ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2026. Випуск 98. С. 5–13
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2026. Issue 98. P. 5–13
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2026.98.5-13

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 6: ПРОДОВЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ

Назар Пирч

Національний Університет "Львівська Політехніка"
м. Львів, 79013, вул. Бандери 12
e-mail: nazar.m.pyrch@lpnu.ua, ORCID: 0000-0003-2768-1494

У статті вивчаються відносні властивості топологічних просторів пов'язані з продовженням неперервних відображень у топологічні групи, які зберігаються відношенням M-еквівалентності.

Ключові слова: вільна топологічна група, сім'я топологічних просторів, M-еквівалентність, H-вкладений підпростір.

1. **Вступ**

У даній статті ми продовжуємо вивчення еквівалентних за Марковим наборів тихоновських просторів, розпочаті в [2], [3]. У роботі ми встановлюємо M-еквівалентність ряду відносних топологічних властивостей, пов'язаних з продовженням відображень у топологічні групи. Для тихоновського простору X позначимо через $F(X)$ вільну топологічну групу простору X. Для підпростору A топологічного простору X будемо позначати через $G(A)$ підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних A.

Нехай $\{X_i \colon i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i \colon i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i \colon i \in I\})$ є *M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i \colon i \in I\})$, якщо існує такий топологічний ізоморфізм $h \colon F(X) \to F(Y)$, що $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq G(X_i)$ для всіх $i \in I$. Будемо позначати це наступним чином $(X, \{X_i \colon i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i \colon i \in I\})$. Зокрема, пари топологічних просторів (X, A) та (Y, B) називаються *M-еквівалентними*, якщо існує такий топологічний ізоморфізм $i \colon F(X) \to F(Y)$, що $i(G(A)) = G(B)$. Стаття написана для топологічних просторів в аксіоматиці NBG(фон Ноймана-Бернайса-Геделя).

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

Підпростір Y топологічного простору X називається *P-вкладеним* у цей простір, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на Y, допускає продовження до неперервної псевдометрики на X. Якщо підпростір Y є P-вкладеним у X, то підгрупа вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною твірних Y, є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$ ([5, Вправа 7.7.B]).

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *кружевним*, якщо X є T_1-простором і для кожної відкритої множини U в X існує така послідовність $\{U_n\}$ відкритих в X множин, що:

(i) $\overline{U_n} \subseteq U$;
(ii) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$;
(iii) $U_n \subset V_n$, якщо $U \subset V$.

Скажемо, що ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ є *спеціальним*, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^*\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y\colon Y \to \mathbb{Z}$, яка тотожньо рівна 1 на Y.

2. H-вкладені підпростори та ізоморфізми вільних топологічних груп

Нехай H — топологічний простір, Y — підпростір топологічного простору X. Скажемо, що підпростір Y є *H-вкладеним* у простір X, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ з топологічного простору Y у H допускає неперервне продовження на X. Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* цього простору, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H допускає неперервне продовження на X, або, іншими словами, існує таке неперервне відображення $h\colon X \hookrightarrow F(Y)$, що $h(y) = y$ для всіх $y \in Y$.

Твердження 1. *Для топологічного простору X та його тихоновського підпростору Y наступні умови є еквівалентними:*
1) Y є G-ретрактом простору X;
2) підпростір Y є $F(Y)$-вкладеним підпростором простору X.

Доведення. Імплікація ($1 \Rightarrow 2$) є очевидною. Доведемо імплікацію ($2 \Rightarrow 1$). Вкладення $Y \hookrightarrow F(Y)$ відповідно до умови $F(Y)$-вкладеності продовжується до такого неперервного відображення $f_1\colon X \to F(Y)$, що $f_1(y) = y$ для всіх $y \in Y$, звідки робимо висновок, що підпростір Y є G-ретрактом в X. □

Твердження 2. *Нехай H — топологічна група, $(X_1, Y_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2)$, підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i. Якщо підпростір Y_1 є H-вкладеним у X_1, то простір Y_2 є H-вкладеним у X_2.*

