

УДК 539.3

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМ ДИСКОМ ТА ДВОМА РАДІАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

Микола СЛОБОДЯН, Андрій МЕЛЬНИЧИН,
Богдан СЛОБОДЯН

*Львівський національний університет ім. І. Франка,
Університетська 1, м. Львів, 79000
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, andriy.melnychyn@lnu.edu.ua,
bohdan.slobodian@lnu.edu.ua*

Розв'язано задачу про двосторонній згин ізотропної пластини з абсолютно жорстким диском та двома радіальними тріщинами з урахуванням смугового контакту їх берегів. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактної зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів.

Ключові слова: тріщина, згин, шайба, ізотропна пластинка, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

1. Вступ

Пластинчасті конструкційні елементи можуть містити включення, а під час їх експлуатації можуть утворюватися тріщини, які суттєво знижують допустиме навантаження, яке можна прикладати до таких елементів. Розробка методів оцінки напружено-деформованого стану пластин із тріщинами, береги яких контактують за згину, є важливою науково-технічною проблемою прикладної математики.

Задачі згину пластин з тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії, розв'язано у працях [1, 9, 12, 14]. Вплив контакту берегів тріщини на напружено-деформований стан експериментально підтверджено у статті [2]. Модель гладкого контакту берегів тріщин по області сталої ширини використовувалася в

роботах [3,4,6,13]. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з міжфазними тріщинами з зонами контакту проведено у роботах [8,10]. Задачу про вплив контакту берегів термоізолюваної міжфазної тріщини при термомеханічному навантаженні на напружено-деформований стан досліджено у [11].

У статті досліджується задача про згин нескінченної ізотропної пластини з жорстким диском та двома радіальними прямолінійними наскрізними тріщинами, береги яких гладко контактують по області сталої ширини по всій їх довжині на верхній основі пластини.

2. Формулювання задачі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину висотою $2h$, у якій розташовано абсолютно жорсткий диск радіуса R та дві наскрізні радіальні тріщини довжиною $2l$ кожна, при чому до них не прикладено зовнішнього навантаження і вони розташовані на одній прямій. Припустимо, що береги тріщин контактують по області сталої висоти h_j ($j = 1, 2$) на верхній основі пластини, у яку вироджується деяка реальна область контакту [4]. Декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ виберемо таким чином, щоб площина Oxy лежала в серединній площині пластини, а початок координат O співпадав з центром абсолютно жорсткого диску. У площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox . У вибраній системі координат $Oxy\tilde{z}$ центри тріщин O_j будуть розташовані на відстані x_{0j} від точки O , причому $x_{0j} > R + l$, $j = 1, 2$. У точці O_j виберемо початок декартової системи координат $O_jx_jy_j$, направивши вісь O_jx_j по відповідній тріщині.

Введемо наступні позначення: область у середині абсолютно жорсткого диску позначимо як S^+ , область ззовні — S^- ; лінії, на яких розміщені тріщини — L_j ; межа абсолютно жорсткого диску — L ; точки, що співпадають з кінцями тріщин, — a_j та b_j , $j = 1, 2$. Пластина на безмежності згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ (див. рис. 1).

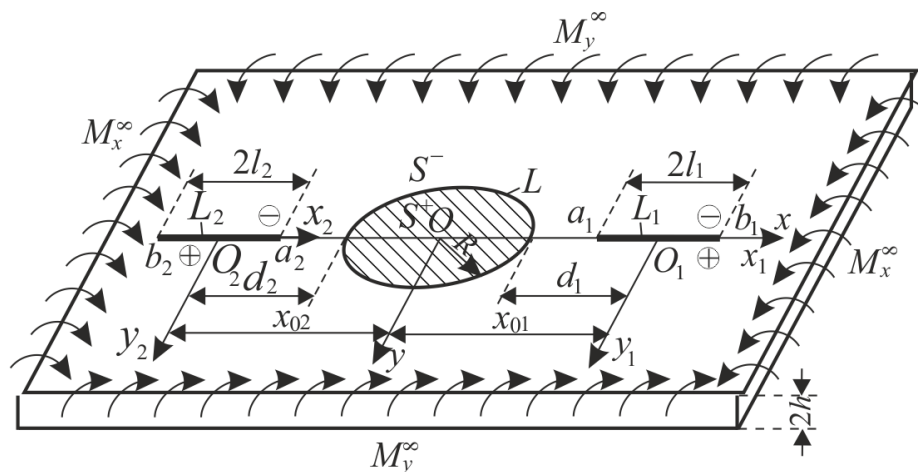


Рис. 1. Безмежна пластина з абсолютно жорстким диском та тріщинами

Через контакт берегів тріщин розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (класична теорія згину пластини), за наступних крайових умов:
 — на межі абсолютно жорсткого диску

$$w = 0, \quad t \in L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

$$u_{\Pi r} = 0, \quad t \in L, \quad (3)$$

$$u_{\Pi \theta} = 0, \quad t \in L, \quad (4)$$

— для тріщин [4]

$$P^+ = P^- = 0, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$M_{y_j}^+ = M_{y_j}^- \equiv M_{y_j}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\sigma_{x_j y_j}^+ = \sigma_{x_j y_j}^- = 0, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

$$\sigma_{y_j y_j}^+ = \sigma_{y_j y_j}^- \equiv \sigma_{y_j y_j}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$M_{y_j} = -2\delta_j h^2 \sigma_{y_j y_j}, \quad \delta_j = 1 - \frac{\gamma_j}{3}, \quad \gamma_j = \frac{h_j}{h}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\partial[\nu_{\Pi}] / \partial x_j + \alpha_j h \cdot [\partial^2 w / (\partial x_j \partial y_j)] = 0, \quad \alpha_j = 0.5 \left(1 + (1 - \gamma_j)^2 \right), \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

