

УДК 539.3

## ПРИПОВЕРХНЕВИЙ ДЕФЕКТ МАСИ. ПОВЕРХНЕВИЙ НАТЯГ ТА МІЦНІСТЬ ТОНКИХ ПЛІВОК

Тарас НАГІРНИЙ<sup>1</sup>, Костянтин ЧЕРВІНКА<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Зеленогурський університет,  
вул. проф. Шафрана, 4, Зелена Гура, 65-516, Польща  
e-mail: [t.nahirnyj@gmail.com](mailto:t.nahirnyj@gmail.com)

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна  
e-mail: [kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua](mailto:kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua)

У рамках моделі узагальненого локально-неоднорідного твердого тіла досліджено вплив приповерхневого дефекту маси (відхилення густини від її значення в однорідному середовищі) на напружений стан пружного шару, його міцність і поверхневий натяг. Одним із ключових рівнянь моделі є рівняння для густини, яке має вигляд неоднорідного модифікованого рівняння Гельмгольца. Неоднорідний член цього рівняння (джерела маси) узагальнює модель локально-неоднорідного твердого тіла на урахування геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла. Вивчено залежність дефекту маси від параметрів джерел маси. Проведено порівняльний аналіз максимальних розтягуючих напружень у шарі та поверхневого натягу, зокрема їх залежності від параметрів джерел маси. При аналізі міцності використано припущення про крихке руйнування за першим класичним критерієм міцності.

*Ключові слова:* модель локально-неоднорідного пружного тіла, тонкі плівки, приповерхневий дефект маси, максимальні напруження, поверхневий натяг, міцність.

### 1. Вступ

Інтенсивне використання тонкоплівкових і тонковолоконних структур, мікропористих та нанокompозитних матеріалів в інженерній практиці зумовлює потребу в теоретичних моделях, які враховують особливості структури матеріалу, надлишкову

енергію приповерхневих шарів, а також різноманітні градієнтні ефекти. Експлуатаційні властивості нанoeлементів значною мірою визначаються процесами, що відбуваються у приповерхневих шарах, де структура та енергія міжатомних зв'язків суттєво відрізняються від об'ємного стану матеріалу. Одним із фундаментальних проявів цих відмінностей є приповерхневий дефект маси — явище, пов'язане зі зміною маси або густини елементів у приповерхневих шарах порівняно з внутрішніми. Приповерхнева неоднорідність маси безпосередньо впливає на поверхневий натяг, енергію зв'язку, формування внутрішніх напружень і міцність.

Поверхнева енергія, поверхневий натяг, енергія зв'язку та пов'язані з ними ефекти виходять за межі моделей класичних теорій зв'язаних процесів, а тому вони не здатні описувати різноманітні розмірні ефекти, притаманні нанoeлементам. Некласичні моделі та підходи в механіці суцільного середовища дають змогу більш адекватно описувати специфічні механічні явища на малих масштабах і, тим самим, забезпечують достатньо точне прогнозування експлуатаційних властивостей елементів приладів і конструкцій в умовах реального навантаження. До таких моделей, серед інших, належать модель Гуртіна–Мардока ([1]), нелокальні ([2–4]) та градієнтні ([5–7]) моделі.

Моделі, побудовані в рамках локально-градієнтного підходу в термомеханіці, враховують локальну неоднорідність хімічного потенціалу, збурення якого ототожнюється зі збуренням енергії зв'язку ([8–10]). При формулюванні основних співвідношень моделей використано методи термодинаміки нерівноважних процесів та нелінійної механіки. Одним із ключових рівнянь у цих моделях є узагальнене рівняння Гельмгольца для густини, яка є параметром, спряженим із хімічним потенціалом. На прикладі модельних задач показано, що ці моделі описують закономірності поведінки спряжених полів, властиві нанoeлементам, зокрема розмірні ефекти та вплив на них полів різної фізичної природи ([11, 12]). З метою розширення застосовності моделей на врахування геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла рівняння для густини було узагальнено шляхом введення неоднорідного члена — так званих джерел маси. Однак у літературі недостатньо повно вивчено вплив джерел маси на приповерхневий дефект маси та поверхневий натяг, а також кореляцію поверхневого натягу з максимальними напруженнями і міцністю. У даній роботі цю прогалину заповнено на прикладі пружного шару.