Доведення. Нехай $f\colon Y_2 \to H$ — неперервне відображення. Покладемо $G = G(Y_2)$. Оскільки підпростір Y_2 є P-вкладеним у X_2, то існує такий неперервний гомоморфізм $f^*\colon G \to H$, що $f = f^*|_{Y_2}$. Нехай $i\colon F(X_1) \to F(Y_1)$ — такий топологічний ізоморфізм, що $i(G(X_1)) = G(Y_1)$. Покладемо $j = i|_{G(X_1)}$, $g^* = f^* \circ j^{-1}$, $g = g^*|_{Y_1}$. Оскільки підпростір Y_1 є H-вкладеним у X_1, то існує таке неперервне відображення $g_1\colon X_1 \to H$, що $g_1 = g|_{Y_1}$. Продовжимо відображення g_1 до неперервного гомоморфізму $g_1^*\colon F(X_1) \to H$. Покладемо $f_1^* = g_1^* \circ i$, $f_1 = f_1^*|_{X_2}$. Тоді $f_1|_{X_2} = g_1^*|_{Y_2} = f^* \circ j^{-1} \circ i|_{Y_2} = f$. □

Оскільки кожен замкнений підпростір кружевного простору є у нього P-вкладеним, властивість бути кружевним простором ([8]) та властивість бути замкненим підпростором ([1]) зберігаються відношенням M-еквівалентості, то має місце наступний наслідок

Наслідок 1. *Властивість бути H-вкладеним підпростором зберігається відношення M-еквівалентності у класі кружевних просторів та їхніх замкнених підпросторів для довільної топологічної групи H.*

Скажемо, що підпростори U і V топологічного простору X є взаємодоповнюючими, якщо $U \cap V = \varnothing$ і $U \cup V = X$. Для дискретної топологічної групи $\mathbb{Z}_2$ поняття $\mathbb{Z}_2$-вкладеності підпростору Y у простір X означає, що для довільних двох відкритих взаємодоповнюючих підмножин U і V в Y існують такі відкриті взаємодоповнюючі підмножини U_1 і V_1 в X, що $U \subseteq U_1$ і $V \subseteq V_1$.

Твердження 3. *Нехай підпростір H_2 є ретрактом топологічного простору H_1. Якщо підпростір Y є H_1-вкладеним у простір X, то підпростір Y є H_2-вкладеним у простір X.*

Доведення. Нехай $e\colon H_2 \to H_1$ — вкладення, $r\colon H_1 \to H_2$ — відповідна ретракція. Нехай $f\colon Y \to H_2$ — неперервне відображення. Покладемо $g = e \circ f$. З H_1-вкладеності простору Y у X випливає, що існує таке неперервне відображення $g_1\colon X \to H_1$, що $g_1|_Y = g$. Покладемо $f_1 = r \circ g_1$, тоді $f_1|_Y = r \circ g_1|_Y = r \circ g = r \circ e \circ f = f$. □

Топологічні простори X та Y називаються *r-рівними* [6], якщо простір X містить ретракт гомеоморфний Y, а простір Y містить ретракт гомеоморфний X.

Наслідок 2. *Якщо простори H_1 та H_2 є r-рівними, то поняття H_1-вкладеності та H_2-вкладеності співпадають.*

Нехай H — топологічний простір, Y та Z — підпростори топологічного простору X, $Z \subseteq Y$. Скажемо, що підпростір Y є *H-вкладеним у простір X відносно підпростору Z*, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$, таке, що $f|_Z = \mathrm{const}$ з топологічного простору Y у H допускає неперервне продовження на X. Для неперервних відображень $f, g\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G означимо відображення $f \cdot g$, поклавши $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Твердження 4. *Нехай H — топологічна група, підпростір Y є H-вкладеним у простір X відносно підпростору Z, а простір Z є H-вкладеним у простір X. Тоді підпростір Y є H-вкладеним у простір X.*

Доведення. Нехай $f\colon Y \to H$ — неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H. Покладемо $h = f|_Z$. Оскільки підпростір Z є H-вкладеним у простір X, то існує таке неперервне відображення $h_1\colon X \to H$, що $h_1|_Z = h$. Покладемо $g = f \cdot h_1^{-1}$. Оскільки $g|_Z = f|_Z \cdot h_1|^{-1}|_Z = h|_Z \cdot h|^{-1}|_Z = e$, то існує таке неперервне відображення $g_1\colon X \to H$, що $g_1|_Y = h$. Тоді відображення $g_1 \cdot h_1$ є неперервним і є продовженням відображення $g \cdot h_1|_Y = f \cdot h_1^{-1} \cdot h_1 = f$. □

Твердження 5. *Нехай H — топологічний простір. Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X та його замкнених підпросторів $Z \subseteq Y \subseteq X$:*

1. підпростір Y є H-вкладеним у простір X топологічного простору Z;

2. підпростір Y/Z є H-вкладеним у фактор-простір X/Z (тут на Y/Z розглядається топологія підпростору індукована з X/Z).