де $\sigma_{x_j y_j}$, $\sigma_{y_j y_j}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ — компоненти тензора напружень відповідно в j -ій декартовій та полярній системах координат; h_j — висота контакту берегів j -ої тріщини; ν_{Π} — проекція вектора переміщення точки на вісь O_{y_j} у плоскій задачі, w — прогин пластини у задачі згину; M_r і M_{y_j} — згинальні моменти, P^{\pm} та P_r — узагальнені, в сенсі Кірхгофа, перерізувальні сили у декартовій та полярній системах координат відповідно; $[f] = f^+ - f^-$, значками «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до j -ої тріщини при $y_j \rightarrow \pm 0$.

3. Розв'язок задачі

Розв'яжемо спочатку задачу згину. Для цього введемо комплексні потенціали [3] у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2), \\ \Psi(z) &= \Psi_K(z) + \Psi_1(z_1) - x_{01}\Phi_1'(z_1) + \Psi_2(z_2) + x_{02}\Phi_2'(z_2) \end{aligned} \quad (11)$$

де $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $z_j = z + (-1)^j x_{0j}$, $j = 1, 2$.

Зауважимо, що функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Psi_j(z_j)$ є голоморфними ззовні j -ої тріщини та зникають на нескінченності, а функції $\Phi_K(z)$ і $\Psi_K(z)$ є голоморфними ззовні шайби і при великих $|z|$ їх можна представити у вигляді [3]

$$\Phi_K(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Psi_K(z) = \Gamma' + O(1/z^2), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (12)$$

де $\Gamma = -\frac{M_y^{\infty} + M_x^{\infty}}{4D(1+\nu)}$, $\Gamma' = \frac{M_y^{\infty} - M_x^{\infty}}{2D(1-\nu)}$, $D = \frac{2Q}{3(1-\nu^2)}$, $Q = Eh^3$, E — модуль пружності, ν — коефіцієнт Пуассона.

Введемо функції [3]

$$\Omega_j(z_j) = -\bar{\Phi}_j(z_j) - z_j \cdot \bar{\Phi}'_j(z_j) - \bar{\Psi}_j(z_j), \quad j = 1, 2,$$

$$\Phi_K(z) = -\bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \cdot \bar{\Phi}'_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \cdot \bar{\Psi}'_K\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+.$$

Тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини будемо мати формули

$$\begin{aligned} & \Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{z}\right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \\ & \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)} \right\} + \\ & + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + \Omega_2(\bar{z}_2) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \bar{z}_2) \cdot \overline{\Phi'_2(z_2)} \right\} = \tilde{g}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{z}\right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \\ & + \tilde{\kappa} \left\{ \Phi_1(z) + \Phi_2(z) \right\} - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \cdot \left\{ \overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)} \right\} - \\ & - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + \Omega_2(\bar{z}_2) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \bar{z}_2) \cdot \overline{\Phi'_2(z_2)} \right\} = \tilde{f}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_m(z_m) - \Omega_m(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \cdot \overline{\Phi'_m(z_m)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_K(z)} + z \cdot \overline{\Phi'_K(z)} + \\ & + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \Phi_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + z_m \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \cdot \\ & \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} - \overline{\Phi_j(z_j)} - \bar{z}_j \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} - \Omega_j(\bar{z}_j) = \partial_{x_m} g_m, \quad m = 1, 2, j = 3 - m. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \Phi_m(z_m) + \Omega_m(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m) \cdot \overline{\Phi'_m(z_m)} + \tilde{\kappa} \Phi_K(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_K(z)} - \\ & z \cdot \overline{\Phi'_K(z)} - \frac{R^2}{z^2} \cdot \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \tilde{\kappa} \Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - z_m \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} - \\ & (z_{0m} - z_{0j}) \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} + \overline{\Phi_j(z_j)} + \bar{z}_j \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(\bar{z}_j) = f_m, \quad m = 1, 2, j = 3 - m, \end{aligned} \quad (16)$$

де $r = z \cdot \bar{z}$, $z_m = x_m + iy_m$, $\tilde{K} = (3 + \nu)/(1 - \nu)$, $g_m = i \cdot \partial_{y_m} w + \partial_{x_m} w$, $z_{01} = x_{01}$, $z_{02} = -x_{02}$, $z_j = z_{0m} - z_{0j} + x_m$,

$$\tilde{f} = p \cdot \left\{ M_r + i \cdot \tilde{c}'_0 + i \cdot H_{r\Theta} + i \cdot \int_0^s N_n(s) ds \right\},$$

$$p = -\frac{1}{D(1 - \nu)}, \quad f_m = p \cdot \left\{ M_{y_m} + i \cdot \tilde{c}'_m + i \cdot H_{x_m y_m} + i \cdot \int_{-\infty}^t N_{y_m}(\tau) d\tau \right\},$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \cdot e^{i\theta} \right).$$

