внаслідок правильності включень (95) рівність (97) виконується для довільного елемента u будь-якого простору $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$, де $s \in \mathbb{R}$ — яке-небудь.

Нехай $\nu \in \mathbb{N}$, $u \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ — довільні. Визначимо

$$A^\nu u(x) = A(A^{\nu-1}u)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2\nu} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0,\pi).$$

Покажемо, що $A^\nu\colon H_0^s(0,\pi;\mathbb{P}) \to H_0^{s-2\nu}(0,\pi;\mathbb{P})$. Справді, маємо

$$\|A^\nu u\|^2_{H_0^{s-2\nu}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s-4\nu} k^{4\nu} |\widehat{u}_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s} |\widehat{u}_k|^2 = \|u\|^2_{H_0^s}.$$

Розглянемо ***диференціальний оператор***

$$L(A) := a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu A^{n-\nu},$$

де $n \in \mathbb{N}$ — довільне фіксоване число, $a_\nu \in \mathbb{P}$, $\nu = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$, I — тотожний оператор.

На підставі сказаного вище для довільного елемента

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi),$$

простору $B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$ маємо

$$\begin{gathered} L(A)u(x) = a_0 A^n u(x) + a_1 A^{n-1} u(x) + \ldots + a_n u(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu A^{n-\nu} u(x) \equiv \\ \equiv \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu k^{2(n-\nu)} \Big) \widehat{u}_k \sin kx \equiv \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} L(k^2) \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi), \end{gathered} \tag{99}$$

де

$$L(k^2) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu k^{2(n-\nu)} \equiv a_0 k^{2n} + a_1 k^{2(n-1)} + \ldots + a_n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що відображення

$$L(A) \colon B_0(0, \pi; \mathbb{P}) \to B_0(0, \pi; \mathbb{P}), \quad L(A) \colon B_0'(0, \pi; \mathbb{P}) \to B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$$

є лінійними і неперервними.

Розглянемо таку ***задачу***: *для заданого елемента $f \in B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$ знайти елемент $u \in B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$ такий, що*

$$L(A)u = f. \tag{100}$$

Зі сказаного вище легко випливає таке твердження.

Лема 3. *Для заданого елемента*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{f}_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi),$$

простору $B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$ розв'язок рівняння (100) *— це елемент*

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{u}_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi), \tag{101}$$

простору $B_0'(0, \pi; \mathbb{P})$, де $\widehat{u} = (\widehat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є розв'язком системи рівнянь

$$L(k^2) \widehat{u}_k = \widehat{f}_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{102}$$

Запровадимо позначення

$$N_L := \{k \in \mathbb{N} \,|\, L(k^2) = 0\}.$$

Теорема 6 (альтернатива Фредгольма)**.** *Нехай*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{f}_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi), \tag{103}$$

задано. Тоді можливі такі три випадки:

1. *Якщо $N_L = \varnothing$, то операторне рівняння* (100) *має і тільки один розв'язок, причому він зображується у вигляді*

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{f}_k}{L(k^2)} \sin kx, \quad x \in (0,\pi). \tag{104}$$

2. *Якщо $N_L \neq \varnothing$ і $\widehat{f}_k = 0$ для всіх $k \in N_L$, то операторне рівняння* (100) *має безліч розв'язків і їх можна записати у вигляді*

$$u(x) = \sum_{k\in N_L} c_k \sin kx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus N_L} \frac{\widehat{f}_k}{L(k^2)} \sin kx, \quad x \in (0,\pi), \tag{105}$$

де c_k, $k \in N_L$, — довільні комплексні числа.

