

УДК 539.3

## ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПРУЖНИМ ДИСКОМ, ПОСЛАБЛЕНИМ ТРІЩИНОЮ, ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ БЕРЕГІВ ТРІЩИНИ

Іван ЗВІЗЛО<sup>1</sup>, Роман СЕЛІВЕРСТОВ<sup>1</sup>, Оксана БІЛАШ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79007, Україна,  
e-mail: [ivan.zvizlo@lnu.edu.ua](mailto:ivan.zvizlo@lnu.edu.ua), [roman.seliverstov@lnu.edu.ua](mailto:roman.seliverstov@lnu.edu.ua)

<sup>2</sup>Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,  
вул. Героїв Майдану, 32, м. Львів, 79026, Україна,  
e-mail: [oksana.opanasovych@gmail.com](mailto:oksana.opanasovych@gmail.com)

У статті розв'язано задачу про згин безмежної ізотропної пластини з пружним диском з іншого матеріалу та довільно розташованою наскрізною прямолінійною тріщиною у диску. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а на межі диска та пластини виконуються умови ідеального механічного контакту. Припускається, що під дією рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності береги тріщини контактують по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщини. Розв'язок подано у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини на основі класичної теорії згину пластин та плоскої задачі. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі побудовано задачі лінійного спряження, які розв'язані аналітично. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі та стрибків кутів повороту у задачі згину на берегах тріщини. Система розв'язана методом механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі, побудовано графіки контактних зусиль і коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів при різних параметрах задачі.

*Ключові слова:* тріщина, згин, пружний диск, ізотропна пластина, контакт, комплексні потенціали, задачі лінійного спряження, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності.

## 1. Вступ

Пластинчасті конструктивні елементи можуть містити круглі включення, у яких під час експлуатації можуть утворюватися тріщини, що суттєво знижує допустиме навантаження на конструкцію. З фізичної точки зору очевидно, що за згину пластини береги тріщин контактуватимуть. Тому розробка методів оцінки напружено-деформованого стану пластин із тріщинами, береги яких контактують за згину, є важливою науково-технічною проблемою прикладної математики.

У працях [1–4] з використанням класичної теорії згину пластин досліджено напружено-деформований стан пластин із тріщинами при згині пластини у припущенні, що береги тріщини контактують по лінії вздовж усієї довжини тріщини на верхній поверхні пластини (лінійний контакт). Експериментальні дослідження контакту берегів тріщини при згині пластини проведено у роботі [5]. Аналітичний розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною, береги якої контактують по висоті пластини наведено у статтях [6, 7]. Напружено-деформований стан для задачі згину безмежної пластини з круглим отвором або абсолютно жорстким круглим включенням та прямолінійними тріщинами за смугового контакту їхніх берегів розглянуто у [8–10]. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з міжфазними тріщинами з зонами контакту проведено у роботах [11, 12]. Вплив контакту берегів термоізолюваної міжфазної тріщини на напружено-деформований стан при термо-механічному навантаженні досліджено у [13]. Тому задачі згину пластин з отворами, включеннями та тріщинами, береги яких контактують, є актуальними.

У цій статті досліджується задача про згин нескінченної ізотропної пластини з пружним круглим включенням-диском, послабленим прямолінійною наскрізною тріщиною, береги якої гладко контактують по області сталої ширини вздовж усієї довжини тріщини на верхній основі пластини.