Зауважимо, що для функції $\Phi_K(z)$ виконується [3]

$$\Phi_K(z) = \overline{\Gamma} R^2 / z^2 + O(1), \quad |z| \rightarrow 0. \quad (17)$$

Якщо підставити крайові умови (5), (6) у формули (16), тоді отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\tilde{\kappa} \Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m))^+ - (\tilde{\kappa} \Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m))^- = 0, \quad x_m \in L_m, \quad m = 1, 2,$$

розв'язок яких буде мати вигляд

$$\Omega_m(z_m) = \tilde{\kappa} \cdot \Phi_m(z_m), \quad m = 1, 2.$$

Додамо залежності (15) і (16)

$$\Phi_m(z_m) + \tilde{K} \Phi_m(z_m) + \Phi_K(z) + \tilde{K} \Phi_K(z) = \partial_{x_m} g_m + f_m, \quad m = 1, 2,$$

і врахуємо крайові умови (5), (6), тоді отримаємо задачу лінійного спряження

$$\Phi_m^+(t) - \Phi_m^-(t) = y_m(t), \quad t \in L, \quad m = 1, 2, \quad y_m(x_m) = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}} \cdot \left[\frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right],$$

розв'язавши які, матимемо

$$\Phi_m(x_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{y_m(t)}{t - z_m} dt, \quad m = 1, 2. \quad (18)$$

Якщо підставимо крайові умови (1), (2) у формули (14), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & \Phi_K^+(s) - \Phi_K^-(s) + \Phi_1(s - x_{01}) + \Phi_2(s + x_{02}) + \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right) \left[\overline{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \right. \\ & \left. + \overline{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) \right] + \frac{R^2}{s^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \Omega_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) - \left(s - \frac{R^2}{s}\right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(\overline{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \overline{\Phi}'_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) \right) \right\} = 0, \quad s \in L. \end{aligned}$$

Для розв'язку попередньої задачі лінійного спряження введемо функцію

$$\begin{aligned} F(z) &= \Phi_K(z) - \Phi_1(z - x_{01}) - \Phi_2(z + x_{02}), \quad z \in S^+, \\ F(z) &= \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \left\{ \overline{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right\} + \\ & + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \Omega_2\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) - \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \cdot \left(\overline{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\Phi}'_2\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right) \right\}, \quad z \in S^-, \end{aligned} \quad (19)$$

для якої матимемо

$$F^+(s) - F^-(s) = 0, \quad s \in L. \quad (20)$$

Врахувавши (12) і (17), розв'язок задачі лінійного спряження (20) запишемо так

$$F(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \Gamma + B, \quad (21)$$

де

$$B = \frac{i}{2\pi} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\overline{y_1(t)}}{t + x_{01}} dt + \int_{-l}^l \frac{\overline{y_2(t)}}{t - x_{02}} dt \right\}.$$

Підставимо (21) у (19)

$$\begin{aligned} \Phi_K(z) &= \bar{\Gamma}' R^2 / z^2 + \Gamma + B + \Phi_1(z - x_{01}) + \Phi_2(z + x_{02}), \quad z \in S^+, \\ \Phi_K(z) &= \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \Gamma + B - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right) \cdot \left\{ \bar{\Phi}_1 \left(\frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \bar{\Phi}_2 \left(\frac{R^2}{z} + x_{02} \right) \right\} - \\ &- \frac{R^2}{z^2} \cdot \left\{ \Omega_1 \left(\frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \Omega_2 \left(\frac{R^2}{z} + x_{02} \right) - \left(z - \frac{R^2}{z} \right) \cdot \left(\bar{\Phi}'_1 \left(\frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \bar{\Phi}'_2 \left(\frac{R^2}{z} + x_{02} \right) \right) \right\}, \quad z \in S^-. \end{aligned} \quad (22)$$

Якщо підставимо крайові умови (5), (6) у формули (16), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &\tilde{\kappa} \cdot \Phi_m^+(x_m) + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_m^-(x_m) + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_K(z_{0m} + x_m) - \left(1 + \frac{R^2}{(z_{0m} + x_m)^2} \right) \cdot \\ &\cdot \overline{\Phi_K(z_{0m} + x_m)} - \left(z_{0m} + x_m - \frac{R^2}{z_{0m} + x_m} \right) \cdot \overline{\Phi'_K(z_{0m} + x_m)} - \frac{R^2}{(z_{0m} + x_m)^2} \Phi_K \cdot \\ &\cdot \left(\frac{R^2}{z_{0m} + x_m} \right) + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - \bar{x}_m \overline{\Phi'_j(z_j)} - (z_{0m} - z_0) \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} + \overline{\Phi_j(z_j)} + \\ &+ \bar{z}_j \cdot \overline{\Phi'_j(z_j)} + \tilde{\kappa} \Phi_j(\bar{z}_j) = i \cdot \bar{c}'_m + p \cdot M_{y_m}, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad x_m \in L_m. \end{aligned} \quad (23)$$