## 2. Ключова система рівнянь моделі

Розв'язуюча система рівнянь моделі локально-неоднорідного пружного тіла містить рівняння, записані на переміщення або напруження і на густину або хімічний потенціал. Основні співвідношення моделі, що лягли в основу ключової системи рівнянь, отримано методами термодинаміки нерівноважних процесів та нелінійної механіки ([9, 13]). Зазначимо, що хімічний потенціал є базовим параметром стану, спряженим до густини, а збурення хімічного потенціалу можна ототожнити із збуренням енергії зв'язку.

Якщо за розв'язуючі функції прийняти густину  $\rho$  і вектор переміщення  $\vec{u}$ , то ключова система рівнянь моделі є такою

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho - \xi_m^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi_m^2 d_s, \\ \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - a_m (3\lambda + 2\mu) \vec{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\rho_*$  — густина матеріалу тіла у відліковому стані,  $\xi_m, \mu, \lambda, a_m$  — сталі,  $\vec{\nabla}$  — вектор-оператор Гамільтона,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $\cdot$  — символ внутрішнього добутку,  $d_s$  — функція, що характеризує джерела маси ([8,14]). Зазначимо, що параметр  $\xi_m$  може бути пов'язаний із структурною неоднорідністю матеріалу ([15]), а джерела маси були введені до моделі з метою більш точного опису приповерхневої неоднорідності густини, зокрема шорсткості реальної поверхні тіла та способу обробки поверхні.

Якщо замість вектора переміщення  $\vec{u}$  за розв'язуючу функцію обрати тензор напружень  $\hat{\sigma}$ , то ключова система рівнянь моделі є такою

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho - \xi_m^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi_m^2 d_s, \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{\nabla} \times \left[ \hat{\sigma} - \left( \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma + 2\mu a_m (\rho - \rho_*) \right) \hat{I} \right] \right\}^T &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $\sigma = \hat{\sigma} : \hat{I}$ ,  $\hat{I}$  — одиничний тензор,  $\cdot$  — подвійний внутрішній добуток,  $\times$  — відзначає векторний добуток, а символ  $T$  — транспонування.

Є зрозумілим, що формулюючи конкретні задачі математичної фізики слід системи (1) чи (2) доповнити відповідними граничними умовами і конкретизувати вигляд джерел  $d_s$ . Для визначення спряжених до базових параметрів стану використовуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2\mu \hat{e} + [\lambda e - (3\lambda + 2\mu) a_m (\rho - \rho_*)] \hat{I}, \\ \eta &= -(3\lambda + 2\mu) a_m e + \alpha_{mm} (\rho - \rho_*), \\ \hat{e} &= \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \otimes \vec{u} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\hat{e}$  — тензор деформації Коші,  $e = \hat{e} : \hat{I}$ ,  $\eta$  — збурення хімічного потенціалу,  $\alpha_{mm}$  — стала,  $\otimes$  — діадний добуток.

### 3. Напружено-деформований стан тонкого шару

Розглянемо ізотропний деформівний твердий шар, що займає область  $|x| \leq l$  у прямокутній декартовій системі координат  $\{x, y, z\}$ . Вважаємо, що шар розтягнутий у напрямі осі  $Oy$  силовим навантаженням інтенсивності  $\sigma_a$ . Приймаємо, що поверхні  $x = l, x = -l$  шару вільні від зовнішнього силового навантаження і на них задано постійне значення густини  $\rho(\pm l) = \rho_a$  ( $\rho_a < \rho_*$ ).