## 2. Формулювання задачі.

Нехай безмежна ізотропна пластинка завтовшки  $2h$  містить пружний диск радіуса  $R$  та наскрізну прямолінійну тріщину завдовжки  $2l$  у ньому. Виберемо декартову систему координат  $Oxy$  у серединній площині пластини з початком у центрі диска. У цій площині введемо полярну систему координат  $(R, \theta)$  з полюсом у точці  $O$  та полярною віссю  $Ox$ . Центр тріщини розміщений у точці  $O_1$  з координатами  $(x_0, 0)$  на осі  $Ox$ . У точці  $O_1$  виберемо початок декартової системи координат  $O_1x_1y_1$ , яка буде пов'язана тріщиною, направивши вісь  $O_1x_1$  по ній, причому вісь  $O_1x_1$  утворює кут  $90^\circ$  з віссю  $Ox$  (див. рис. 1). На нескінченності пластинка згинається рівномірно розподіленими моментами  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$ . Через  $S^+(S_1)$  позначимо область всередині диска, а через  $S^-(S_2)$  — ззовні; через  $L_1$  — лінію, на якій розміщена тріщина, а через  $L$  — колову межу диска.

Тут і надалі індекс  $j$  набуває значень 1 і 2, де  $j = 1$  відповідає диску (область  $S_1$ ),  $j = 2$  — пластині (область  $S_2$ ).

Припустимо, що за такого навантаження береги тріщини контактуватимуть по області сталої ширини  $h_1$  на верхній основі пластини по всій довжині тріщини (смуговий контакт). Враховуючи це, розв'язок шукатимемо у вигляді розв'язків двох

взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини на основі теорії Кірхгофа-Лява та плоскої задачі.

На межі диска та пластини виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$P_{r1} = P_{r2}, M_{r1} = M_{r2}, w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r} \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}, u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)} \text{ на } L, \quad (2)$$

де  $P_{rj}$  — узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила,  $M_{rj}$  — згинальний момент,  $w_j$  — прогин  $j$ -ої частини;  $\sigma_{rr}^{(j)}$  і  $\sigma_{r\theta}^{(j)}$  — компоненти тензора напружень,  $u_{rP}^{(j)}$  і  $u_{\theta P}^{(j)}$  — компоненти вектора переміщень у плоскій задачі в полярній системі координат  $(r, \theta)$ .

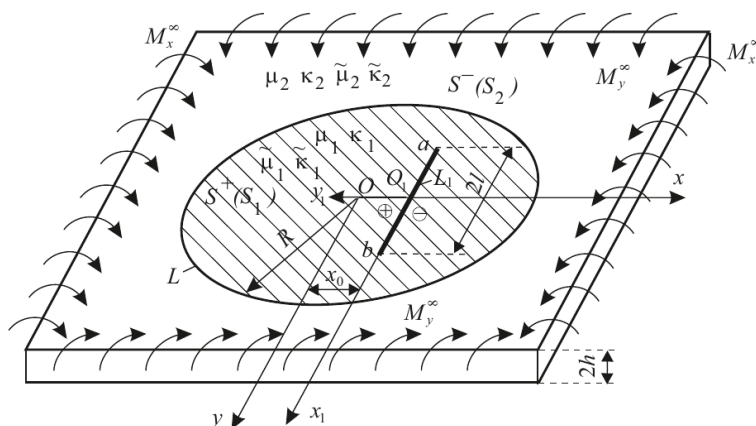


Рис. 1. Безмежна пластина з пружною шайбою та тріщиною у ній.

Крайові умови смугового контакту берегів тріщини [7]:

$$P^{\pm} = 0, M_{y1}^{\pm} = \delta h N_1, \tau_{Px_1y_1}^{\pm} = 0, \sigma_{Py_1y_1}^{\pm} = -\frac{N_1}{2h}, \delta = 1 - \frac{\gamma}{3}, x_1 \in L_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial[v_{\Pi}]}{\partial x_1} + \alpha h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1} \right] = 0, \alpha = \frac{1}{2} (1 + (1 - \gamma)^2), \gamma = \frac{h_1}{h}, x_1 \in L_1, \quad (4)$$

де  $N_1$  — контактне зусилля між берегами тріщини,  $h_1$  — висота області контакту берегів тріщини,  $w$  — прогин пластини,  $\sigma_{Py_1y_1}$  і  $\tau_{Px_1y_1}$  — компоненти тензора напружень у декартовій системі координат,  $v_{\Pi}$  — компонента вектора переміщень;  $[f] = f^+ - f^-$ , знаками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини при  $y_1 \rightarrow \pm 0$ .