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ Нехай $f\colon Y/Z \to H$ — неперервне відображення з топологічного простору Y/Z у топологічну групу H, $p\colon X \to X/Z$ — факторне відображення, $p_1 = p|_Y$. Покладемо $f_1 = f \circ p_1$. Оскільки $f_1|_Z = \mathrm{const}$, то існує таке неперервне відображення $h_1\colon X \to H$, що $h_1|_Y = f_1$. Оскільки відображення p є факторним, і $h_1|_Z = \mathrm{const}$, то існує таке неперервне відображення $h\colon X/Z \to H$, що $h_1 = h \circ p$. За побудовою відображення h є продовженням відображення f.

$(2 \Rightarrow 1)$ Нехай $f\colon Y \to H$ — таке неперервне відображення, що $f|_Z = \mathrm{const}$. Оскільки звуження відображення $p\colon X \to X/Z$ на множину Y є факторним ([7, твердження 2.4.15]), то існує таке неперервне відображення $h\colon Y/Z \to H$, що $f = h \circ p$. Оскільки підпростір Y/Z є H-вкладеним у простір X/Z, то існує таке неперервне відображення $h_1\colon X/Z \to G$, що $h_1|_{Y/Z} = h$. Покладемо $f_1 = h_1 \circ p$. За побудовою $f_1|_Z = \mathrm{const}$ і $f_1|_Y = f$. □

З цього твердження випливає, що для якщо для деяких двох топологічних груп G_1 та G_2 поняття G_1-вкладеності та G_2-вкладеності співпадають, то поняття відносної G_1-вкладеності та відносної G_2-вкладеності також співпадають.

Зокрема для дискретної топологічної групи $\mathbb{Z}_2$ поняття $\mathbb{Z}_2$-вкладеності підпростору Y у простір X відносно підпростору A означає, що для довільних двох відкритих взаємодоповнюючих підмножин U і V в Y таких, що $A \subseteq U$ або $A \subseteq V$ існують такі відкриті взаємодоповнюючі підмножини U_1 і V_1 в X, що $U \subseteq U_1$ і $V \subseteq V_1$. Для топологічної групи дійсних чисел зі стандартною топологією $\mathbb{R}$ поняття H-вкладеності, яке ще називається C-вкладеністю вивчалось багатьма авторами.

Твердження 6. *Нехай H — топологічна група, $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$, простір X_1 є кружевним, підпростори Y_1 та Z_1, є замкненими у X_1, $Z_1 \subseteq Y_1$. Якщо підпростір Y_1 є H-вкладеним у X_1 відносно підпростору Z_1, то простір Y_2 є H-вкладеним у X_2 відносно підпростору Z_2.*

Доведення. За наслідком 1 з [3] будемо мати, що $(X_1/Z_1, Y_1/Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2/Z_2, Y_2/Z_2)$. Простір X_1/Z_1, будучи замкненим образом кружевного простору X_1, є кружевним. Оскільки властивість бути кружевним простором зберігається відношенням M-еквівалентності, то простір X_2/Z_2 є кружевним. За твердженням 5 підпростір Y_1/Z_1 є H-вкладеним у простір X_1/Z_1. Оскільки властивість бути H-вкладеним підпростором зберігається в класі кружевних просторів, то підпростір Y_2/Z_2 є H-вкладеним у простір X_2/Z_2. А тому за твердженням 5 маємо, що підпростір Y_2 є H-вкладеним у простір X_2 відносно підпростору Z_2. □

Нехай H — топологічна група, Y — підпростір топологічного простору X, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — підпростори в Y.

Скажемо, що підпростір Y є *H-вкладений у простір X відносно підпросторів* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$, таке, що $f|_{Z_i} =$

const_i для всіх $i = 1, \ldots, n$ з топологічного простору Y у H допускає неперервне продовження на X.

По аналогії до твердження 5 виконується наступне твердження

Твердження 7. *Нехай H — топологічна група. Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X, його замкненого підпростору Y та замкнених підпросторів $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \subseteq Y \subseteq X$:*

1. підпростір Y є H-вкладений у простір X відносно підпросторів $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$;

2. підпростір $Y/\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ є H-вкладеним підпростором фактор-простору $X/\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ (тут на $Y/\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ розглядається топологія підпростору, індукована з $X/\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$).