Підставимо (18) і (22) у (23) та отримаємо два інтегральні рівняння для визначення невідомих функцій $y_m(t)$, які в безрозмірних змінних матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \left\{ K_{mm}(\xi, \eta) \cdot Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_m(\eta)} \right\} d\eta + \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ K_{mj}(\xi, \eta) \cdot Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta = \\ &= i \bar{c}'_m + \tilde{p} M_{y_m} / M_y^\infty + P_m(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} K_{mj}(\xi, \eta) &= \begin{cases} \tilde{\kappa} / \{ \pi i \cdot (\eta - \xi) \} + \tilde{K}_{mj}(\xi, \eta), & m = j; \\ \tilde{K}_{mj}(\xi, \eta) + K_{mj}^V(\xi, \eta), & m \neq j, \end{cases} \\ L_{mj}(\xi, \eta) &= \tilde{\kappa} \cdot L_{mj}^I - (1 + 1/X_m^2) \cdot L_{mj}^{II} - (X_m - 1/X_m) \cdot L_{mj}^{III} - L_{mj}^{IV} / X_m^2, \\ \tilde{K}_{mj}(\xi, \eta) &= \tilde{\kappa} \cdot K_{mj}^I - (1 + 1/X_m^2) \cdot K_{mj}^{II} - (X_m - 1/X_m) \cdot K_{mj}^{III} - K_{mj}^{IV} / X_m^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{mj}^I &= -\frac{\tilde{\kappa}\lambda_j}{2\pi i X_m (T_j X_m - 1)}, \quad L_{mj}^I = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{T_j} - \frac{\lambda_j(X_m^2 + 1)}{X_m(T_j X_m - 1)} + \frac{\lambda_j F_{mj}}{(T_j X_m - 1)^2} \right), \\
 K_{mj}^{II} &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{T_j} - \frac{\lambda_j(X_m^2 + 1)}{X_m(T_j X_m - 1)} + \frac{\lambda_j F_{mj}}{(T_j X_m - 1)^2} \right), \quad L_{mj}^{II} = \frac{\tilde{\kappa}\lambda_j}{2\pi i X_m (T_j X_m - 1)}, \\
 K_{mj}^{III} &= \frac{\lambda_j}{\pi i \cdot (T_j X_m - 1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{X_m^2} + \frac{T_j X_m - 1}{X_m^2} - \frac{F_{mj}}{X_m} - \frac{F_{mj}}{X_m(T_j X_m - 1)} \right), \\
 L_{mj}^{III} &= \frac{\tilde{\kappa}\lambda_j}{\pi i X_m^2 (T_j X_m - 1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2(T_j X_m - 1)} \right), \quad K_{mj}^{IV} = \frac{\lambda_j X_m}{2\pi i (T_j X_m - 1)}, \\
 L_{mj}^{IV} &= -\frac{\lambda_j}{2\pi i T_j}, \quad K_{mj}^V = \frac{2\lambda_j \tilde{\kappa}}{\pi i} \cdot \frac{1}{T_j - X_m}, \quad F_{mj} = X_m - 1/X_m, \\
 P_m(\xi) &= A + B - \tilde{\kappa}A + \frac{2A + B(1 - \tilde{\kappa})}{X_m^2} + \frac{B(3 - 2X_m^2)}{X_m^4}, \quad x_m = l\xi, \quad t = l\eta, \quad \lambda_m = \frac{l}{R}, \\
 \tilde{p} &= -1.5(1 + \nu), \quad T_m = z_{0m} + \lambda_m \eta, \quad X_m = z_{0m} + \lambda_m \xi, \quad y_m(t) = M_y^\infty Y_m(t)/Q, \\
 & \quad Y_m(t) = Y_{m1}(t) + i \cdot Y_{m2}(t),
 \end{aligned}$$

$A = -0.375(1 + \rho)(1 - \nu)$, $B = 0.5\tilde{p}(1 - \rho)$, $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty$, $Y_{m1}(t)$, $Y_{m2}(t)$ — дійсні функції.

До системи рівнянь (24) додаємо додаткові умови

$$\int_{-1}^1 Y_m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{m1}(\eta) d\eta = 0, \quad m = 1, 2, \quad (25)$$

які виражають відповідно однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контуру тріщини.

Тепер розв'яжемо плоску задачу теорії пружності. Для визначення напружено-деформованого стану введемо комплексні потенціали Колосова-Мухелішвілі [3] $\Phi_\Pi(z)$ і $\Psi_\Pi(z)$

$$\begin{aligned}
 \Phi_\Pi(z) &= \Phi_{\Pi K}(z) + \Phi_{\Pi 1}(z_1) + \Phi_{\Pi 2}(z_2), \\
 \Psi_\Pi(z) &= \Psi_{\Pi K}(z) + \Psi_{\Pi 1}(z_1) - x_{01}\Phi'_{\Pi 1}(z_1) + \Psi_{\Pi 2}(z_2) + x_{02}\Phi'_{\Pi 2}(z_2), \quad (26)
 \end{aligned}$$

де функції $\Phi_{\Pi j}(z_j)$ і $\Psi_{\Pi j}(z_j)$ голоморфні ззовні j -ї тріщини та зникають на нескінченності, функції $\Phi_{\Pi K}(z)$ і $\Psi_{\Pi K}(z)$ голоморфні ззовні диска та зникають на нескінченності.