### 3. Розв'язок задачі.

З використанням теорії функцій комплексної змінної, комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину пластини [9, 14], задовольняючи крайові умови (1)–(4),

розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, розв'язавши які, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень  $g'_1(t)$  та стрибків кутів повороту  $Q_1(t)$  на берегах тріщини, яка набуде вигляду

$$\int_{L_1} \left( L(t, x_1)g'_1(t) + L^{(1)}(t, x_1)\text{Re}(g'_1(t)) + M(t, x_1)\overline{g'_1(t)} \right) dt = N(x_1), \quad x_1 \in L_1, \quad (5)$$

$$\int_{L_1} \left( R(t, x_1)Q_1(t) + \tilde{L}^{(1)}(t, x_1)\text{Re}Q_1(t) + S(t, x_1)\overline{Q_1(t)} \right) dt + H(x_1) = M_{y_1}(x_1), \quad x_1 \in L_1, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} L(t, x_1) &= -\frac{h \cdot i}{\pi} \left\{ \left( 1 - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right) \cdot \frac{A_4}{T} + \frac{1}{T-X} - \frac{1}{\bar{T}-\bar{X}} - \frac{A_3 R^2}{\bar{X}^2} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{X}T - R^2} - \right. \\ &\quad \left. - A_4 \cdot \left( \frac{\bar{T}}{\bar{X}\bar{T} - R^2} + \left( 1 - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right) \left( \frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{R^2}{(\bar{X}T - R^2)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \cdot \left( \frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \cdot \frac{2R^2 T}{(\bar{X}T - R^2)^3} \right) \right\}, \\ L^{(1)}(t, x_1) &= -\frac{2A_4 h t}{\pi R^2 (1 - A_4)} \left( 2A_4 - (A_4 - 1) \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right), \\ M(t, x_1) &= -\frac{h \cdot i}{\pi} \left\{ \frac{A_4}{T} + \frac{1}{T-X} - \frac{T-X}{(\bar{T}-\bar{X})^2} - A_4 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \left( \frac{R^2}{\bar{T}} - T \right) \frac{R^2}{\bar{X}\bar{T} - R^2} + \left( 1 - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \right) \frac{T}{\bar{X}T - R^2} + \left( X - \frac{R^2}{\bar{X}} \right) \frac{T_k^2}{(\bar{X}T - R^2)^2} \right) \right\}, \\ R(t, x_1) &= -\frac{i}{2\pi\tilde{\mu}_1^*} \left\{ -\tilde{\kappa}_1^* \left( \frac{1}{T-X} - \frac{\tilde{\kappa}_1^*(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)\bar{T}}{\tilde{A}_1(\bar{X}\bar{T} - R^2)} \right) - \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left( \frac{1}{T} - \left( \frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{R^2}{(\bar{T}\bar{X} - R^2)^2} \right) + \frac{2(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)R^2 T X}{\tilde{A}_1(\bar{T}\bar{X} - R^2)^3} \left( \frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \left\{ \frac{(\tilde{\mu}_1\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2\tilde{\kappa}_1)\bar{X}}{\tilde{A}_2(\bar{T}\bar{X} - R^2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{A}_1} \left( \frac{R^2(2\bar{T}\bar{X} - R^2)}{(\bar{T}\bar{X} - R^2)^3} \left( \frac{R^2}{T} - \bar{T} \right) - \frac{1}{T} \right) - \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{\bar{T} - \bar{X}} \right\} \right\}, \\ S(t, x_1) &= -\frac{\tilde{\kappa}_1^* \cdot i}{2\pi\tilde{\mu}_1^*} \left\{ \frac{\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1}{\tilde{A}_1} \left( \frac{R^2}{(\bar{T}\bar{X} - R^2)^2} \left( \frac{R^2}{\bar{T}} - T \right) - \frac{1}{\bar{T}} \right) + \frac{1}{\tilde{\kappa}_1^*(\bar{T} - \bar{X})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)T}{\tilde{A}_1(\bar{T}\bar{X} - R^2)} + \frac{T}{(\bar{T} - \bar{X})^2} + \frac{(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)R^2}{\tilde{A}_1\bar{X}^2} \left( \frac{T\bar{X}}{\bar{T}\bar{X} - R^2} + 1 \right) \cdot \frac{\tilde{\kappa}_1^*}{\bar{T}\bar{X} - R^2} + \right. \\ &\quad \left. + X \left( \frac{1}{(\bar{T} - X)^2} + \frac{\tilde{\kappa}_1^*(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)T^2}{\tilde{A}_1(\bar{T}\bar{X} - R^2)^2} \right) \right\}, \\ \tilde{L}^{(1)}(t, x_1) &= \frac{t}{2\pi\tilde{\mu}_1^* R^2} \left\{ \tilde{D}_{31}(1 - \tilde{\kappa}_1^*) - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \tilde{D}_{51} \right\}, \\ H(x_1) &= \frac{1}{\tilde{\mu}_1^*} \left\{ \Gamma_2 \left( \tilde{B}_{51}(1 - \tilde{\kappa}_1^*) - \frac{R^2}{\bar{X}^2} \tilde{B}_{91} \right) + \Gamma'_2 \tilde{B}_{61} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad A_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad \tilde{A}_3 = (\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1)/A_2, \quad \tilde{A}_4 = (\mu_2 - \mu_1)/\tilde{A}_1, \\
 \tilde{A}_1 &= \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2, \quad \tilde{A}_4 = (\mu_2 - \mu_1)/\tilde{A}_1, \quad \tilde{A}_5 = \mu_2(1 + \tilde{\kappa}_1)/\tilde{A}_1, \\
 \tilde{B}_3 &= \frac{\tilde{A}_3/\tilde{g} - 1}{1 - \tilde{A}_4}, \quad \tilde{B}_4 = \frac{\tilde{A}_4(1 - \tilde{\kappa}_1^*)}{1 - \tilde{A}_4}, \quad \tilde{B}_5 = \frac{\tilde{A}_4(1 + \tilde{\kappa}_1^*)}{1 + \tilde{A}_4}, \quad \tilde{g} = -\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}, \quad \tilde{B}_{21} = \frac{\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1}{A_1}, \\
 \tilde{B}_{31} &= \tilde{\mu}_1(1 + \tilde{\kappa}_2)/A_1, \quad \tilde{B}_{41} = \tilde{\mu}_1(1 + \tilde{\kappa}_2)/\tilde{A}_1, \quad \tilde{B}_{51} = \tilde{B}_{31} + \tilde{B}_{21}\tilde{B}_3, \quad \tilde{D}_{31} = \tilde{B}_{21}\tilde{B}_4, \\
 \tilde{B}_{61} &= \tilde{\mu}_1(1 + \tilde{\kappa}_2)/\tilde{A}_2, \quad \tilde{B}_{71} = (\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2)/\tilde{A}_2, \quad \tilde{B}_{91} = \tilde{B}_{51} - \tilde{B}_{71}\tilde{B}_3, \quad \tilde{\mu}_j^* = \tilde{\mu}_j, \\
 \tilde{D}_{51} &= B_3(\tilde{B}_{21} - \tilde{B}_{71}) + \tilde{B}_{41}, \quad X = x_0 + x_1 \cdot i, \quad T = x_0 + t \cdot i, \quad \kappa_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}, \\
 \Gamma_2 &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D_2(1 + \nu_2)}, \quad \Gamma_2' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2D_2(1 - \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{2E_2 h^3}{3(1 - \nu_2^2)}, \quad \tilde{\kappa}_j^* = \tilde{\kappa}_j = \frac{3 + \nu_j}{1 - \nu_j}, \\
 Q_1(t) &= Q_{11}(t) + iQ_{12}(t) = -\frac{i}{1 + \tilde{\kappa}_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial w}{\partial x_1} + i \frac{\partial w}{\partial y_1} \right], \\
 g_1'(t) &= g_{11}'(t) + ig_{12}'(t) = \frac{2\mu_1}{i(1 + \kappa_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \left[ u_P^{(1)} \right] + i \left[ v_P^{(1)} \right] \right),
 \end{aligned}$$

