

УДК 539.3

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ МОМЕНТІВ ЗА ЗГИНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЮ ДО МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ, З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ ТРІЩИНИ

Ігор ЯЦИК

*Львівський національний університет ім. І. Франка,
Університетська 1, м. Львів, 79000
e-mail: igor.yatsyk@lnu.edu.ua*

У роботі досліджено напружено-деформований стан безмежної кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, орієнтованою перпендикулярно до лінії поділу матеріалів. Розглянуто випадок дії згинальних моментів на нескінченності за відсутності зовнішніх навантажень безпосередньо на берегах тріщини. Важливою особливістю моделі є припущення про гладкий контакт берегів у межах смуги сталості ширини біля верхньої грані пластини. Це дозволило декомпозувати вихідну задачу на дві взаємопов'язані: задачу плоскої теорії пружності та задачу згину за теорією Кірхгофа-Лява. З використанням апарату комплексних потенціалів отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано числово методом механічних квадратур. За результатами аналізу визначено коефіцієнти інтенсивності моментів та побудовано графіки їхньої залежності від параметрів задачі.

Ключові слова: напружено-деформований стан, тріщина, кусково-однорідна пластинка, область контакту, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності.

1. Вступ

Пластинчасті елементи є одними з найбільш розповсюджених компонентів у сучасному машинобудуванні й інженерних спорудах. Проте наявність дефектів, зокрема тріщин, критично впливає на їхню експлуатаційну надійність, спричиняючи суттєве зниження несучої здатності. Дослідження впливу подібних дефектів на механічну поведінку конструкцій є фундаментальним завданням для прогнозування довговічності та забезпечення безпеки технічних систем.

Актуальність дослідження напружено-деформованого стану багат шарових конструкцій зумовлена їхньою схильністю до згинальних навантажень, особливо за наявності тріщин із можливою контактною взаємодією берегів. Попри значну кількість публікацій, присвячених згину пластин із дефектами [1–4], питання контактної взаємодії часто залишається поза увагою, хоча воно суттєво коригує розподіл напружень.

Окрім праці [5–13] розглядають цей аспект, проте відчутним є дефіцит досліджень згину кусково-однорідних пластин у межах теорії Кірхгофа–Лява за умови двовимірного контакту берегів тріщини під дією рівномірних згинальних моментів.

Ця робота спрямована на заповнення вказаної прогалини. Шляхом застосування методів комплексних потенціалів задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язаних методом механічних квадратур. На основі проведеного аналізу отримано числовий розподіл та графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль.

2. Формулювання задачі

Розглядається задача про згин безмежної кусково-однорідної ізотропної пластини товщиною $2h$, що містить тріщину довжиною $2l$. Дефект орієнтований перпендикулярно до лінії поділу матеріалів L . Зовнішнє навантаження задано у вигляді рівномірно розподілених згинальних моментів M_x^∞ й M_y^∞ (геометрія задачі та схема навантаження наведені на рис. 1). Унаслідок прикладених моментів початково вільні береги тріщини вступають у гладкий контакт за всією довжиною дефекту. Взаємодія берегів локалізована біля їхніх верхніх країв у межах області сталої ширини h_1 .

Для опису геометрії задачі вводимо декартову систему координат $Oxy\bar{z}$ таким чином, щоб площина Oxy збігалася із серединною площиною пластини. При цьому вісь Ox спрямовуємо вздовж лінії поділу двох матеріалів, а вісь Oy — вздовж лінії розташування тріщини.

Геометричний центр тріщини розташований на відстані d від осі Ox .

Позначимо півплощини $y > 0$ та $y < 0$ через S_1 та S_2 відповідно; величини, що стосуються певної області S_j , позначатимемо індексом j . З тріщиною пов'язана локальна система координат $O_1x_1y_1$, вісь O_1x_1 якої спрямована вздовж лінії розрізу. Відрізок дійсної осі, що відповідає умові $|x| \leq l$, позначимо як L_1 .