Для джерел маси приймаємо подання

$$d_s(x) = (\rho_a - \rho_*) \frac{\cosh(\xi_s x)}{\cosh(\xi_s l)}. \quad (4)$$

Параметр  $\xi_s$  характеризує розподіл джерел маси і залежить від способу формування та обробки поверхні твердого тіла. Його можна пов'язати з геометричною неоднорідністю (шорсткістю) реальної поверхні тіла.

У такому випадку у тілі реалізується одновимірною за координатою  $x$  ситуація. Для вивчення рівноважного стану шару використаємо систему рівнянь, записану для густини  $\rho(x)$  та нормальних компонент  $\sigma_{xx}(x)$ ,  $\sigma_{yy}(x)$ ,  $\sigma_{zz}(x)$  тензора напружень  $\hat{\sigma}$ .

Систему (2) доповнюємо граничними умовами

$$\rho(\pm l) = \rho_a, \quad \sigma_{xx}(\pm l) = 0 \quad (5)$$

та умовами самозрівноваженості шару

$$\int_{-l}^l \sigma_{yy} dx = 2l\sigma_a, \quad \int_{-l}^l x\sigma_{yy} dx = 0, \quad \int_{-l}^l \sigma_{zz} dx = 0, \quad \int_{-l}^l x\sigma_{zz} dx = 0. \quad (6)$$

Розв'язок сформульованої задачі є таким

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_* + (\rho_a - \rho_*) \left( \frac{\xi_m^2 \cosh(\xi_s x)}{\xi_m^2 - \xi_s^2 \cosh(\xi_s l)} - \frac{\xi_s^2 \cosh(\xi_m x)}{\xi_m^2 - \xi_s^2 \cosh(\xi_m l)} \right), \\ \sigma_{xx}(x) &= 0, \quad \sigma_{yy}(x) - \sigma_a = \sigma_{zz}(x) = -2\mu a_m (\rho_a - \rho_*) \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \times \\ &\times \left[ \frac{\xi_m^2}{\xi_m^2 - \xi_s^2} \left( \frac{\cosh(\xi_s x)}{\cosh(\xi_s l)} - \frac{\tanh(\xi_s l)}{\xi_s l} \right) - \frac{\xi_s^2}{\xi_m^2 - \xi_s^2} \left( \frac{\cosh(\xi_m x)}{\cosh(\xi_m l)} - \frac{\tanh(\xi_m l)}{\xi_m l} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Розв'язок задачі показує, що у шарі, вільному від зовнішнього силового навантаження ( $\sigma_a = 0$ ), існує відмінний від нуля напружено-деформований стан, зумовлений дефектом маси, тобто відмінністю густини маси тіла від його відлікового значення. Стан залежить від товщини шару і характерних розмірів  $\xi_m^{-1}$ ,  $\xi_s^{-1}$ , пов'язаних із структурною неоднорідністю матеріалу та шорсткістю реальної поверхні тіла, відповідно, ([9]).

У роботі [14] проведено оцінку поверхневого значення густини на плоскій поверхні пружного тіла. Показано, що для  $\rho_a$  справджується  $0 < \rho_a \leq 0.5\rho_*$ , а  $\rho_a = 0.5\rho_*$  відповідає ідеальній плоскій поверхні. У даній роботі числові дослідження виконано для  $\rho_a = 0.5\rho_*$ .

На рис. 1 показано розподіл за товщиною шару приведеної густини  $\rho/\rho_*$ . Криві 1–3 на рис. а відповідають  $\xi_m l = 10, 20, 30$  відповідно,  $\xi_s/\xi_m = 0.3$ . Пунктирна крива відповідає випадку  $d_s(x) = 0$ ,  $\xi_m l = 30$ . На рис. б прийнято  $\xi_m l = 10$ , а криві 1–3 відповідають  $\xi_s/\xi_m = 0.2, 0.4, 0.8$  відповідно.