Введемо функції [3]

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi j}(z_j) &= \bar{\Phi}_{\Pi j}(z_j) + z_j \cdot \bar{\Phi}'_{\Pi j}(z_j) + \bar{\Psi}_{\Pi j}(z_j), \quad j = 1, 2, \\
 \Phi_{\Pi K}(z) &= -\bar{\Phi}_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \cdot \bar{\Phi}'_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \cdot \bar{\Psi}_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+.
 \end{aligned}$$

Тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини у плоскій задачі теорії пружності отримуємо формули

$$\begin{aligned} & \Phi_{\Pi K}(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_{\Pi K} \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left\{ \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} \right\} + \\ & + \Phi_{\Pi 1}(z_1) + \Phi_{\Pi 2}(z_2) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \left\{ \overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)} + \overline{\Phi_{\Pi 2}(z_2)} \right\} - \\ & - \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_{\Pi 1}(\bar{z}_1) + \Omega_{\Pi 2}(\bar{z}_2) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)} + (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_{\Pi 2}(z_2)} \right\} = \\ & = \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \Phi_{\Pi K}(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_{\Pi K} \left(\frac{R^2}{\bar{z}} \right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left\{ \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} \right\} + \\ & + \kappa \Phi_{\Pi 1}(z_1) + \kappa \Phi_{\Pi 2}(z_2) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z} \right) \left\{ \overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)} + \overline{\Phi_{\Pi 2}(z_2)} \right\} + \\ & + \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_{\Pi 1}(\bar{z}_1) + \Omega_{\Pi 2}(\bar{z}_2) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)} + (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_{\Pi 2}(z_2)} \right\} = \\ & = \frac{2\mu}{iz} \cdot \frac{\partial(u + iv)}{\partial\theta}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{\Pi m}(z_m) + \Omega_{\Pi m}(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \cdot \overline{\Phi'_{\Pi m}(z_m)} + \Phi_{\Pi K}(z) + \\ & + \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} + z \cdot \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \cdot \left\{ \Phi_{\Pi K} \left(\frac{R^2}{\bar{z}^2} \right) - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} \right\} + \\ & \Phi_{\Pi j}(z_j) + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + z_m \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - \\ & - \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} - \bar{z}_j \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + \Omega_{\Pi j}(\bar{z}_j) = \sigma_{y_m y_m} + i \cdot \sigma_{x_m y_m}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \Phi_{\Pi m}(z_m) - \Omega_{\Pi m}(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m) \cdot \overline{\Phi'_{\Pi m}(z_m)} + \kappa \Phi_{\Pi K}(z) - \\ & - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} - z \cdot \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \cdot \left\{ \Phi_{\Pi K} \left(\frac{R^2}{\bar{z}^2} \right) - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} \right\} + \\ & + \kappa \Phi_{\Pi j}(z_j) - \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} - z_m \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - (z_{0m} - z_{0j}) \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + \\ & + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \bar{z}_j \cdot \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - \Omega_{\Pi j}(\bar{z}_j) = 2\mu(u + iv)'_{x_m}, \end{aligned} \quad (30)$$

де $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, μ — модуль зсуву, $m = 1, 2$, $j = 3 - m$.

Аналогічно як і у задачі згину пластини, якщо підставити крайові умови (3), (4), (7), (8) у формули (27)–(30), тоді отримуємо

$$\Phi_{\Pi m}(z) = \Omega_{\Pi m}, \quad \Phi_{\Pi m}(z_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{g'_m(t)}{t - z_m} dt, \quad m = 1, 2, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi K}(z) &= B_{\Pi} - \kappa \Phi_{\Pi 1}(z - x_{01}) - \kappa \Phi_{\Pi 2}(z + x_{02}), \quad z \in S^+, \\ \Phi_{\Pi K}(z) &= \frac{1}{\kappa} \left\{ -B_{\Pi} + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \left[\overline{\Phi}_{\Pi 1} \left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi}_{\Pi 2} \left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right] - \right. \\ &\quad - \frac{R^2}{z^2} \left[\Omega_{\Pi 1} \left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \Omega_{\Pi 2} \left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(\overline{\Phi}'_{\Pi 1} \left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \overline{\Phi}'_{\Pi 2} \left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right) \right] \right\}, \quad z \in S^-. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{де } g'_m(x_m) = \frac{2\mu}{i \cdot (1 + \kappa)} \cdot \left[\frac{\partial(u + i \cdot \nu)}{\partial x_m} \right], \quad B_{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\overline{g'_1(t)}}{t + x_{01}} dt + \int_{-l}^l \frac{\overline{g'_2(t)}}{t - x_{02}} dt \right\}.$$

Якщо підставити крайові умови (7), (8) та співвідношення (31) у формулу (29), тоді будемо мати

$$\begin{aligned} \sigma_{y_m y_m} &= \Phi_{\Pi m}^+(x_m) + \Phi_{\Pi m}^-(x_m) + \Phi_{\Pi K}(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} + \\ &\quad + z \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \Phi_{\Pi K} \left(\frac{R^2}{z}\right) + \Phi_{\Pi j}(z_j) + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \\ &\quad + x_m \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \Phi'_{\Pi j}(z_j) - \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} - \\ &\quad - \overline{z_j} \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + \Phi_{\Pi j}(\overline{z_j}), \quad m = 1, 2; \quad j = 3 - m. \end{aligned} \quad (33)$$