Вважається, що на межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту. Урахування контактної взаємодії між берегами тріщини дозволяє декомпонувати вихідну проблему на дві взаємопов'язані підзадачі: задачу плоскої теорії пружності та задачу згину пластини в рамках теорії Кірхгофа–Лява.

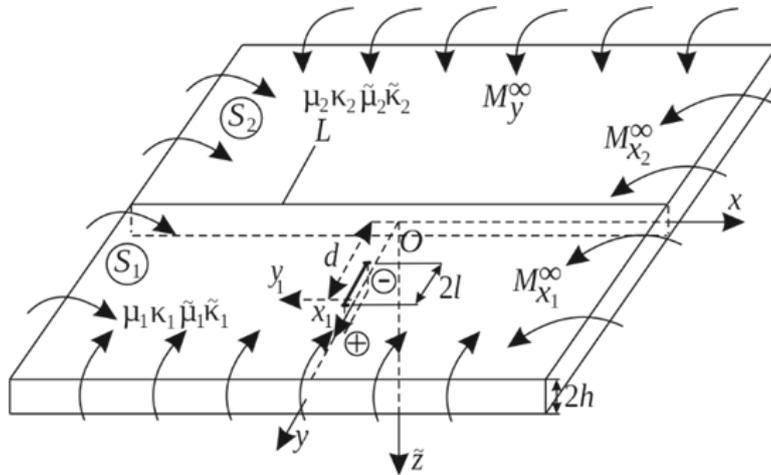


Рис. 1. Схема навантаження пластини та положення тріщини

Граничні умови на берегах тріщини (L_1) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_y^\pm - i\sigma_{xy}^\pm &= -N/(2h), \quad M_x^\pm + i \int P^\pm dy = m_x, \\ [u] &= -\alpha h [\partial_y w], \quad M_x = \beta h N, \quad \text{на } L_1. \end{aligned} \quad (1)$$

У цих співвідношеннях σ_x, σ_{xy} — компоненти тензора напружень, а u, v — проєкції вектора переміщень на осі Ox та Oy для плоского напруженого стану. Через N позначено контактне зусилля, M_x — згинальний момент, P — узагальнену поперечну силу (за Кірхгофом), а m_x — узагальнену величину, що інтегрує вплив згинального моменту та поперечних сил. Стрибок довільної функції при переході через лінію тріщини позначено як $[f] = f(+0, y) - f(-0, y) = f^+ - f^-$. Функція w описує прогин пластини. Параметри α та β визначаються співвідношеннями:

$$\alpha = \frac{1 + (1 - \gamma)^2}{2}, \quad \beta = 1 - \frac{\gamma}{3},$$

де $\gamma = h_1/h$ — зведена ширина області контакту [5].

Метою роботи є визначення параметрів напружено-деформованого стану пластини.

3. Розв'язок задачі

Використовуючи апарат теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали плоскої задачі й згину пластини [14, 15], із задоволенням крайових умов (1), вихідну задачу зведено до задачі лінійного спряження. Її розв'язання дозволило отримати сингулярне інтегральне рівняння відносно похідної від кутів повороту $Q(t)$, яке має вигляд

$$\begin{aligned}
M_{x_1}^\infty = & \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l Q(t) \left\{ a^* \left[\frac{1}{t-x} + \frac{A_3}{2} \frac{1}{t+x+2d} - \right. \right. \\
& - \frac{A_4}{2} \left(\frac{1}{t+x+2d} + \frac{4(t+d)}{(t+x+2d)^2} - \frac{8(t+d)^2}{(t+x+2d)^3} \right) \left. \right] + \\
& + \tilde{A}_4 \left[\frac{\tilde{\kappa}_1^2}{t+x+2d} + \frac{4(t+d)}{(t+x+2d)^2} - \frac{8(t+d)^2}{(t+x+2d)^3} \right] \left. \right\} dt, \quad (2)
\end{aligned}$$

де $a^* = \frac{4\alpha\beta\mu_1(1+\tilde{\kappa}_1)h^3}{1+\kappa_1}$.

