

УДК 539.3

ОПТИМІЗАЦІЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПІВПРОСТОРУ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Анатолій ЯСІНСЬКИЙ

Львівський національний університет ім. І. Франка,

м. Львів, 79000, вул. Університетська, 1

e-mail: yasinskyi.anatoliy@gmail.com

Досліджено двовимірну осесиметричну стаціонарну задачу оптимізації вертикальних температурних переміщень півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін. У просторі неперервних функцій побудовано розв'язок оберненої задачі термопружності, до якої зведено сформульовану задачу керування. Для конкретних випадків теплового навантаження півпростору числово проаналізовано особливості поведінки знайденого розв'язку.

Ключові слова: оптимальне керування, температурні переміщення, обернена задача термопружності.

1. Вступ

Для оцінки міцності теплонавантажених деталей технологічного обладнання потрібно знати їх термонапружений стан, оскільки перевищення напруженнями, що виникають у деталі, заданого допустимого рівня може призвести до її руйнування. Однак теплонавантажена деталь може втрачати проєктні функціональні властивості попри збереження своєї цілісності. Це може статися, зокрема, через перевищення переміщеннями межової поверхні допустимої величини, появу на ній пластичних деформацій чи досягнення температури рекристалізації. Стосується це передусім надійного функціонування елементів оптичних систем високої точності (дзеркал телескопів, лінз лазерних установок), електронних компонентів та мікросхем, сенсорних елементів у вимірювальних системах. У тих випадках, коли вказані вище явища зумовлені дією експлуатаційних факторів, наприклад неізотермічним нагріванням, для компенсації їх впливу можна застосувати додаткове охолодження чи нагрівання.

З огляду на це актуальною є проблема керування температурними переміщеннями чи напруженнями в тілі за обмежень, які обумовлені тими чи іншими технологічними вимогами. Задачі оптимізації температурних переміщень чи напружень в тілах різної форми за допомогою відповідного вибору зовнішнього теплового навантаження чи внутрішніх теплових джерел, а також додаткових обмеженнях на параметри теплового і напружено-деформованого станів досліджено у працях [1]–[5]. Оскільки задачі керування за своїм змістом відносяться до обернених задач, то задачі керування термонапруженим станом тіла можна розглядати і розв'язувати як обернені задачі термопружності ([6, 7]). У працях [8, 9] шляхом зведення до обернених задач термопластичності розв'язано задачі оптимального за швидкістю керування нагріванням термочутливих тіл за обмежень на функцію керування (температуру нагрівального середовища, тепловий потік на поверхні тіла) та максимальне значення інтенсивності напружень чи накопиченої пластичної деформації. У цій роботі, шляхом зведення до оберненої задачі термопружності, побудовано та досліджено розв'язок двовимірної осесиметричної стаціонарної задачі оптимального охолодження за допомогою конвективного теплообміну із довкіллям півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, за обмежень на величину вертикальних температурних переміщень його межової поверхні.

2. Постановка задачі оптимізації

Розглянемо однорідний ізотропний півпростір, віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z . Вважатимемо, що півпростір нагрівається осесиметрично розподіленими внутрішніми стаціонарними джерелами тепла, а через його межу поверхню здійснюється конвективний теплообмін з довкіллям за законом Ньютона. Тоді стаціонарна осесиметрична задача теплопровідності для півпростору опишеться рівнянням ([10])

$$\Delta T(\rho, x) + Q(\rho, x) = 0, \quad \rho \in [0, \infty), \quad x \in (0, \infty) \quad (1)$$

і межовими умовами

$$\frac{\partial T(\rho, 0)}{\partial x} - \alpha [T(\rho, 0) - t_*(\rho)] = 0 \quad \rho \in [0, \infty), \quad (2)$$

$$\lim_{\rho, x \rightarrow \infty} T(\rho, x) = 0, \quad (3)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа; $\rho = r/R$, $x = z/R$ — безрозмірні циліндричні координати; R — деяка нормуюча довжина; $T(\rho, x)$ — температурне поле півпростору; $Q(\rho, x) = Q_*(\rho, x)R^2/\lambda$ — відносна інтенсивність внутрішніх теплових джерел; $Q_*(\rho, x)$ — інтенсивність внутрішніх теплових джерел; $\alpha = \alpha_*R/\lambda$ — безрозмірний коефіцієнт теплообміну; α_* — коефіцієнт теплообміну; λ — коефіцієнт теплопровідності; $t_*(\rho)$ — температура довкілля.