Із збільшенням товщини шару значення густини на серединній поверхні  $\rho(0)$  наближається до значення густини відлікового середовища  $\rho_*$ . У товстих шарах відмінність значення густини  $\rho$  від  $\rho_*$  властива лише вузьким приповерхневим областям тіла, тобто дефект маси носить приповерхневий характер. При цьому як бачимо з рис.1б, більшим значенням параметра  $\xi_s$  відповідає більша чистота реальної поверхні тіла.

Ненульовий напружений стан тіла ілюструють графіки на рис. 2, на якому показано розподіл за товщиною вільного від силового навантаження ( $\sigma_a = 0$ ) шару приведених напружень  $\sigma_{yy}/\sigma_0$ ,  $\sigma_0 = 2\mu a_m \rho_* (3\lambda + 2\mu)/(\lambda + 2\mu)$  при відсутності розтягуючого навантаження  $\sigma_a = 0$ . На рис. а криві 1–3 відповідають  $\xi_m l = 10, 20, 30$  відповідно,  $\xi_s/\xi_m = 0.3$ . Пунктирна крива відповідає випадку  $d_s(x) = 0$ ,  $\xi_m l = 30$ . На рис. б криві 1–3 відповідають  $\xi_s/\xi_m = 0.2, 0.4, 0.8$  відповідно,  $\xi_m l = 10$ . Пунктирна крива відповідає відсутності джерел ( $d_s(x) = 0$ ).

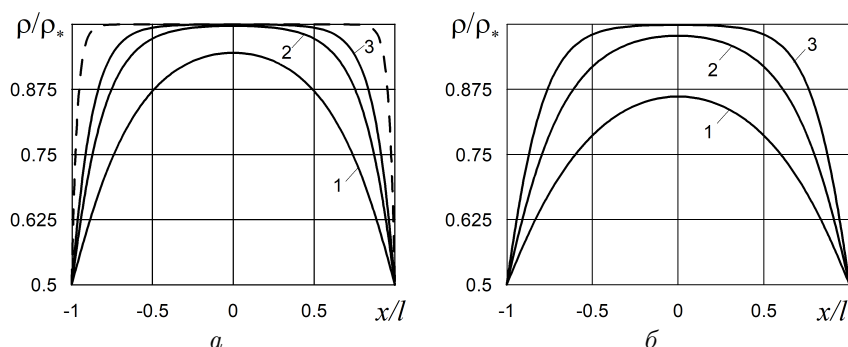


Рис. 1. Розподіл густини у локально-неоднорідному шарі. Приповерхневий дефект маси

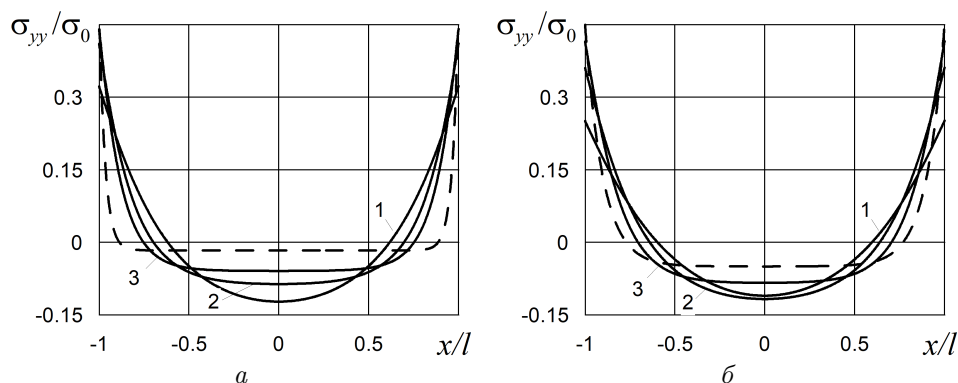


Рис. 2. Напруження у локально-неоднорідному шарі

Напруження  $\sigma_{kk}(x)$ ,  $k = \{y, z\}$ , монотонно зменшуються при відході від поверхонь  $x = \pm l$  шару від своїх максимальних значень  $\sigma_{kk}(\pm l)$  досягаючи мінімального значення  $\sigma_{kk}(0)$  на серединній поверхні. Напруження в області шару є самозрівноваженими, причому якщо на зовнішніх поверхнях шару вони є розтягуючими, то на серединній поверхні тіла ці напруження є стискаючими.