$Q_{11}(t)$ ,  $Q_{12}(t)$ ,  $g_{11}'(t)$ ,  $g_{12}'(t)$  — невідомі дійсні функції,  $\mu_j = E_j/(2(1 + \nu_j))$ ,  $E_j$  і  $\nu_j$  — відповідно модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для  $j$ -ї області.

З крайової умови (4) матимемо

$$g_{11}'(x_1) + \frac{1 + \tilde{\kappa}_1}{(1 + \kappa_1)(1 + \nu_1)} Q_{11}(x_1) = 0, \quad x_1 \in [-l, l]. \quad (7)$$

Зазначимо, що мають виконуватися умови однозначності прогину і кутів повороту нормалі до серединної поверхні при обході контуру тріщини, які набувають вигляду

$$\int_{L_1} Q_1(t) = 0, \quad \int_{L_1} t \operatorname{Im} Q_1(t) dt = 0. \quad (8)$$

Таким чином, невідомі функції  $g_1'(t)$  і  $Q_1(t)$  можуть бути визначені з системи сингулярних інтегральних рівнянь (5)–(8), яку будемо розв'язувати чисельно методом механічних квадратур [14, 15].

#### 4. Числовий аналіз.

На рис. 2–4 наведені графічні залежності приведенного контактного зусилля  $N^* = hN/M_y^\infty$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $\xi = x_1/l$  при  $\gamma = h_1/h = 0.13$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$ .

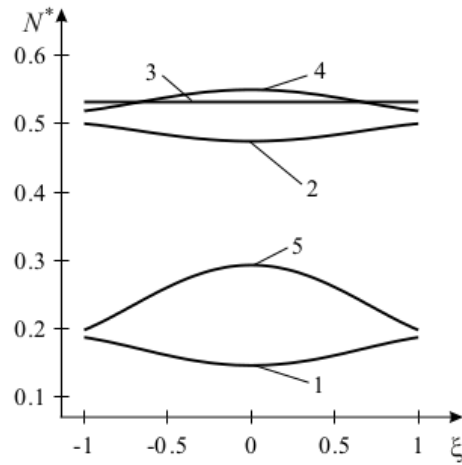


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактної зусилля між берегами тріщини  $N^*$  від  $\xi$  при різних значеннях  $\beta = \lg(E_1/E_2)$ .

Рис. 2 демонструє графічну залежність  $N^*(\xi)$  при  $X_0 = x_0/l = 1.5$ ,  $\lambda = R/l = 3$ . Крива 1 отримана при  $\beta = \lg(E_1/E_2) = -1$ , крива 2 — при  $\beta = -0.2$ , крива 3 — при  $\beta = -0$ , крива 4 — при  $\beta = 0.2$ , крива 5 — при  $\beta = 1$ . Бачимо, що при  $\beta > 0$  контактне зусилля набуває максимального значення посередині тріщини ( $\xi = 0$ ), а при  $\beta < 0$  — на кінцях тріщини ( $\xi = \pm 1$ ).