Осесиметричну задачу термопружності для вільного від зовнішнього силового навантаження півпростору, яка відповідає температурному полю $T(\rho, x)$, опишемо наступною системою диференціальних рівнянь ([11]):

$$\begin{aligned} \Delta u_r - \frac{u_r}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T R \frac{\partial T}{\partial \rho} &= 0, \\ \Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T R \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \rho \in [0, \infty), \quad x \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

за умов

$$\sigma_{zz}|_{x=0} = \sigma_{rz}|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

де

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial \rho} + \frac{u_r}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

— об'ємна деформація; u_r , u_z — компоненти вектора переміщень; σ_{zz} , σ_{rz} — компоненти тензора напружень; ν — коефіцієнт Пуассона; α_T — коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Вважатимемо, що функція розподілу теплових джерел $Q(\rho, x)$ є заданою, а конвективний теплообмін з довкіллям використовується для відведення тепла, індукованого цими джерелами. Ставиться за мету відшукування такого закону відведення тепла, щоб за заданого значення коефіцієнта теплообміну α розподіл вертикальних температурних переміщень межевої поверхні півпростору $x = 0$ був максимально близьким до наперед заданого. Тобто, задача керування полягає у визначенні такої функції зміни температури довкілля $t_*(\rho)$ ($\rho \in [0, \infty)$), яка б мінімізувала функціонал

$$J(u) = \max_{\rho \in [0, \infty)} |u_z(\rho, 0; t_*) - \varphi_*(\rho)|, \quad (6)$$

де $u_z(\rho, 0; t_*)$ — вертикальні температурні переміщення межевої поверхні півпростору; $\varphi_*(\rho)$ — заданий розподіл цих переміщень.

3. Зведення задачі оптимізації до оберненої задачі термопружності

Як показали дослідження [12, 13], розв'язання таких задач оптимізації доцільно розпочинати з відшукування керування, яке забезпечуватиме точну нижню грань функціоналу (4), тобто виконання рівності

$$u_z(\rho, 0; t_*) = \varphi_*(\rho), \quad \rho \in [0, \infty). \quad (7)$$

Для цього знайдемо розв'язки задач теплопровідності (1)–(3) та термопружності (4),(5) і запишемо їх у потрібному для нас вигляді.

Застосувавши до задачі теплопровідності (1)–(3) інтегральне перетворення Ганкеля [10] за координатою ρ , її розв'язок запишемо так:

$$T(\rho, x) = \int_0^\infty G_*(\rho, x; \xi) t_*(\xi) d\xi + \int_0^\infty \int_0^\infty G_0(\rho, x; \xi, \eta) Q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

де

$$G_*(\rho, x; \xi) = \alpha \xi \int_0^\infty \frac{s \exp(-sx)}{s + \alpha} J_0(s\rho) J_0(s\xi) ds,$$

$$G_0(\rho, x; \xi, \eta) = \frac{\xi}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{s - \alpha}{s + \alpha} \exp(-s(x + \eta)) + \exp(-s|x - \eta|) \right] J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds,$$

$J_0(\rho)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Як відомо ([11]), розв'язок осесиметричної задачі термопружності для півпростору можна побудувати з двох частин: загального розв'язку системи однорідних рівнянь (4) за умов (5) і частинного розв'язку системи неоднорідних рівнянь (4). Загальний розв'язок системи рівнянь (4) за умов (5) будемо за допомогою функції Лява $L(\rho, x)$ [11], яка задовольняє однорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 L(\rho, x) = 0, \quad (9)$$

а частинний розв'язок — за допомогою термопружного потенціалу переміщень $\Phi(\rho, x)$, який задовольняє неоднорідне рівняння

$$\Delta \Phi(\rho, x) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T T(\rho, x). \quad (10)$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень через функції $L(\rho, x)$ та $\Phi(\rho, x)$ виражаються наступним чином:

$$u_r = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{(1 - 2\nu)R^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \rho \partial x},$$

$$u_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{(1 - 2\nu)R^2} \left(2(1 - \nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right), \quad (11)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \Delta \Phi \right) + \frac{2G}{1 - 2\nu} \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{R^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \Delta \Phi \right) + \frac{2G}{1 - 2\nu} \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \Delta L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial L}{\partial \rho} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \Delta \Phi \right) + \frac{2G}{1 - 2\nu} \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial x} \left((2 - \nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{2G}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial x} + \frac{2G}{1 - 2\nu} \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((1 - \nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right), \quad (13)$$

де G — модуль зсуву.