Аналіз розв'язку та графіків на рис. 2а вказують на зростання значення напружень на зовнішніх поверхнях шару зі збільшенням його товщини. Бачимо також, що залежність від параметрів джерел маси значень напружень є суттєвою. Це ілюструють зокрема графіки на рис. 3, на яких представлено розмірний ефект поверхневих напружень (рис. 3а) для  $\xi_s/\xi_m = 0.2, 0.4, 0.8$  (криві 1–3), штрихова лінія відповідає відсутності джерел маси, а також залежність  $\sigma_{yy}/\sigma_0$  від  $\xi_s/\xi_m$  для  $\xi_m l = 10$  (рис. 3б).

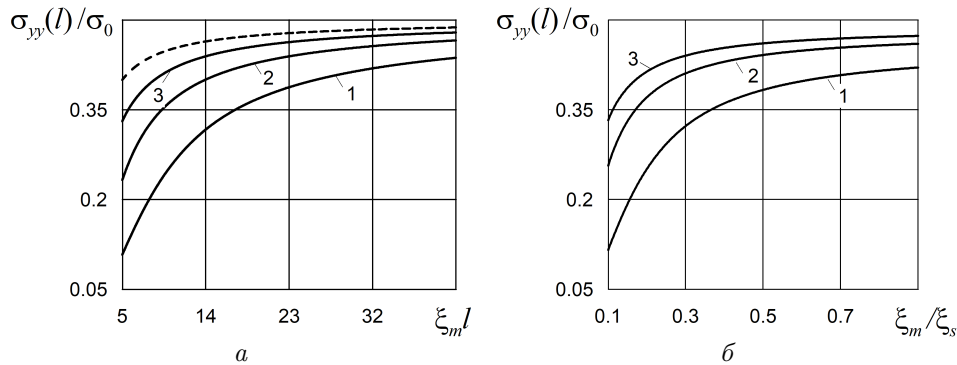


Рис. 3. Напруження у локально-неоднорідному шарі

#### 4. Поверхневий натяг у вільному шарі

Інтегральною характеристикою розтягуючих приповерхневих напружень у вільному шарі є поверхневий натяг ([16, 17]). Для його обчислення використаємо співвідношення ([16])

$$f_p = \int_{x_a}^l \sigma_{yy} dx, \quad (8)$$

де  $x_a$  ( $0 < x_a < l$ ) — точка переходу розтягуючих приповерхневих напружень у стискаючі

$$\sigma_{yy}(x_a) = 0.$$

Останнє рівняння, враховуючи (7), набуває вигляду

$$\xi_m^2 \left( \frac{\cosh(\xi_s x)}{\cosh(\xi_s l)} - \frac{\tanh(\xi_s l)}{\xi_s l} \right) = \xi_s^2 \left( \frac{\cosh(\xi_m x)}{\cosh(\xi_m l)} - \frac{\tanh(\xi_m l)}{\xi_m l} \right).$$

Як видно із рис. 2, це рівняння має єдиний додатний розв'язок, який знаходимо чисельно. Зазначимо, що за відсутності джерел маси ( $d_s = 0$ ) у роботах [5, 12] для положення точки переходу стискаючих напружень у розтягуючі було отримано наближене співвідношення

$$x_a = l \left( 1 - \frac{\ln(\xi_m l)}{\xi_m l} \right)$$

у припущенні  $\xi_m l \ll \exp(\xi_m l)$ .