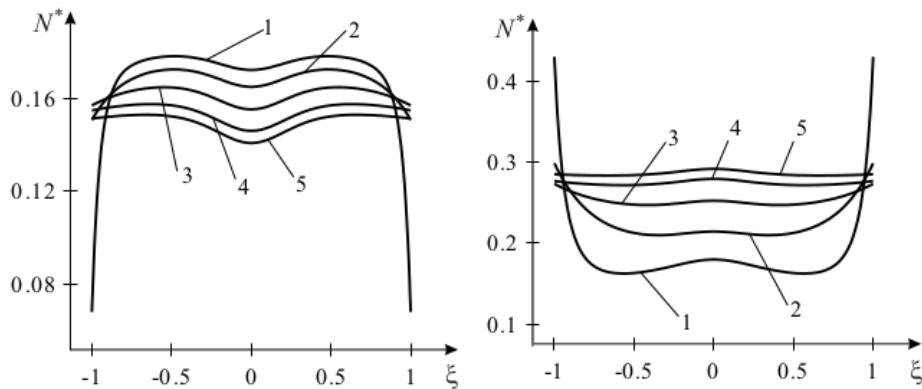


Рис. 3. Графічна залежність зведеного контактної зусилля між берегами тріщини  $N^*$  від  $\xi$  при різних значеннях  $\lambda = R/l$ .

На рис. 3 зображено графічну залежність  $N^*(\xi)$  при  $X_0 = x_0/l = 0.5$ ,  $\beta = -1$  (ліворуч) та  $\beta = 1$  (праворуч). Крива 1 отримана при  $\lambda = 1.2$ , крива 2 — при  $\lambda = 1.5$ , крива 3 — при  $\lambda = 2$ , крива 4 — при  $\lambda = 3$ , крива 5 — при  $\lambda = 5$ . При  $\beta = -1$

максимальне значення контактного зусилля зменшується зі збільшенням відносного радіуса кругової межі  $\lambda = R/l$ .

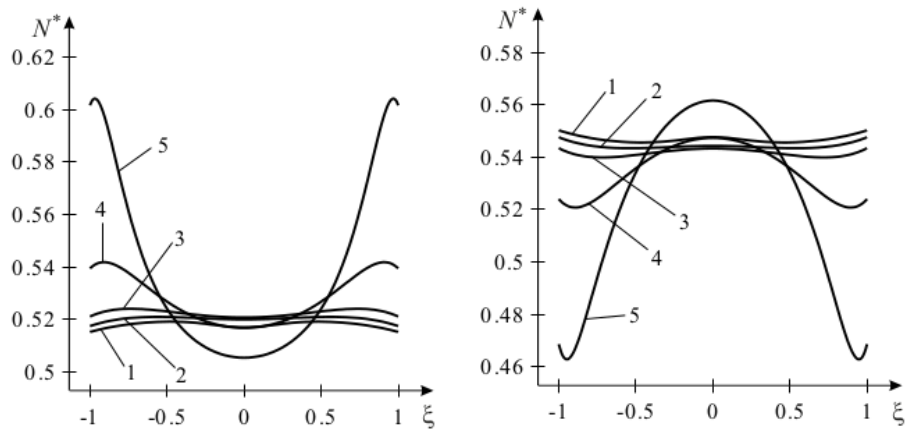


Рис. 4. Графічна залежність зведеного контактної зусилля між берегами тріщини  $N^*$  від  $\xi$  при різних значеннях  $X_0 = x_0/l$ .

На рис. 4 подано графічну залежність  $N^*(\xi)$  при  $\lambda = 2$ ,  $\beta = -0.1$  (ліворуч) та  $\beta = 0.1$  (праворуч). Крива 1 отримана при  $X_0 = x_0/l = 0.5$ , крива 2 — при  $X_0 = 0.8$ , крива 3 — при  $X_0 = 1$ , крива 4 — при  $X_0 = 1.3$ , крива 5 — при  $X_0 = 1.5$ . При  $\beta = -0.1$  величина контактної зусилля на кінцях тріщини збільшується, а при  $\beta = 0.1$  — зменшується.