3. *Якщо $N_L \neq \varnothing$ і існує $k' \in N_L$ таке, що $\widehat{f}_{k'} \neq 0$, то операторне рівняння* (100) *не має розв'язку.*

Доведення. Доведення легко випливає з леми 3. □

Дамо еквівалентне теоремі 6 твердження. Для цього введемо такі позначення:

$$V_L := \{v \in B_0(0,\pi;\mathbb{P}) \,|\, v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{v}_k \sin kx, \text{ де } \widehat{v}_k = 0 \text{ для всіх } k \in \mathbb{N}\setminus N_L\} \equiv$$

$$\equiv \{v \in B_0(0,\pi;\mathbb{P}) \,|\, Lv = 0\},$$

$V_L^{\perp} := \{w \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P}) \,|\, \langle v, w\rangle_{B_0} = 0 \ \ \forall\, v \in V_L\}$ — ортогональне доповнення до V_L. Легко бачити, що V_L та $V_L^{\perp}$ — лінійні підпростори простору $B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$ і

$$B_0'(0,\pi;\mathbb{P}) = V_L \oplus V_L^{\perp}.$$

Відмітимо, що оператор $L(A)$ переводить підпростір $V_L^{\perp}$ на себе бієктивно. У випадку $V_L = \{0\}$ визначимо оператор

$$L^{-1}(A)\colon B_0'(0,\pi;\mathbb{P}) \to B_0'(0,\pi;\mathbb{P})$$

за правилом

$$L^{-1}(A)u(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{u}_k}{L(k^2)} \sin kx, \quad x \in (0,\pi), \quad u \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P}),$$

а у випадку $V_L \neq \varnothing$ визначимо оператор

$$L_{\perp}^{-1}(A)\colon V_L^{\perp} \to V_L^{\perp}$$

за правилом

$$L_{\perp}^{-1}(A)u(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus N_L} \frac{\widehat{u}_k}{L(k^2)} \sin kx, \quad x \in (0,\pi), \quad u \in V_L^{\perp}.$$

Теорема 7 (альтернатива Фредгольма; еквівалентне формулювання)**.** *Нехай*

$$f \in B_0'(0,\pi;\mathbb{P}) \tag{106}$$

задано. Тоді можливі такі три випадки:

1. *Якщо $V_L = \{0\}$, то операторне рівняння* (100) *має і тільки один розв'язок, причому він зображується у вигляді*

$$u(x) = L^{-1}(A)f(x), \quad x \in (0,\pi). \tag{107}$$

2. *Якщо $V_L \neq \{0\}$ і $f \in V_L^{\perp}$, то операторне рівняння* (100) *має безліч розв'язків і їх можна записати у вигляді*

$$u(x) = v(x) + L_{\perp}^{-1}f(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{108}$$

де v — довільний елемент множини V_L.

3. *Якщо $V_L \neq \{0\}$ і $f \notin V_L^{\perp}$, то операторне рівняння* (100) *не має розв'язку.*

Теорема 8. *Нехай $N_L = \varnothing \;\Leftrightarrow\; V_L = \{0\}$ і $f \in H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$, де $s \in \mathbb{R}$. Тоді (єдиний) розв'язок операторного рівняння* (100) *належить простору $H_0^{s+2n}(0,\pi;\mathbb{P})$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$|L(k^2)| \geqslant |a_0|k^{2n} - (|a_1|k^{2(n-1)} + ... + |a_n|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає існування сталої $c > 0$ такої, що

$$|L(k^2)| \geqslant ck^{2n} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}. \tag{109}$$

Тоді маємо

$$\|u\|_{H_0^{s+2n}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s+4n}\left|\frac{\widehat{f}_k}{L(k^2)}\right|^2 \leqslant c^{-2}\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s+4n}k^{-4n}\left|\widehat{f}_k\right|^2 =$$
$$= c^{-2}\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}\left|\widehat{f}_k\right|^2 = C\|\widehat{f}\|^2_{H^s}, \quad C := c^{-2}. \tag{110}$$