Розмірний ефект поверхневого натягу та його залежність від параметра, що характеризує джерела маси, показано на рис. 4. Тут  $f_0 = \sigma_0 / \xi_m$ . Криві 1–3 на рис. 4а відповідають  $\xi_s / \xi_m = 0.2, 0.4, 0.8$  відповідно, а пунктирна лінія — відсутності джерел маси. На рис. 4б криві 1–3 відповідають  $\xi_m l = 10, 20, 30$ , відповідно.

При збільшенні товщини шару поверхневий натяг зростає, прямує до граничного значення, що відповідає поверхневому натягу у півпросторі.

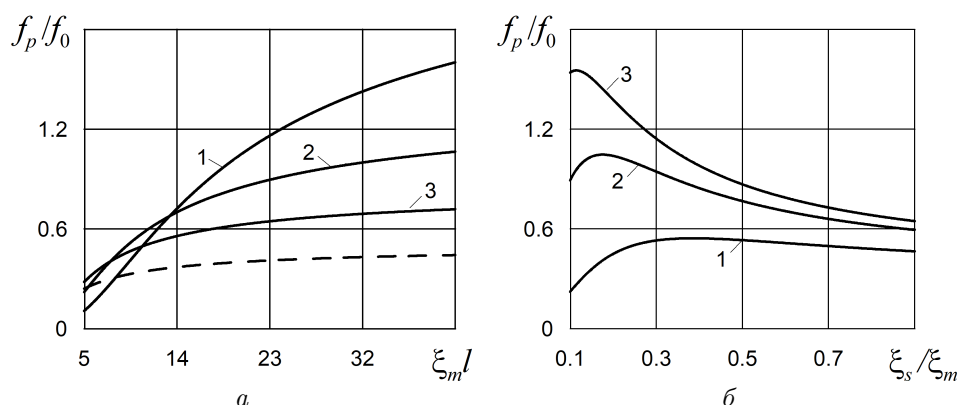


Рис. 4. Поверхневий натяг у вільному неоднорідному шарі

### 5. Міцність розтягнутого шару.

Зі збільшенням зовнішнього силового навантаження напруження у шарі зростають. У певний момент вони досягнуть межі міцності матеріалу  $\sigma_p$ . Якщо за основу прийняти критерій першої класичної теорії міцності ([18]) та припущення про крихке руйнування, то приходимо до висновку, що шар зруйнується миттєво, якщо найбільші напруження у шарі (напруження  $\sigma_{yy}(\pm l)$ ) досягнуть критичного значення

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_p. \quad (9)$$

Використовуючи співвідношення (7) для інтенсивності силового навантаження  $\sigma_{cr}$ , що приводить до руйнування шару, знаходимо

$$\sigma_{cr} = \sigma_p + \frac{2\mu a_m (\varrho_a - \varrho_*)}{\xi_m^2 - \xi_s^2} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \left[ \xi_m^2 \left( 1 - \frac{\tanh(\xi_s l)}{\xi_s l} \right) - \xi_s^2 \left( 1 - \frac{\tanh(\xi_m l)}{\xi_m l} \right) \right]. \quad (10)$$

При великих  $l$  це значення прямує до  $\sigma_+$

$$\sigma_+ = \sigma_p + 2\mu a_m (\varrho_a - \varrho_*) \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Використовуючи це позначення, співвідношення (10) записуємо у вигляді

$$\sigma_{cr} = \sigma_+ - 2\mu a_m (\varrho_a - \varrho_*) \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\xi_m^2}{\xi_m^2 - \xi_s^2} \frac{\tanh(\xi_s l)}{\xi_s l} - \frac{\xi_s^2}{\xi_m^2 - \xi_s^2} \frac{\tanh(\xi_m l)}{\xi_m l} \right). \quad (11)$$