Рівняння (2) доповнюється інтегральною умовою: $\int_{-l}^l Q(t)dt = 0$, яка гарантує однозначність кутів повороту при обході контуру тріщини. Аналіз граничних випадків показав, що при $\gamma = 0$ отримаємо рівняння для контакту берегів тріщини вздовж лінії [16]. Коли, ще додатково $E_2 \rightarrow 0$, то отримане співвідношення узгоджується з результатами роботи [8]. Окрім того, при $a^* = 0$ рівняння трансформується у сингулярне інтегральне рівняння, що описує механічну поведінку кусково-однорідної пластини з тріщиною без урахування контактної взаємодії її берегів.

Отже, для знаходження невідомої функції $Q(t)$ використовується система, що складається зі сингулярного інтегрального рівняння (2) та додаткової інтегральної умови. Розв'язання системи здійснюється числовим шляхом із застосуванням методу механічних квадратур [15, 17].

4. Числовий аналіз

Рис. 2–3 демонструють графічні залежності безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) K_1^- і K_1^+ , відповідно, у ближній та дальній до лінії поділу матеріалів вершині тріщини від $\tilde{n} = \lg(E_2/E_1)$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ і різних значеннях $\tilde{d} = d/l$ та $\gamma = h_1/h$. На обох наборах графіків по осі абсцис відкладено величину, яка характеризує співвідношення пружних властивостей матеріалів: ліва частина графіка $\tilde{n} < 0$ — це випадок м'якого сусіднього матеріалу, центр $\tilde{n} = 0$ — матеріали ідентичні, середовище однорідне, права частина графіка $\tilde{n} > 0$ — це випадок жорсткого сусіднього матеріалу (включення). На осі ординат відкладено безрозмірні коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) K_1^- та K_1^+ .

Рис. 2 побудований для вершини, що знаходиться безпосередньо біля межі поділу матеріалів, тому вона найбільш чутлива до зміни \tilde{n} . Ефект м'якого середовища $\tilde{n} < 0$: графіки демонструють зростання значень K_1^- . Коли тріщина наближається до більш м'якого матеріалу, напруження біля вершини зростають, оскільки межа поділу піддається деформації, що сприяє розкриттю тріщини. Це небезпечний стан, який сприяє проростанню тріщини в сусідній матеріал. Ефект жорсткого середовища $\tilde{n} > 0$: спостерігається різке спадання K_1^- . Жорстка межа поділу стримує деформації і діє як “екран” (ефект екранування або shielding effect). Це зменшує ймовірність поширення тріщини в бік жорсткого включення. Вплив відстані \tilde{d} : при $\tilde{d} = 1.01$ (дуже мала відстань) градієнт зміни K_1^- дуже крутий. Вплив сусіднього матеріалу максимальний. При $\tilde{d} = 1.5$ (більша відстань) криві стають більш пологими, оскільки вплив межі слабшає зі збільшенням відстані.