Застосувавши до бігармонічного рівняння (9) інтегральне перетворення Ганкеля ([10]) за координатою ρ , його розв'язування зводиться до розв'язування звичайного диференціального рівняння четвертого порядку

$$\left(\frac{d}{dx^2} - s^2 \right)^2 L_H = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad (14)$$

де

$$L_H(s, x) = \int_0^{\infty} \rho L(\rho, x) J_0(s\rho) d\rho$$

— зображення за Ганкелем функції $L(\rho, x)$.

Обмеженим розв'язком рівняння (14) є функція

$$L_H(s, x) = (A(s) + B(s)) \exp(-sx). \quad (15)$$

Визначивши коефіцієнти з умов (5), (12), (13), записаних у просторі зображень, отримуємо

$$A(s) = -\frac{(1+\nu)\alpha_T R^3}{2(1-\nu)s^2}(1-2\nu)(1-4\nu) \int_0^\infty T_H(s, \eta) \exp(-s\eta) d\eta,$$

$$B(s) = \frac{(1+\nu)\alpha_T R^3}{2(1-\nu)s}(1-2\nu) \int_0^\infty T_H(s, \eta) \exp(-s\eta) d\eta,$$

де $T_H(s, \eta)$ — зображення за Ганкелем функції $T(\rho, x)$.

Тому з формули (15) остаточно маємо

$$L_H(s, x) = -\frac{(1+\nu)\alpha_T R^3}{2(1-\nu)s^2}(1-2\nu)(1-4\nu-2sx) \int_0^\infty T_H(s, \eta) \exp(-s(x+\eta)) d\eta. \quad (16)$$

Рівняння (10) у просторі зображень за Ганкелем матиме вигляд

$$\frac{d^2 \Phi_H}{dx^2} - s^2 \Phi_H = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T R^2 T_H, \quad x \in (0, \infty).$$

Обмеженим частинним розв'язком цього рівняння є функція

$$\Phi_H(s, x) = -\frac{(1+\nu)\alpha_T R^2}{2(1-\nu)s^2} \int_0^\infty T_H(s, \eta) \exp(-s|x-\eta|) d\eta. \quad (17)$$

У результаті на основі знайдених розв'язків (16) і (17) та співвідношень, (11) у просторі оригіналів отримуємо розв'язок задачі термопружності для півпростору у вигляді наступних інтегральних залежностей компонент вектора переміщень від невизначеного температурного поля:

$$u_r(\rho, x) = \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\exp(-s|x-\eta|) + (3-4\nu-2sx) \exp(-s(x+\eta)) \right] \times$$

$$\times s\xi J_1(s\rho) J_0(s\xi) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta,$$

$$u_z(\rho, x) = \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{2(1-\nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\exp(-s|x-\eta|) \text{sign}(x-\eta) - \right.$$

$$\left. - (3-4\nu+2sx) \exp(-s(x+\eta)) \right] s\xi J_0(s\rho) J_0(s\xi) T(\xi, \eta) ds d\xi d\eta, \quad (18)$$

де $J_1(\rho)$ — функція Бесселя першого роду першого порядку.

Маючи розв'язки задач теплопровідності та термопружності у вигляді (8) та (18), зведемо сформульовану задачу оптимізації до оберненої задачі термопружності. Для цього розв'язок (8) підставимо у подання (18) і на основі співвідношення (7),

після відповідних перетворень, отримаємо наступне інтегральне рівняння першого роду типу згортки [14] на шукану функцію $t_*(\rho)$:

$$\int_0^{\infty} K(\rho, \xi) t_*(\xi) d\xi = f(\rho), \quad (19)$$

де

$$K(\rho, \xi) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{s + \alpha} J_0(s\xi) J_0(s\rho) ds,$$

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \xi J_0(s\xi) J_0(s\rho) \left(\frac{1}{s + \alpha} + \eta \right) \times$$

$$\times \exp(-s\eta) Q(\xi, \eta) d\eta d\xi ds - \varphi(\rho),$$

$$\varphi(\rho) = \varphi_*(\rho) / (2(1 + \nu)\alpha_T R).$$

Таким чином, вихідна задача оптимізації зведена до оберненої задачі термопружності, яка описується інтегральним рівнянням (19) і у якій за заданим розподілом температурних переміщень потрібно визначити відповідне теплове навантаження, яке його спричиняє.