Якщо врахувати вирази для функцій $\Phi_{\Pi m}(z)$ (31) та $\Phi_{\Pi K}(z)$ (32), то для знаходження невідомих функцій $g'_m(t)$ із залежності (33) отримаємо два інтегральні рівняння, які в безрозмірних координатах мають вигляд

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \\ + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta = \frac{h^2 \sigma_{y_m y_m}}{M_y^\infty} \\ \xi \in [-1, 1], \quad j = 3 - m, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} R_{mj}(\xi, \eta) &= \begin{cases} 1/\{\pi \cdot (\eta - \xi)\} + \tilde{R}_{mj}(\xi, \eta), & m = j; \\ \tilde{R}_{mj}(\xi, \eta) + R_{mj}^V(\xi, \eta), & m \neq j; \end{cases} \\ S_{mj}(\xi, \eta) &= S_{mj}^I + (1 + 1/X_m^2) \cdot S_{mj}^{II} + (X_m - 1/X_m) \cdot S_{mj}^{III} + S_{mj}^{IV}/X_m^2, \\ \tilde{R}_{mj}(\xi, \eta) &= R_{mj}^I + (1 + 1/X_m^2) \cdot R_{mj}^{II} + (X_m - 1/X_m) \cdot R_{mj}^{III} + R_{mj}^{IV}/X_m^2, \\ R_{mj}^I &= -\frac{\lambda_j}{2\pi\kappa X_m (T_j X_m - 1)}, \\ S_{mj}^I &= -\frac{1}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{\lambda_j}{T_j} + \frac{\lambda_j (X_m^2 + 1)}{X_m (T_j X_m - 1)} - \frac{\lambda_j F_{mj}}{(T_j X_m - 1)^2} \right\}, \end{aligned}$$

$$R_{mj}^{II} = -\frac{1}{2\pi\kappa} \left\{ \frac{\lambda_j}{T_j} - \frac{\lambda_j(X_m^2 + 1)}{X_m(T_j X_m - 1)} + \frac{\lambda_j F_{mj}}{(T_j X_m - 1)^2} \right\}, \quad S_{mj}^{II} = \frac{-\lambda_j}{2\pi\kappa X_m (T_j X_m - 1)},$$

$$R_{mj}^{III} = -\frac{\lambda_j}{\pi\kappa \cdot (T_j X_m - 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{X_m^2} + \frac{T_j X_m - 1}{X_m^2} - \frac{F_{mj}}{X_m} - \frac{F_{mj}}{X_m(T_j X_m - 1)} \right),$$

$$S_{mj}^{III} = \frac{\lambda_j}{\pi\kappa X_m^2 (T_j X_m - 1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2(T_j X_m - 1)} \right), \quad R_{mj}^{IV} = \frac{\lambda_j X_m}{2\pi \cdot (T_j X_m - 1)},$$

$$S_{mj}^{IV} = \frac{\lambda_j}{2\pi T_j}, \quad R_{mj}^V = \frac{\lambda_j}{\pi} \cdot \frac{1}{T_j - X_m},$$

$g'_m(t) = M_y^\infty G_m(t)/h^2$, $G_m(t) = G_{m1}(t) + i \cdot G_{m2}(t)$, $G_{m1}(t)$ і $G_{m2}(t)$ – дійсні функції.
З умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо

$$\int_{-1}^1 G_m(\eta) d\eta = 0, \quad m = 1, 2. \quad (35)$$

Враховавши крайову умову (9) та рівняння (24) і (34), отримаємо

$$\text{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ K_{mm}(\xi, \eta) \cdot Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \left\{ K_{mj}(\xi, \eta) \cdot Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = \tilde{c}'_m, \quad (36)$$

де $\xi \in [-1, 1]$, $m = 1, 2$, $j = 3 - m$,

$$\text{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ K_{mm}(\xi, \eta) \cdot Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) \cdot G_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} + \\ + 2\delta_m \bar{p} \text{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) \cdot G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) \cdot G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = P_m(\xi), \quad (37)$$

$$\text{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) \cdot G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right.$$

$$+ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) \cdot G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \Big\} = 0, \quad (38)$$

$\xi \in [-1, 1]$, $m = 1, 2$, $j = 3 - m$.
 З крайової умови (10) маємо

$$G_{m1}(\eta) + \frac{\alpha_m(1 + \tilde{\kappa})}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} \cdot Y_{m2}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1], \quad m = 1, 2. \quad (39)$$

Контактне зусилля N_m між берегами m -ої тріщини визначимо з формули

$$\begin{aligned} \frac{hN_m(\xi)}{M_y^\infty} &= -\frac{2h^2\sigma_{y_m y_m}}{M_y^\infty} = \\ &= -2\text{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) \cdot G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ &\left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) \cdot G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \cdot \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\}, \quad \xi \in [-1, 1], \quad j = 3 - m, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Отже, для визначення невідомих функції $Y_m(\eta)$ і $G_m(\eta)$ отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь (25), (26), (35)–(39).

4. Числовий аналіз

Система сингулярних інтегральних рівнянь (25), (26), (35)–(39) розв'язана чисельно методом механічних квадратур [5]. Числовий аналіз був проведений для пластини з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$, $\gamma_j = h_j/h = 0.13$, $x_{0j} = 1 + \varepsilon_j$, $\varepsilon_j = d_j/R$, $j = 1, 2$, $l = l_1 = l_2$, $d_1 = d_2 = d$.