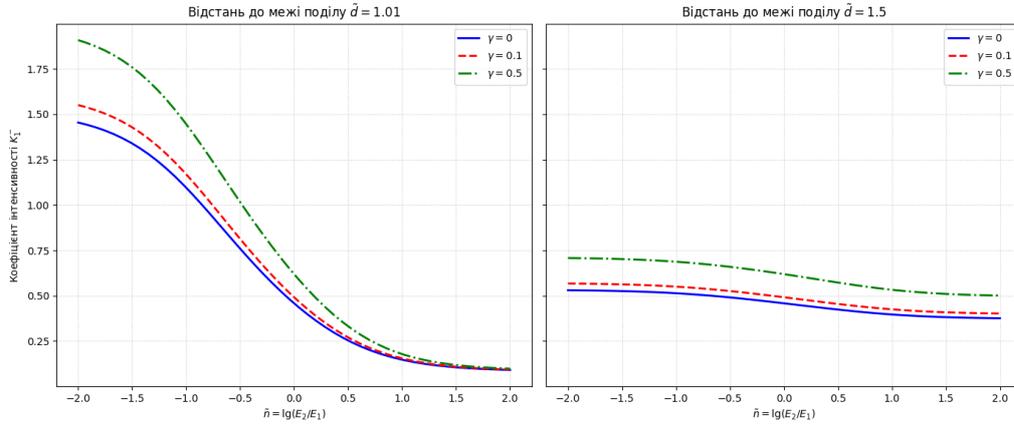


Рис. 2. Залежність КІМ K_1^- від співвідношення модулів пружності

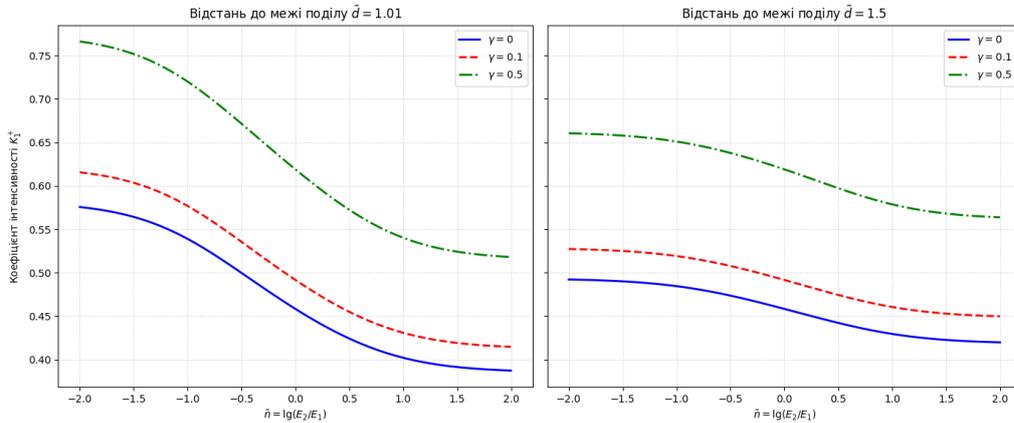


Рис. 3. Залежність КІМ K_1^+ від співвідношення модулів пружності

Рис. 3 характеризує вершину, віддалену від межі поділу, тому вплив неоднорідності матеріалу тут опосередкований. Залежність K_1^+ від \tilde{n} є менш вираженою порівняно з K_1^- . Спостерігається значно слабша реакція. Якщо жорстке включення “затискає” ближчу вершину, це може призводити до перерозподілу зусиль, але віддалена вершина знаходиться в зоні, яка ближча до умов однорідного матеріалу. Різниця між графіками для $\tilde{d} = 1.01$ та $\tilde{d} = 1.5$ для цієї вершини є незначною, що підтверджує локальний характер впливу межі поділу.

На рис. 2–3 видно сімейство кривих для $\gamma = 0, 0.1, 0.5$. Можемо зробити висновок, що врахування ширини області контакту γ зміщує криві вгору, підсилюючи концентрацію напружень, але загальна тенденція залежності від \tilde{n} зберігається.

5. Висновки

У роботі проведено комплексне дослідження напружено-деформованого стану кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, що орієнтована перпендикулярно до межі поділу матеріалів, за умов згину та контактної взаємодії її берегів. Розроблено математичну модель, яка дозволяє врахувати ефект закриття тріщини та гладкий контакт її поверхонь у межах смуги сталої ширини біля верхньої грані пластини. Це дало змогу декомпозувати вихідну складну задачу на дві взаємопов'язані підзадачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину за теорією Кірхгофа–Лява. Застосовано метод комплексних потенціалів, за допомогою якого задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків кутів повороту. Систему розв'язано числовим методом механічних квадратур, що підтвердило свою ефективність для дослідження неоднорідних структур. Виявлено значний вплив пружних властивостей сусіднього матеріалу на коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ). Встановлено, що наявність “м'якого” матеріалу ($\tilde{n} < 0$) призводить до зростання КІМ, що сприяє проростанню тріщини в бік межі поділу. Натомість “жорстке” включення ($\tilde{n} > 0$) спричиняє ефект екранування, суттєво знижуючи концентрацію напружень біля вершини тріщини. Встановлено локальний характер впливу неоднорідності: зміна модулів пружності матеріалів найбільш суттєво впливає на вершину тріщини, що розташована безпосередньо біля межі поділу. Для віддаленої вершини цей вплив є значно слабшим і проявляється лише при дуже малих відстанях між тріщиною та лінією поділу. Показано роль контактної області: врахування ширини області контакту берегів γ змінює значення КІМ у бік збільшення, що свідчить про необхідність урахування цього параметра для точного прогнозування міцності конструкцій, що працюють на згин. Отримані результати можуть бути використані для оцінки залишкового ресурсу та несучої здатності багатопарових пластинчастих елементів конструкцій з дефектами.