Праву сторону даного співвідношення можна трактувати як таку, що описує розмірний ефект та вплив шорсткості реальної поверхні на межу міцності тіл з плоскими границями. На рис. 5а,б представлено результати числового дослідження інтенсивності силового навантаження, що приводить до крихкого руйнування шару відповідно в залежності від його товщини (параметра  $\xi_m l$ ) та параметра  $\xi_s/\xi_m$ . На рис. 5а криві 1–3 відповідають  $\xi_s/\xi_m = 0.2, 0.4, 0.8$  та  $\mu a_m \varrho_* (3\lambda + 2\mu) / ((\lambda + 2\mu)\sigma_+) = 8$ , а штрихова лінія — відсутності джерел маси. На рис. 5б криві 1–3 відповідають  $\xi_m l = 10, 20, 30$  та  $\mu a_m \varrho_* (3\lambda + 2\mu) / ((\lambda + 2\mu)\sigma_+) = 8$ .

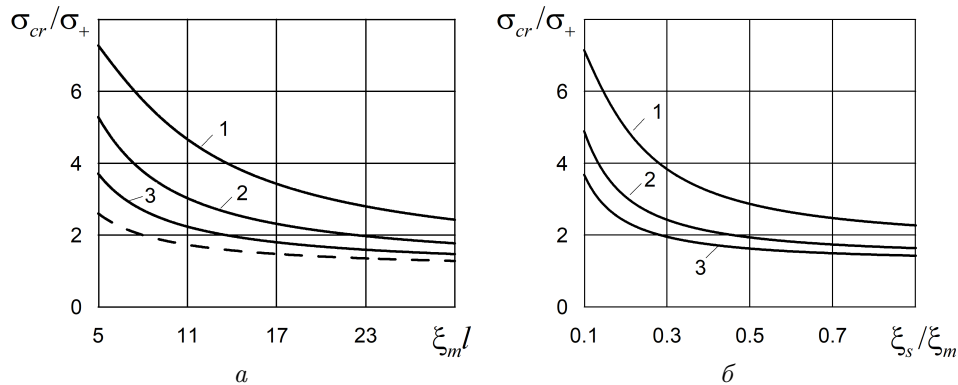


Рис. 5. Міцність локально-неоднорідного шару

Бачимо, що тонкі плівки витримують більшу інтенсивність зовнішнього силового навантаження порівняно з товстими шарами. Відзначаємо також суттєву залежність міцності від параметра  $\xi_s$ , тобто від чистоти поверхні.

### 6. Висновки.

У роботі модель локально-неоднорідного пружного твердого тіла застосовано до вивчення впливу приповерхневого дефекту маси (відмінність значення густини від густини середовища з того ж матеріалу) на напружений стан ізотропного шару, поверхневий натяг та міцність шару. Ключова система рівнянь моделі включає рівняння для густини, яке є неоднорідним модифікованим рівнянням Гельмгольца, неоднорідний член якого (джерела маси) пов'язується з шорсткістю реальної поверхні тіла.

Ненульовий дефект маси спричинює ненульовий напружено-деформований стан вільного від зовнішнього силового навантаження тіла. На основі розв'язку сформульованої крайової задачі вивчено напружений стан шару, найбільші напруження у шарі, їх розмірний ефект та залежність від параметрів джерел маси. Результати числового дослідження поверхневого натягу, який є інтегральною характеристикою приповерхневих розтягуючих напружень, порівняно з відповідними результатами для найбільших напружень (поверхневих напружень) у шарі. Вказано, що поверхневий натяг не є однозначною характеристикою поверхневих напружень, а суттєво залежить від точки переходу приповерхневих розтягуючих напружень у стискаючі.