По аналогії до твердження 6 виконується наступне твердження

Твердження 8. *Нехай H — топологічна група, $(X, X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $(Y, Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ — дві сім'ї кружевних просторів та їхніх замкнених підпросторів, $X_1, X_2, \ldots, X_n \subseteq X_0$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \subseteq Y_0$. Якщо існує такий спеціальний топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, що $h(G(X_i)) = G(Y_i)$ для всіх $i = 0, 1, .., n$, то наступні умови є еквівалентними:*

1. підпростір X_0 є H-вкладеним у простір X відносно підпросторів $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

2. підпростір Y_0 є H-вкладеним у простір Y відносно підпросторів $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Твердження 9. *Нехай H — топологічна група, Y — P-вкладений підпростір топологічного простору X. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. підпростір Y є H-вкладеним у простір X;

2. довільний неперервний гомоморфізм $h\colon G(Y) \to H$ з топологічної групи $G(Y)$ допускає продовження до неперервного гомоморфізму $h_1\colon F(X) \to H$.

Доведення. $(1 \Rightarrow 2)$ Нехай $h\colon G(Y) \to H$ — неперервний гомоморфізм. Покладемо $f = h|_Y$. З H-вкладеності підпростору Y випливає, що існує таке неперервне відображення $f_1\colon X \to H$, що $f_1|_Y = f$. Продовжимо відображення f_1 до неперервного гомоморфізму $f_1^*\colon F(X) \to H$. За побудовою $f_1^*|_{G(Y)} = h$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Нехай $f\colon Y \to H$ — непеперервне відображення. З P-вкладеності простору Y в X випливає, що підгрупа $G(Y)$ є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$, а тому відображення f допускає продовження до неперервного гомоморфізму $f^*\colon G(Y) \to H$. Продовжимо гомоморфізм f^* до гомоморфізму $h\colon F(X) \to H$. Покладемо $h_1 = h|_X$. Тоді $h|_Y = h_1|_Y = f^*|_Y = f$. А тому відображення h_1 є продовженням відображення f. □

Твердження 10. *Нехай H — топологічна група, Y — підпростір топологічного простору X, $a \in Y$, $b \in H$. Підпростір підпростір Y є H-вкладеним у простір X тоді і тільки тоді, коли кожне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ для якого $f(a) = b$ допускає неперервне продовження на X.*

Доведення. Нехай $h\colon Y \to G$ — неперервне відображення, $h(a) = c$. Позначимо через $l_1\colon H \to H$, $l_1(x) = xc^{-1}b$ — зсув в топологічній групі H на елемент $c^{-1}b$. Відображення $f = l_1 \circ h$ є неперервним і $f(a) = b$, а тому допускає продовження до неперервного відображення $f_1\colon X \to H$. Позначимо через $l_2\colon H \to H$, $l_2(x) = xb^{-1}c$ — зсув в топологічній групі H на елемент $b^{-1}c$. Покладемо $h_1 = l_2 \circ f_1$. Тоді $h_1|_Y = l_2 \circ f_1|_Y = l_2 \circ f = l_2 \circ l_1 \circ h = h$. □

Нехай $a \in Y \subseteq X$. Позначимо через $\widetilde{G}(Y,a)$ підгрупу в вільній топологічній групі $FG(X,a)$ в сенсі Граєва, породжену множиною твірних Y. Аналогічно до твердження 9 з використання твердження 10 доводиться

Твердження 11. *Нехай H — топологічна група, Y — P-вкладений підпростір топологічного простору X, $a \in Y$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. підпростір Y є H-вкладеним у простір X;

2. довільний неперервний гомоморфізм $h\colon \widetilde{G}(Y,a) \to H$ з топологічної групи $\widetilde{G}(Y,a)$ допускає продовження до неперервного гомоморфізму $h_1\colon FG(X,a) \to H$.

Для топологічного простору X через $nw(X)$ позначається сіткова вага простору X [7, ст. 127].