4. Побудова та числовий аналіз розв'язку оберненої задачі

Застосувавши до отриманого інтегрального рівняння (19) з наведеним вище ядром і правою частиною інтегральне перетворення Ганкеля за координатою ρ , та скориставшись формулою обернення

$$t_*(\rho) = \int_0^{\infty} (t_*)_H(s) J_0(s\rho) d\rho,$$

у просторі оригіналів матимемо розв'язок сформульованої задачі оптимізації

$$t_*(\rho) = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{s + \alpha}{\alpha} \left(\frac{s\xi}{s + \alpha} + s\eta\xi \right) \exp(-s\eta) J_0(s\xi) J_0(s\rho) Q(\xi, \eta) d\xi d\eta ds -$$

$$- \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \xi s^2 (s + \alpha) J_0(s\xi) J_0(s\rho) \varphi(\xi) d\xi ds. \quad (20)$$

За допомогою формули (20) числово досліджено поведінку оптимального розподілу температури довкілля, яка забезпечує нульові вертикальні температурні переміщення межевої поверхні півпростору $\varphi(\rho) = 0$, коли внутрішні теплові джерела зосереджені у круговій області $D = \{\rho: \rho \leq a\}$ площини $x = x_0$, паралельної до межі півпростору, тобто $Q(\rho, x) = q(\rho)H(a - \rho)\delta(x - x_0)$, де $H(\rho)$ — функція Гевісайда; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака.

На рис. 1 кривими 1–5 зображено поведінку безрозмірної функції керування $t(\rho) = -t_*(\rho)/q_0$, розрахованої за формулою (20), для випадку, коли $q(\rho) = q_0 =$

const, $\alpha = 1$, $a = 1$ і відповідно для $x_0 = 0,01; 0,1; 0,5; 1,0; 3,0$. На рис. 2 кривими 1-5 для цих же значень параметра x_0 зображено поведінку безрозмірної функції керування, розрахованої за формулою (20), для випадку, коли $q(\rho) = q_0(1 - \rho^2)$, $q_0 = \text{const}$. Як видно з рисунків і як показали дослідження, забезпечити нульові вертикальні температурні переміщення межевої поверхні півпростору у розглянутих випадках можна за допомогою лише охолодження, без додаткового нагрівання. За близького розташування теплових джерел до межі півпростору, функція керування з точністю до знаку повторює закон розподілу заданих теплових джерел. Віддалення області тепловиділення D від межевої поверхні півпростору спочатку призводить до незначного зростання абсолютної величини функції керування, а після деякого граничного значення x_0^* до спадання цієї величини зі збільшенням зони охолодження у напрямку зростання радіальної координати. Пов'язано це з тим, що в межах розглядуваної математичної моделі термопружності (15), (17), при віддаленні теплових джерел від межевої поверхні півпростору їх вплив на температурні переміщення поверхні зменшується, що дає змогу забезпечити поставлену мету керування (7) меншим за абсолютною величиною значенням температури довкілья. При збільшенні чи зменшенні розміру a області D функція керування якісно зберігає наведену на рис. 1, 2 поведінку з відповідним збільшенням чи зменшенням зони охолодження у напрямку зростання радіальної координати.

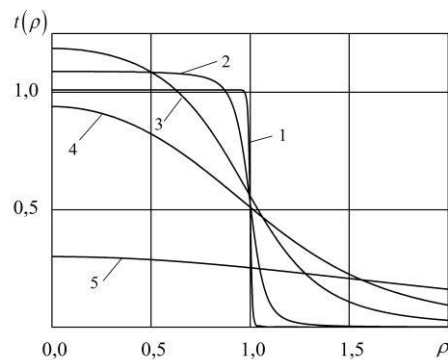


Рис. 1.