Для вивчення міцності шару використано першу класичну теорію міцності в припущенні, що тіло зруйнується миттєво, якщо напруження хоч би в одній точці тіла досягнуть критичного для матеріалу тіла значення. На основі порівняння одержаних результатів з відповідними для поверхневого натягу вказано на суттєву відмінність їх розмірних ефектів та залежності від параметрів джерел маси.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Gurtin M.E., Ian Murdoch A. *A continuum theory of elastic material surfaces*// Archive for rational mechanics and analysis. – 1975. – V.57(4). – P. 291–323.
2. Kröner E. *Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*// International Journal of Solids and Structures. – 1967. – V.3(5). – P. 731–742.
3. Eringen A., Wegner J. *Nonlocal continuum field theories*// Applied Mechanics Reviews. – 2003. – V.56(2). – B20–B22.
4. Roudbari M.A., Jorshari T.D., Lü C., Ansari R., Kouzani A.Z., Amabili M. *A review of size-dependent continuum mechanics models for micro-and nano-structures*// Thin-Walled Structures. – 2022. – V.170. – 108562.
5. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність*// Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С. 57–62.
6. Desai S., Sidhardh S. *Beyond classical elasticity: a review of strain gradient theories, emphasizing computer modeling, physical interpretations, and multifunctional applications*// Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2025. – V.144(2). – 1271.
7. Повстенко Ю.З. *Нелокальна і градієнтна теорії пружності та їх застосування до опису недосконалостей у твердих тілах*// Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т.46(2). – С. 136–146.
8. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Mathematical modeling of structural and near-surface nonhomogeneities in thermoelastic thin films*// International Journal of Engineering Science. – 2015. – V.91. – P. 49–62.
9. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. [Текст]: монографія. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.*
10. Nahirnyj T., Sasiadek M., Tchervinka K. *Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces*// International Journal of Solids and Structures. – 2024. – V.302. – P. 112979
11. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Surface tension and strength of local nonhomogeneous cylinder in the process of heating*// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип.7. – С. 30–39.
12. Bozhenko V., Nahirnyj T., Tchervinka K. *To modeling admixtures influence on the size effects in a thin film*// Mathematical modeling and computing. – 2016. – V.3(1). – P. 12–22.
13. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Functional kinetic equations in mathematical modeling of coupled processes in solids*// Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2020. – V.32. – P. 1727–1743.
14. Nahirnyj T., Tchervinka K. *Near-surface mass defect in models of locally heterogeneous solid mechanics*// Acta Mechanica et Automatica. – 2019. – V.13(3). – P. 205–210.
15. Нагірний Т.С., Червінка К.А. *Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сплайн, 2012. – 264 с.*
16. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. *Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.*
17. Shuttleworth R. *The surface tension of solids*// Proceedings of the physical society. Section A. – 1950. – V.63(5). – 444.
18. Панасюк В.В., Андрейків А.Є., Партон В.С. *Основи механіки руйнування матеріалів // Механіка руйнування і міцність матеріалів: довідк. посіб./ За ред. Панасюка В.В. – У 4-х т. – К.: Наук. думка, 1988. – Т.1. – 488 с.*

Стаття: надійшла до редколегії 05.08.2024  
прийнята до друку 08.06.2025

## SURFACE MASS DEFECT. SURFACE TENSION AND STRENGTH OF THIN FILMS

Taras NAHIRNYJ<sup>1</sup>, Kostiantyn TCHERVINKA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>University of Zielona Góra,  
4 Szafrana, Zielona Góra, 65-516, Poland  
e-mail: t.nahirnyj@gmail.com

<sup>2</sup>Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska str, 1, Lviv, 79000,  
e-mail: kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua

Within the framework of the model of a generalized locally inhomogeneous solid, the influence of a near-surface mass defect (the deviation of the density from its value in a homogeneous medium) on the stress state of the elastic layer, its strength and surface tension was investigated. One of the key equations of the model is the equation for density, which has the form of an inhomogeneous modified Helmholtz equation. The inhomogeneous term of this equation (mass sources) generalizes the model of a locally inhomogeneous solid to take into account the geometric inhomogeneity of the real surface of the body. The dependence of the mass defect on the parameters of the mass sources was studied. A comparative analysis of the maximum tensile stresses in the layer and surface tension was carried out, in particular their dependence on the parameters of the mass sources. The assumption of brittle fracture according to the first classical strength criterion was used in the strength analysis.

*Key words:* model of a locally non-homogeneous elastic body, thin films, near-surface mass defect, maximum stresses, surface tension, strength.