Твердження 12. *Нехай H — топологічна група, τ_1, τ_2 — нескінченні кардинали, X_1 — підпростір топологічного простору X, Y_1 — P-вкладений підпростір топологічного простору Y. Якщо $(X,X_1) \overset{M}{\sim} (Y,Y_1)$ і для кожного неперервного відображення $f\colon X_1 \to H$ такого, що $nw(f(X_1)) \leqslant \tau_1$ існує таке відображення $f_1\colon X \to H$, що $f_1|_{X_1} = f$ і $nw(f_1(X)) \leqslant \tau_2$, то для кожного неперервного відображення $h\colon Y_1 \to H$ такого, що $nw(h(Y_1)) \leqslant \tau_1$ існує таке неперервне відображення $h_1\colon Y \to H$, що $h_1|_{Y_1} = h$ і $nw(h_1(Y)) \leqslant \tau_2$.*

Доведення. Як було встановлено у [5, Впр. 7.1.17], якщо підпростір X є множиною твірних топологічної групи H, то $nw(X) = nw(H)$. Нехай $h\colon Y_1 \to H$ — таке неперервне відображення, що $nw(h(Y_1)) \leqslant \tau_1$. Оскільки підпростір Y_1 є P-вкладеним у простір Y_1, то існує такий неперервний гомоморфізм $h^*\colon G(Y_1)) \to H$, що $h^*|_{Y_1} = h$. Покладемо $f = h^*|_{X_1}$. Оскільки підпростори $h(Y_1)$ та $f(X_1)$ є множинами твірних у топологічній групі $h^*(G(Y_1))$, то $nw(h(Y_1)) = nw(h^*(G(Y_1))) = nw(f(X_1)) = \tau_1$. Відображення f продовжується до такого неперервного відображення $f_1\colon X \to H$, що $nw(f_1(X)) \leqslant \tau_2$. Продовжимо відображення f_1 до неперервного гомоморфізму $f_1^*\colon F(X) \to H$. Нехай $h_1 = f_1^*|_Y$. Оскільки підпростори $h_1(Y)$ та $f_1(X)$ є множинами твірних у топологічній групі $f^*(F(X))$, то $nw(h_1(Y)) = nw(h^*(G(Y_1))) = nw(f_1(X)) = \tau_2$. □

Твердження 13. *Нехай H — топологічна група, $\{H_s\colon s \in S\}$ — сім'я підгруп в H, $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ сім'я P-вкладених підпросторів топологічного простору Y. Якщо*

$$(X,\{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y,\{Y_s\colon s \in S\})$$

і для кожної сім'ї $\{f_s\colon X_s \to H_s\colon s \in S\}$ неперервних відображень існує таке неперервне відображення $f\colon X \to H$, що $f|_{X_s} = f_s$, то для кожної сім'ї $\{h_s\colon Y_s \to H_s\colon s \in S\}$ неперервних відображень існує таке неперервне відображення $h\colon Y \to H$, що $h_s = h|_{Y_s}$.

Доведення. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — такий топологічний ізоморфізм, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. Покладемо $i_s = i|_{G(X_s)}$. Нехай також $\{h_s\colon Y_s \to H_s\colon s \in S\}$ —

сім'я неперервних відображень. Оскільки всі підпростори Y_s є P-вкладеними, то ми можемо продовжити ці відображення до неперервних гомоморфізмів $h_s^*\colon G(Y_s) \to G_s$. Покладемо $f_s^* = h_s^* \circ i_s$, $f_s = f_s^*|_{X_s}$. Тоді існує таке неперервне відображення $f\colon X \to G$, що $f|_{X_s} = f_s$. Продовжимо відображення f до неперервного гомоморфізму $f^*\colon F(X) \to G$. Покладемо $h^* = f^* \circ i^{-1}$, $h = h^*|_Y$, тоді $h|_{Y_s} = f^* \circ i^{-1}|_Y = h_s^* \circ i_s \circ i^{-1}|_{Y_s} = h_s$. □

Наслідок 3. *Нехай H — топологічна група, $\{H_s\colon s \in S\}$ — сім'я підгруп в H, $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я замкнених підпросторів кружевного простору X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ сім'я підпросторів топологічного простору Y. Якщо*

$$(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$$

і для кожної сім'ї $\{f_s\colon X_s \to H_s\colon s \in S\}$ неперервних відображень існує таке неперервне відображення $f\colon X \to H$, що $f|_{X_s} = f_s$, то для кожної сім'ї неперервних відображень $\{h_s\colon Y_s \to H_s\colon s \in S\}$ існує таке неперервне відображення $h\colon Y \to G$, що $h_s = h|_{Y_s}$.