Звідси легко випливає наше твердження. □

Наслідок 3. *Для довільного фіксованого числа $a_0 \neq 0$ існує множина $S(a_0) \subset \mathbb{P}^n$ нульової міри за Лебегом така, що для будь-якого вектора $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{P}^n \setminus S(a_0)$ рівняння* (100) *має і тільки один розв'язок, причому оператор $L(A)$ реалізує ізоморфізм між просторами $H_0^{s+2n}(0,\pi;\mathbb{P})$ і $H_0^s(0,\pi;\mathbb{P})$ для будь-якого $s \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $a_0 \neq 0$ — довільне фіксоване число. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$S_k(a_0) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{P}^n |\; a_0k^{2n} + a_1k^{2(n-1)} + \ldots + a_n = 0\}.$$

Множина $S_k(a_0)$ є гіперплощиною в просторі $\mathbb{P}^n$ і має нульову міру за Лебегом для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Тоді множина

$$S(a_0) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k(a_0)$$

має нульову міру за Лебегом в просторі $\mathbb{P}^n$.

Нехай $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n \setminus S(a_0)$. Покажемо, що $L(A)u \in H_0^s(0, \pi; \mathbb{P})$, якщо $u \in H_0^{s+2n}(0, \pi; \mathbb{P})$. Згідно з (99) маємо

$$(\widehat{L(A)u})_k = L(k^2)\widehat{u}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$\|L(A)u\|_{H_0^s} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}|L(k^2)|^2|\widehat{u}_k|^2 \leqslant C\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s}k^{4n}|\widehat{u}_k|^2 =$$
$$= C\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2s+4n}|\widehat{u}_k|^2 = C\|u\|_{H_0^{s+2n}} < \infty.$$

Тут ми використали нерівність

$$|L(k)|^2 \leqslant Ck^{4n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

яка виконується з деякою сталою $C > 0$, що не залежить від k.

Те, що $u \in H_0^{s+2n}(0, \pi; \mathbb{P})$, коли $L(A)u \in H_0^s(0, \pi; \mathbb{P})$, безпосередньо випливає з теореми 8. □

3. **Висновки**

У цій праці описано загальну схему дослідження задач для диференціальних та операторних рівнянь методом Фур'є. Показано, що застосування скінченних перетворень Фур'є дає змогу звести аналіз розв'язності задач до дослідження відповідних операторних рівнянь у просторах числових послідовностей. Встановлено зв'язок між властивостями розв'язку, поведінкою коефіцієнтів Фур'є та структурою символу оператора, що дозволяє описати умови існування, єдиності та гладкості розв'язків. Запроваджений підхід створює єдине координатне середовище для вивчення широкого класу задач для операторних рівнянь. Отримані результати можуть бути використані для подальшого дослідження задач для диференціально-операторних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В. Рівняння математичної фізики: практикум: навчальний посібник. – 2-ге вид., стереотипне. – Львів: "Новий Світ-2000", 2026. – 252 с.
2. Бугрій О.М. Методичні рекомендації до вивчення курсу "Рівняння математичної фізики". – Львів: Вид.-во ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 108 с.
3. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: Інрес: Воля, 2006. – 256 с.
4. Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. Частина 1. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 295 с.
5. Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. Частина 2. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 316 с.
6. Городецький В.В., Дрінь Я.М., Нагнибіда М.І. Узагальнені функції. Методи розв'язування задач: Навчальний посібник. – Чернівці: Книги-XXI, 2011. – 504 с.
7. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Вид. дім "Родовід", 2015. – 238 с.
8. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Мельничук Л.М. Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 280 с.

9. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: підручник. – 2-ге вид., виправ. і доп. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2017. – 372 с.
10. Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Методи рядів і перетворення Фур'є: текст лекцій. – Електронне вид. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. – 70 с.
11. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2017. – 520 с.
12. Піх С.С., Ровенчак А.А., Криницький Ю.С. 1001 задача з математичної фізики. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. – 328 с.
13. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. – К.: Радянська школа, 1959. – 479 с.
14. Самойленко В.Г., Конет І.М. Рівняння математичної фізики: навч. посіб. Київ: ВПЦ „Київський університет“, 2014. – 283 с.
15. Bari N.K. Trigonometricheskie riady. – Moscow: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Fiziko-Matematicheskoi Literatury, 1961. – 936 p.
16. Berezanskii Yu.M. Razlozhenie po sobstvennym funktsiiam samosopriazhennykh operatorov. – Kyiv: Naukova Dumka, 1965. – 800 p.
17. Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics, Mir Publishers, 1980, 318 p.
18. Dezin A.A. Obshchie voprosy teorii granichnykh zadach. – Moscow: Nauka, 1980. – 208 p.
19. Edwards R.E. Fourier Series: A Modern Introduction. Vols. 1–2. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.
20. Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. Granichnye zadachi dlia differentsial'no-operatornykh uravnenii. – Kyiv: Naukova Dumka, 1984. – 284 p.
21. Jackson D. Fourier Series and Orthogonal Polynomials. Carus Mathematical Monographs. Chicago: Mathematical Association of America, 1941.
22. Kahane J.-P. Some random series of functions. D. C. Heath and Company Raytheon Education Company, Lexington, MA, 1968. viii+184 pp.
23. Kaleniuk P.I., Baranets'kyi Ya.E., Nitrebych Z.N. Obobshchennyi metod razdeleniia peremennykh. – Kyiv: Naukova Dumka, 1993. – 232 p.
24. MATEMATIKA. Bol'shoi entsiklopedicheskii slovar'. Yu.V. Prokhorov, ed. – Moscow: Bol'shaia Rossiiskaia Entsiklopediia, 1998. – 848 p.
25. Paplauskas A.B. Trigonometricheskie riady (ot Eulera do Lebega). – Moscow: Mir, 1966. – 276 p.
26. Schwartz L. Mathematics for the physical sciences. – Paris: Hermann; Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
27. Shilov G.E. Matematicheskii analiz. Funktsii odnogo peremennogo. Chast' 3. – Moscow: Nauka, 1970. – 352 p.
28. Sobolev S. L. Some applications of functional analysis in mathematical physics, American Mathematical Society, 2008, Series Translations of mathematical monographs, Vol. 90, 3rd ed., 286 p.
29. Stein E.M., Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1971.
30. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics, Dover Publ. 2011, 780 p.
31. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics, Marcel Dekker Incorporated, 1971, 426 p.
32. Zhizhiashvili L.V. Nekotorye voprosy mnogomernogo garmonicheskogo analiza. – Tbilisi: Tbilisskii Universitet, 1983. – 116 p.
33. Zygmund A. Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II. Cambridge University Press, New York, 1959. Vol. I. xii+383 pp.; Vol. II. vii+354 pp

Стаття: вперше надійшла 05.01.2026
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

RESEARCH ON PROBLEMS FOR OPERATOR AND DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS BY THE FOURIER METHOD. Part I

Mykola BOKALO[1], Taras BOKALO[1], Mychailo SYMOTIUK[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Str. Universytetska, 1, Lviv, 79000
[2]*Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine*
Naukova Str. 3-B, Lviv, 79060
mm.bokalo@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2533-0917
t.bokalo@gmail.com, ORCID: 0009-0004-4584-4845
mykhailo.m.symotiuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2246-516

This work has a scientific and methodological character; it presents a detailed exposition of a research framework for boundary value problems for linear equations with differential and pseudodifferential operators. The principal tool is the Fourier method of separation of variables: solutions are represented as series with respect to orthogonal systems of functions. The study of the properties of these solution series is reduced to the description the behavior of the corresponding sequences of Fourier coefficients. The paper introduces and investigates the properties of Hilbert spaces of number sequences and establishes their connection with the corresponding Hilbert spaces of functions satisfying certain boundary conditions. Particular emphasis is placed on the important role of the Hilbert space as a unified coordinate environment for the analysis of such problems.

Key words: differential equation, operator equation, differential-operator equation, boundary value problem, Fourier series, finite Fourier transform, Hilbert space, Lebesgue space, Sobolev space, orthonormal basis