На рис. 3 кривими 1-4 зображено поведінку безрозмірної функції керування $t(\rho) = -t_*(\rho)/q_0$, розрахованої за формулою (20), для випадку, коли $q(\rho) = q_0 = \text{const}$, $a = 1$, сталого значення $x_0 = 0,5$ і відповідно $\alpha = 1,0; 3,0; 10,0; 100,0$. Як бачимо, збільшення значення коефіцієнта теплообміну α , тобто підвищення інтенсивності тепловідведення через межу поверхню півпростору, дає змогу досягнути поставленої мети меншою за модулем функцією керування, за решти незмінних параметрів.

На рис. 4 кривими 1-5 зображено поведінку безрозмірної функції керування у вигляді теплового потоку $u(\rho) = -u_*(\rho)/q_0$, заданого на межевій поверхні півпростору, розрахованої за формулою (20), для випадку, коли $q(\rho) = q_0 = \text{const}$, $\alpha = 1$,

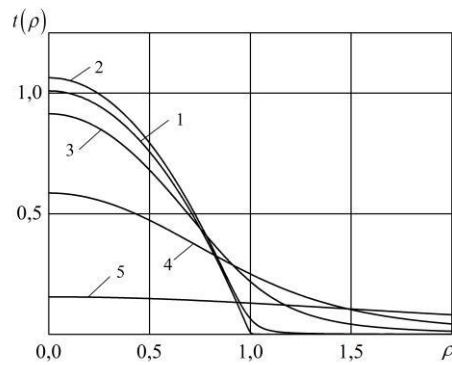


Рис. 2.

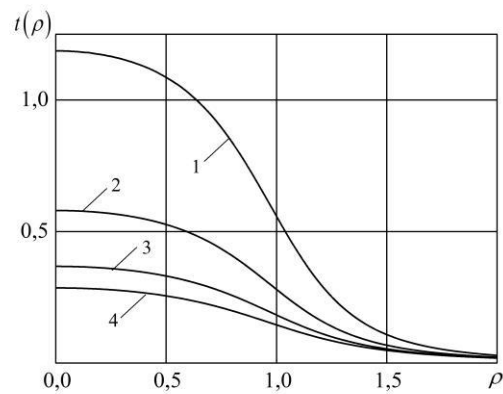


Рис. 3.

$a = 1$ і відповідно для $x_0 = 0,01; 0,1; 0,5; 1,0; 3,0$, де $u_*(\rho)$ — тепловий потік. Як бачимо, за близького розташування теплових джерел до межі півпростору функція керування з точністю до знаку повторює закон розподілу заданих теплових джерел, а з віддаленням області тепловиділення D від межевої поверхні півпростору абсолютна величина функції керування зменшується зі збільшенням зони охолодження у напрямку зростання радіальної координати.

Із формули (20) видно, що задані функції $Q(\rho, x)$ і $\varphi(\rho)$, через які виражається розв'язок сформульованої задачі оптимізації, можуть бути такими, що відповідні не-власні інтеграли будуть розбіжними. Це означатиме, що у цьому випадку зроблене припущення про існування точної нижньої грані функціоналу (6) буде порушуватися. Як показують дослідження [12, 13], у цьому випадку за допомогою формули

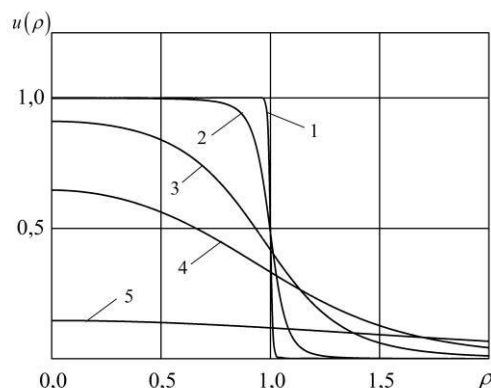


Рис. 4.

(20) у просторі неперервних функцій можна побудувати послідовність, яка мінімізуватиме функціонал (6) і буде наближеним розв'язком вихідної задачі оптимізації.

Зазначимо, що у випадку, коли закон розподілу температури $t(\rho)$ є відомим, а невідомим є коефіцієнт теплообміну, то сформульовану вище задачу оптимізації можна сформулювати як задачу на відшукання значення α , за якого буде досягати мінімуму функціонал (6).