Твердження 14. *Нехай G — топологічна група, τ_1, τ_2 — нескінченні кардинали, X_1 — підпростір топологічного простору X, Y_1 — P-вкладений підпростір топологічного простору Y. Якщо для кожного неперервного відображення $f\colon X_1 \to G$ такого, що $|f(X_1)| \leqslant \tau_1$ існує таке відображення $f_1\colon X \to G$, що $f_1|_{X_1} = f$ і $|f_1(X)| \leqslant \tau_2$, то для кожного неперервного відображення $h\colon Y_1 \to G$ такого, що $|h(Y_1)| \leqslant \tau_1$ існує таке неперервне відображення $h_1\colon Y \to G$, що $h_1|_{Y_1} = h$ і $|h_1(Y)| \leqslant \tau_2$.*

Доведення. Якщо нескінченний підпростір X є множиною твірних топологічної групи G, то $|X| = |G|$. Нехай $h\colon Y_1 \to G$ — таке неперервне відображення, що $|h(Y_1)| \leqslant \tau_1$. Оскільки підпростір Y_1 є P-вкладеним у простір Y_1 то існує такий неперервний гомоморфізм $h^*\colon G(Y_1) \to G$, що $h^*|_{Y_1} = h$. Покладемо $f = h^*|_{X_1}$. Оскільки підпростори $h(Y_1)$ та $f(X_1)$ є множинами твірних у топологічній групі $h^*(G(Y_1))$, то $|h(Y_1)| = |h^*(G(Y_1))| = |f(X_1)| = \tau_1$. Відображення f продовжується до неперервного відображення $f_1\colon X \to G$ такого, що $|f_1(X)| \leqslant \tau_2$. Продовжимо відображення f до неперервного гомоморфізму $f_1^*\colon F(X) \to G$. Нехай $h_1 = f_1^*|_Y$. Оскільки підпростори $h_1(Y)$ та $f_1(X)$ є множинами твірних у топологічній групі $f^*(F(X))$, то $|h_1(Y)| = |h^*(G(Y_1))| = |f_1(X)| = \tau_2$. □

Для топологічного простору X позначимо через $F(X)_n$ множину всіх слів у вільній топологічній групі $F(X)$, що мають у нескоротній формі довжину, що не перевищує n. По аналогії до поняття сильної M-еквівалентності топологічних просторів ([4]) можемо означати поняття сильної M-еквівалентності для наборів топологічних просторів. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i\colon i \in I\})$ є *сильно M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i\colon i \in I\})$, якщо існує такий топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, що $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq G(X_i)$ для всіх $i \in I$ і $h(X) \subset F(Y)_n$, $h^{-1}(Y) \subset F(X)_m$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$.

Нехай H — топологічна група. Скажемо, що підпростір Y *обмежено H-вкладений підпростір в X*, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to H$ існують таке неперервне відображення $f_1\colon X \to H$ і $n \in \mathbb{N}$, що $f_1|_Y = f$ і $f_1(X) \subseteq (f(Y) \cup (f(Y))^{-1})^n$.

По аналогії до твердження 2 виконується наступне твердження

Твердження 15. *Нехай H — топологічна група, пари (X_1, Y_1) і (X_2, Y_2) є сильно M-еквівалентними, підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i. Якщо підпростір Y_1 є обмежено H-вкладеним у X_1, то простір Y_2 є обмежено H-вкладеним у X_2.*

Твердження 16. *Нехай H — топологічна група, H_1 — підгрупа в H, трійки (X_1, Y_1, Z_1) і (X_2, Y_2, Z_2) є M-еквівалентними, підпростори Y_i є P-вкладеними у X_i. Якщо для кожного неперервного відображення $f\colon Y_1 \to H$ такого, що $f(Y_1 \cap Z_1) \subseteq H_1$ існує таке неперервне відображення $f_1\colon X_1 \to H$, що $f_1|_{Y_1} = f$ та $f_1(Z_1) \subseteq H_1$, тоді для кожного неперервного відображення $g\colon Y_2 \to H$ такого, що $g(Y_2 \cap Z_2) \subseteq H_1$ існує таке неперервне відображення $g_1\colon X_2 \to H$, що $g_1|_{Y_2} = g$ та $g_1(Z_2) \subseteq H_1$.*