На рис. 2 зображено графік зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами першої тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\varepsilon = d/R = 1$, $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$, причому суцільними лініями позначене контактне зусилля для диску та двох тріщин, а штриховими — для диску і однієї тріщини. Криві 1 побудовані при $\lambda = l/R = 0.9$, криві 2 — при $\lambda = 0.5$, криві 3 — при $\lambda = 0.2$. З цього рисунка бачимо, що свого максимального значення контактне зусилля N^* набуває у дальній від диска вершині b ($\xi = 1$). При зменшенні λ контактне зусилля у вершинах a_1, a_2 ($\xi = -1$) зростає, а у вершинах b_1, b_2 ($\xi = 1$) спадає.

На рис. 3–4 показано графік коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ) $K_1 = K_1^*/(M_y^\infty \sqrt{l})$ у точках a_1, a_2 (рис. 3 а) та у точках b_1, b_2 (рис. 3 б), причому суцільні лінії отримані з урахуванням контакту берегів тріщин, а штрихові — без урахування контакту їх берегів.

Рис. 3 наведено при $\varepsilon = 1$, крива 1 отримана при $\rho = 0.63$, крива 2 — при $\rho = 1$, крива 3 — при $\rho = 3$. При $\rho < 0.63$ відбувається відставання берегів тріщин у вершинах a_1, a_2 . З рисунка бачимо, що КІМ у точках b_1, b_2 спадають із збільшенням λ , а у точках при спадають із ростом λ , в вже при спочатку зростають, а потім спадають. Рис. 3 наведено при $\varepsilon = 1$, крива 1 отримана при $\rho = 0.63$, крива 2 —

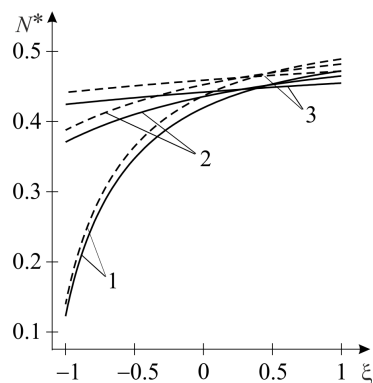


Рис. 2. Графік зведеного контактної зусилля при різних відносних довжинах тріщин $\lambda = l/R$

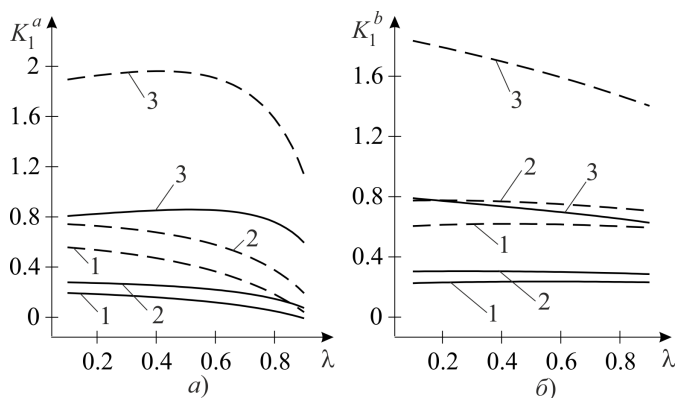


Рис. 3. Графік КІМ від відносних довжин тріщин λ при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

при $\rho = 1$, крива 3 — при $\rho = 3$. При $\rho < 0.63$ відбувається відставання берегів тріщин у вершинах a_1, a_2 . З рисунка бачимо, що КІМ у точках b_1, b_2 спадають із збільшенням λ , а у точках a_1, a_2 при $0.63 < \rho < 1.37$ спадають із ростом λ , вже при $\rho > 1.37$ спочатку зростають, а потім спадають.

Рис. 4 показано при $\lambda = l/R = 1$, крива 1 отримана при $\rho = 0.66$, крива 2 — при $\rho = 1$, крива 3 — при $\rho = 2$. При $\rho < 0.66$ відбувається відставання берегів тріщин у точках a_1, a_2 . Числовий аналіз показав, що при $0.66 < \rho < 1.3$ КІМ у точках a_1, a_2 і при $0.66 < \rho < 1.26$ у точках b_1, b_2 зростають із збільшенням відносної відстані ε тріщин від диску. Крім того, коли ε прямує до безмежності, тобто коли тріщини знаходяться далеко від диску, КІМ у точках a_1, a_2, b_1, b_2 прямують значення для випадку однієї ізольованої тріщини. З рис. 3–4 бачимо, що врахування контакту берегів тріщини призводить до зменшення КІМ, ніж без урахування контакту її берегів.