5. Висновки

Для випадку двовимірної стаціонарної осесиметричної задачі теплопровідності сформульовано задачу керування розподілом вертикальних температурних переміщень межевої поверхні півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано розподіл температури довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін півпростору, а за критерій оптимальності — мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу переміщень від заданого.

На основі припущення про існування у просторі неперервних функцій керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, сформульована задача оптимізації зведена до оберненої задачі термопружності, яка описується інтегральним рівнянням першого роду типу згортки. Використавши інтегральне перетворення Ганкеля, побудовано аналітичний розв'язок оберненої задачі.

Для конкретних випадків теплового навантаження півпростору проаналізовано поведінку знайденого керування, яке забезпечує рівність нулеві вертикальних переміщень межевої поверхні за різних характерних параметрів. Якщо припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, порушується, запропоновано методику побудови у просторі неперервних функцій послідовності, яка мінімізуватиме цей критерій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. F. Ashida, S. Sakata, K. Matsumoto, *Control of thermal stress in a piezo-composite disk*, J. Thermal Stresses, **30** (2007), no.1, 1025–1040. DOI: 10.1080/01495730701499081
2. В.С. Дейнека, А.А. Аралова, *Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра*, Доп. НАН України, (2012), №5, 38–42.
3. T.R. Tauchert, H.C. Howard, *Least-squares residual solution for displacement control of a composite piezothermoelastic cylinder*, J. Thermal Stresses, **35** (2012), no.1–3, 61–74. DOI: 10.1080/01495739.2012.637742
4. A. Elswaf, F. Ashida, S. Sakata, *Optimum structure design of a multilayer piezo-composite disk for control of thermal stress*, J. Thermal Stresses, **35** (2012), no.9, 805–819. DOI: 10.1080/01495739.2012.689233
5. S. Ding, G. Li, B. Luo, *Active control thermal-loading method to ameliorate stress in aeroengine turbine disk*, J. Thermophys. Heat Transfer, **27** (2013), no.2, 274–285. DOI: 10.2514/1.T3907
6. Y. Ootao, *Inverse problem of thermal deformation in a cylinder*, Encyclopedia of Thermal Stresses, **5**, 2578–2585, Springer, Dordrecht, 2014.
7. A. Yasinsky, *Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems*, Encyclopedia of Thermal Stresses, **2** (2014), 916–924, Springer, Dordrecht.
8. R.M. Kushnir, A.V. Yasinsky, *Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material*, J. Engineering Mathematics, **78** (2011), no.1, 83–96. DOI: 10.1007/s10665-011-9467-3
9. Р.М. Кушнір, В.С. Попович, А.В. Ясінський, *Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл*, Львів, Сполом, 2011.
10. S.J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers*, New York, Dover Publ., 1993.
11. M.R. Eslami, R.B. Hetnarski, J. Ignaczak, N. Noda, N. Sumi, Y. Tanigawa, *Theory of elasticity and thermal stresses: Explanations, problems and solutions*, Dordrecht, Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-6356-2
12. R. Kushnir, A. Yasinsky, *Control of steady-state thermal displacements and stresses in a planestrained half-space*, J. Thermal Stresses, **41** (2018), no.10–12, 1468–1486. DOI: 10.1080/01495739.2018.1520619
13. A. Yasinsky, Y. Tokovyy, O. Ierokhova, *Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources*, J. Thermal Stresses, **39** (2016), no.9, 1084–1097. DOI: 10.1080/01495739.2016.1192854
14. C. Corduneanu, *Integral equations and applications*, Cambridge, Cambridge univer. press, 2008.

Стаття: надійшла до редколегії 05.02.2024
прийнята до друку 08.07.2025

**OPTIMIZATION OF AXISYMMETRIC TEMPERATURE
DISPLACEMENTS OF A HALF-SPACE HEATED BY INTERNAL
HEAT SOURCES****Anatoliy YASINSKYY***Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: yasinskyi.anatoliy@gmail.com*

A two-dimensional axisymmetric stationary problem of optimizing vertical temperature displacements of a half-space heated by internal heat sources is investigated. The control function is the distribution of the ambient temperature with which convective heat exchange occurs. In the space of continuous functions, a solution of the inverse thermoelasticity problem is constructed, to which the formulated control problem is reduced. For specific cases of thermal loading of the half-space, the features of the behavior of the found solution are numerically analyzed.

Key words: optimal control, temperature displacements, inverse thermoelasticity problem.