REFERENCES

1. Alwar R.S., Ramachandran Nambissan K.N. *Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis*// Eng. Fracture Mech. – 1983. – V.17, no.4. – P. 323–333.
2. Jones D.P., Swedlow J.L. *The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate*// Int. J. Fracture. – 1975. – V.11, no.6. – P. 897–914.
3. Heming F.S., Jr. *Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate*// Int. J. Fracture. – 1980. – V.16, no.4. – P. 289–304.
4. Williams M.L., *The bending stress distribution at the base of a stationary crack*// Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – V.28. – P. 78–82.
5. Опанасович В.К. *Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь*// Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип.20 (2). – С. 123–127.
6. Опанасович В., Яцик І. *Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів*// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип.69. – С. 125–135.
7. Шацький І.П. *Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами*// Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – №7. – С. 49–51.

8. Шацький І.П., Перепічка В.В. *Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами*// Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т.28, №2. – С. 54–58.
9. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. *Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах*// Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т.2. – С. 51–54.
10. Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Sleyan L.I. *Closure of a through crack in a plate under bending*// Int. J. Solids Struct. – 1998. – V.35, no.31–32. – P. 4077–4089.
11. M. J. Young and C. T. Sun. *Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution*// Int. J. Fracture. – 1992. – 55. – P. 81–93.
12. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. *Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges*// Vibroengineering Procedia. – 2024. – V. 55. – P. 54–59. <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24515>.
13. Slobodian M.S., Shainoga M.I. *Stress-strain state of bent plate with system of cracks with faces contacting within constant-height zone*// International Applied Mechanics. – 2024. – V.60, Iss. 2. – P. 188–202. <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01273-x>
14. Кундрат М.М., Гук Н.А., Козакова Н.Л., Острик В.І., Слободян М.С. та інші, Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія. за заг. ред. Р.М. Мартиняка. Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
15. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007, 716 с.
16. Опанасович В.К., Звізло І.С. *Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів, з врахуванням контакту берегів*// Системні технології. – Вип. 4 (21). – Дніпропетровськ, 2002. – С. 124–129.
17. Саврук М.П., Зеленька В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів: РАСТР, 2009, 212 с.

Стаття: надійшла до редколегії 05.12.2023
прийнята до друку 29.07.2025

**MOMENT INTENSITY FACTORS FOR THE BENDING OF A
PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A
CRACK PERPENDICULAR TO THE MATERIAL INTERFACE,
ACCOUNTING FOR THE WIDTH OF THE CRACK FACE
CONTACT AREA**

Igor YATSYK

*Ivan Franko National University of Lviv,
str. Universytetska, 1, Lviv, 79000
e-mail: ihor.yatsyk@lnu.edu.ua*

The study investigates the stress-strain state of an infinite piecewise-homogeneous isotropic plate containing a crack oriented perpendicular to the material interface. The case under consideration involves the action of bending moments at infinity in the absence of external loads directly on the crack faces. A key feature of the model is the assumption of smooth contact between the crack faces within a strip of constant width near the upper surface of the plate. This assumption allowed for the decomposition of the initial problem into two interconnected tasks: a plane elasticity problem and a bending problem based on Kirchhoff–Love theory. Utilizing the apparatus of complex potentials, a system of singular integral equations was derived and solved numerically using the method of mechanical quadratures. Based on the analysis results, moment intensity factors were determined, and their dependencies on the problem parameters were plotted.

Key words: stress-strain state, crack, piecewise-homogeneous plate, contact area, complex potentials, intensity factors.