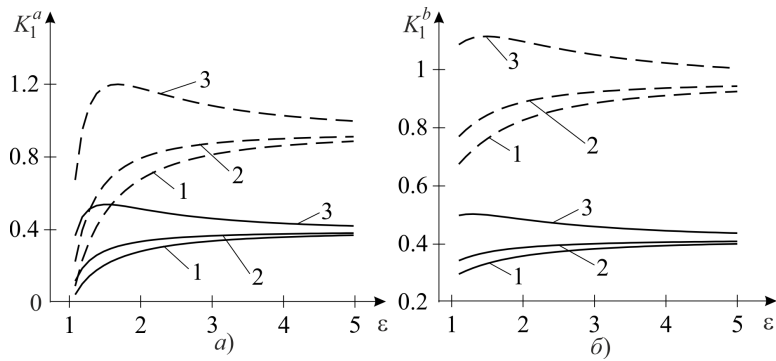


Рис. 4. Графік КІМ від відносної відстані ϵ тріщини до шайби при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

На рис. 5 зображено графік критичного моменту, при якому пластина почне руйнуватися [7],

$$\tilde{M} = \frac{M_y^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \left(k_1^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} K_1^2 \right)^{-1/2},$$

у точках a_1, a_2 (рис. 5а) та у точках b_1, b_2 (рис. 5б), γ_* — густина ефективною поверхневої енергії матеріалу.

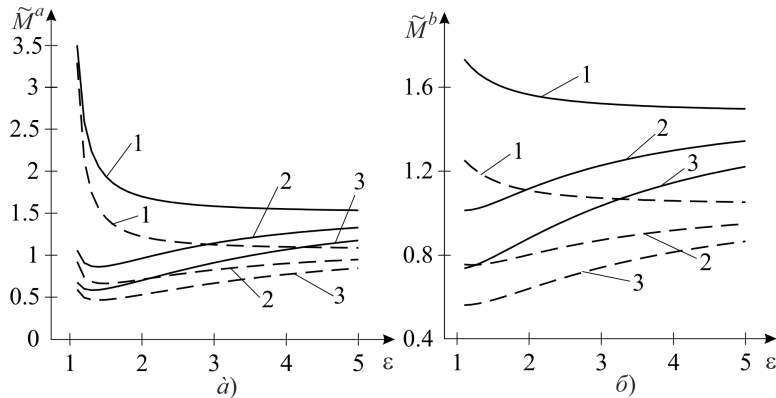


Рис. 5. Графічна залежність критичного моменту від відносної відстані ϵ тріщини до шайби при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

Штриховими лініями позначено криві, отримані без урахування контакту берегів тріщин, а суцільними — з урахуванням контакту їх берегів. Рис. 5 побудовано при $\lambda = l/R = 1$, крива 1 отримана при $\rho = 1$, крива 2 — при $\rho = 3$, крива 3 — при $\rho = 5$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Даляк Т., Перепічка В., Шацький І. *Періодичні задачі контакту берегів тріщин при згині пластин*// Машинознавство. – 2000. – № 4/5 (34/35). – С. 20-24.
2. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. *Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини*// Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: В 3-х т. / Під заг. ред. В.В. Панасюка. Львів: Каменяр. – 1999. – Т.1. – С. 72–74.
3. Кундрат М.М., Гук Н.А., Козакова Н.Л., Острик В.І., Слободян М.С. та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія. . – Львів: Видавець Вікторія Кундельська. – 2022. – 392 с.
4. Опанасович В.К. *Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь*// Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – №20(2). – С. 123–127.
5. Саврук М.П., Зеленьк В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: РАСТР. – 2009. – 212 с.
6. Слободян М.С., Звізло І.С., Білаш О.В., Смаль О.В. *Згин пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною всередині шайби за смугового контакту її берегів*// Computer Science and Applied Mathematics. – 2025. – V.1. – P. 48–54.
7. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термомпружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.
8. Харун І.В., Лобода В.В. *Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів*// Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – №45(2). – С. 103–113.
9. Шацький І.П. *Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами*// Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – С. 49–51.
10. Adlucky V.J., Loboda V.V. *Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack*// Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – V.270(1). – P. 76–86.
11. Serebnytska K.I., Martynyak R.M. *Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading*// Materials Science. – 2021. – V.57(2). – P. 173–179.
12. Shatskyi I., Dalyak T. *Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending*// Procedia Structural Integrity. – 2018. – V. 13. – P. 1476–1481.
13. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. *Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges*// Vibroengineering Procedia. – 2024. – V.55. – P. 54–59.
14. Young M., Sun C. *Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates*// International Journal of Fracture. – 1992. – V.55. – P. 81–93.

Стаття: надійшла до редколегії 05.05.2023
прийнята до друку 10.08.2025

**TWO-SIDED BENDING OF A PLATE WITH AN
ABSOLUTELY HARD DISK AND TWO RADIAL
CRACKS WITH STRIP CONTACT OF THEIR EDGES**

**Mykola SLOBODIAN, Andriy MELNYCHYN,
Bohdan SLOBODIAN**

*Ivan Franko National University of Lviv,
str. Universytetska, 1, Lviv, 79000
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, andriy.melnychyn@lnu.edu.ua,
bohdan.slobodian@lnu.edu.ua*

The problem of two-sided bending of an isotropic plate containing an absolutely rigid disk and two radial cracks is investigated with allowance for strip contact of the crack faces. Using the theory of functions of a complex variable and complex potentials, the solution of the problem is reduced to a system of singular integral equations. The resulting system is solved numerically by the method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the contact forces between the crack faces, as well as the stress and moment intensity factors, is carried out.

Key words: Crack, bending, disk, isotropic plate, contact, complex potentials, linear conjugation problems, contact force, intensity coefficients.