Доведення. Нехай : $F(X_1) \to F(X_2)$ — такий топологічний ізоморфізм, що $i(G(Y_1)) = G(Y_2)$, $i(G(Z_1)) = G(Z_2)$. Нехай $g\colon Y_2 \to H$ — таке неперервне відображення, що $g(Y_2 \cap Z_2) \subseteq H_1$. Продовжимо відображення g до неперервного гомоморфізму $g^*\colon G(Y_2) \to H$. Покладемо $f = (g^* \circ i^{-1}|_{G(Y_1)})|_{Y_1}$, Тоді $i(G(Y_1 \cap Z_1)) = G(Y_2 \cap Z_2)$ існує таке неперервне відображення $f_1\colon X_1 \to H$, що $f_1|_{Y_1} = f$ та $f_1(Z_1) \subseteq H_1$. Продовжимо відображення до неперервного гомоморфізму $f_1^*\colon F(X_1) \to H$. Покладемо $g_1^* = f_1^* \circ i$, $g_1 = g_1^*|_{X_2}$. Нехай $x \in Z_2$, тоді $i^{-1}(x) \in G(Z_1)$, отже $f(i^{-1}(x)) \in H_1$. □

Зауваження 1. *Твердження 12, 13, 14, 16 та наслідок 3 залишаться справедливими, якщо у їхніх умовах та наслідках замінити словосполучення "існує неперервне відображення" на словосполучення "існує і єдине неперервне відображення".*

Питання 1. *Нехай H — топологічна група, простори X та Y є M-еквівалентними, простір X має ту властивість, що кожен замкнений підпростір в X є у нього H-вкладеним. Чи має аналогічну властивість простір Y?*

Для топологічного простору X та топологічної групи H позначимо через $C_p(X, H)$ групу неперервних відображень з топологічного простору X у топологічну групу H у топології поточкової збіжності [4].

Питання 2. *Нехай $(X, X_1) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1)$ та існує такий неперервний гомоморфізм (відображення) $l\colon C_p(X_1, H) \to C_p(X, H)$, що $l(f)|_{X_1} = f$ для всіх $f \in C_p(X_1, H)$. Чи існує аналогічне неперервне відображення з групи $C_p(Y_1, H)$ у групу $C_p(Y, H)$?*

Скажемо, що топологічний простір X є *абсолютним H-вкладеним простором*, якщо він є H-вкладеним у довільний простір, що містить X як замкнений підпростір.

Питання 3. *Нехай H — топологічна група. Чи зберігається властивість бути абсолютним H-вкладеним простором відношенням M-еквівалентності?*

Список використаної літератури

1. Пирч Н.М. *M-еквівалентність пар* // Науковий збірник "Прикладні проблеми математики і механіки". – 2004. – Т.2. – С. 74–79.
2. Пирч Н.М. *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*// Вісник ЛНУ сер. мех.-мат. – 2017. – Т.84, №2. – С. 38–46.

3. Пирч Н.М. *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 2: спеціальні ізоморфізми*// Вісник ЛНУ сер. мех.-мат. – 2019. – Т.88, №2. – С. 59–69.
4. Ткачук В.В. *Двойственость относительно функтора C_p и кардинальные инварианты типа числа Суслина*// Математические заметки. – 1985. – Т.37, №3. – С. 441–451.
5. Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G., Topological groups and related structures, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.
6. Borsuk K., Theory of retracts, Monogr. Matem., V.44, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, Poland, 1967.
7. Engelking R. General topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, 529 p.
8. Sipacheva O.V. *On stratifiability of free abelian topological groups*// Topology Proceedings. – 1993. – V.18. – P. 271–311.

Стаття: вперше надійшла 28.11.2025
прийнята до друку 15.04.2026
опублікована 29.04.2026

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF THE TYCHONOFF SPACES 6: EXTENSION OF CONTINUOUS MAPPINGS TO TOPOLOGICAL GROUPS

Nazar Pyrch

National University "Lviv Politechnic"
Lviv, 79013, Bandery str. 12
e-mail: nazar.m.pyrch@lpnu.ua, ORCID: 0000-0003-2768-1494

In the paper we consider M-invariant relative topological properties of the subspaces of topological spaces concerned with the extension of continuous mappings to topological groups

Key words: free topological group, bundle of topological spaces, M-equivalence, generalized retract