Рис. 5 демонструє графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль від  $X_0$  при  $\lambda = 2$ . Криві 1 побудовані при  $\beta = -2$ , криві 2 — при  $\beta = -1$ , криві 3 — при  $\beta = -0.1$ , криві 4 — при  $\beta = 0$ , криві 5 — при  $\beta = 0.1$ , криві 6 — при  $\beta = 1$ , криві 7 — при  $\beta = 2$ . Для від'ємних значень  $\beta$  коефіцієнт інтенсивності моментів  $K_1$  збільшується при наближенні тріщини до межі шайби і пластини, а для додатніх — зменшується при зростанні  $X_0$ . При  $\beta = 0$  отримуємо випадок згину однорідної пластини з однією прямолінійною тріщиною. Коефіцієнт інтенсивності зусиль  $k_2$  при додатніх  $\beta$  додатній, а при від'ємних — від'ємний.

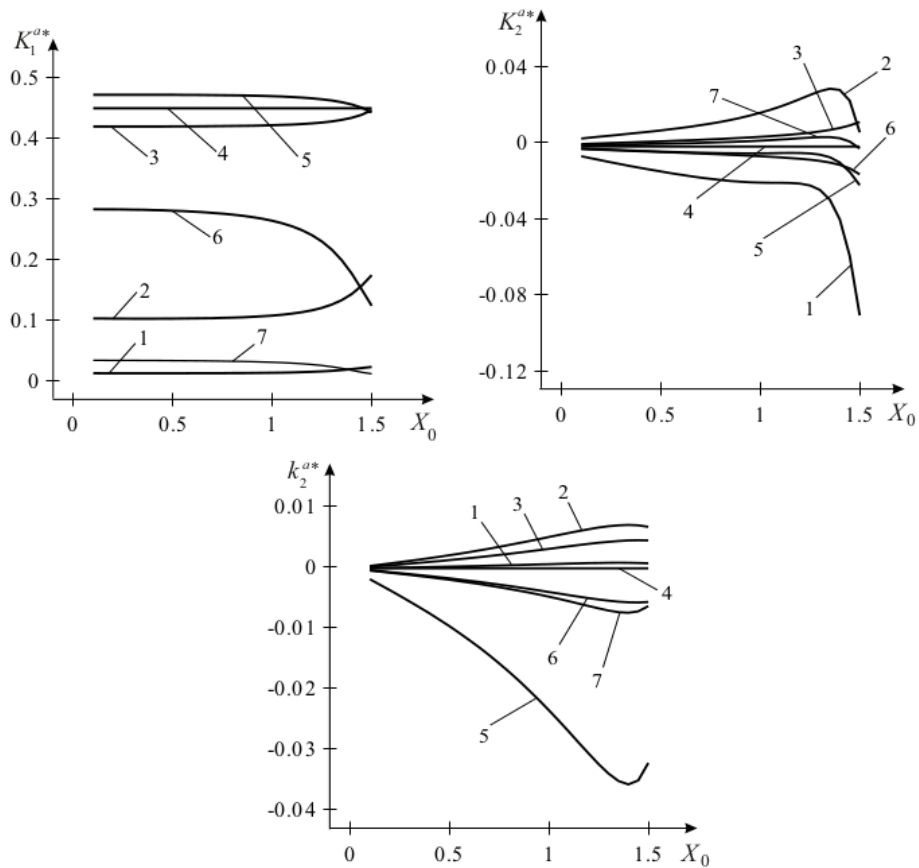


Рис. 5. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль від  $X_0$  при різних значеннях  $\beta = \lg(E_1/E_2)$ .

На рис. 6 подано графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності моментів  $K_1$ ,  $K_2$  і зусиль  $k_2$  від  $\lambda$  при  $X_0 = 0.5$ . Відповідність кривих 1–7 значенням  $\beta$  така ж, як і для рис. 5. Для від'ємних значень  $\beta$   $K_1$  і  $k_2$  збільшуються при наближенні тріщини до межі шайби і пластини, а  $K_2$  — зменшується. Для додатніх  $\beta$   $K_1$  і  $k_2$  зменшуються при зростанні  $X_0$ , а  $K_2$  — збільшується.

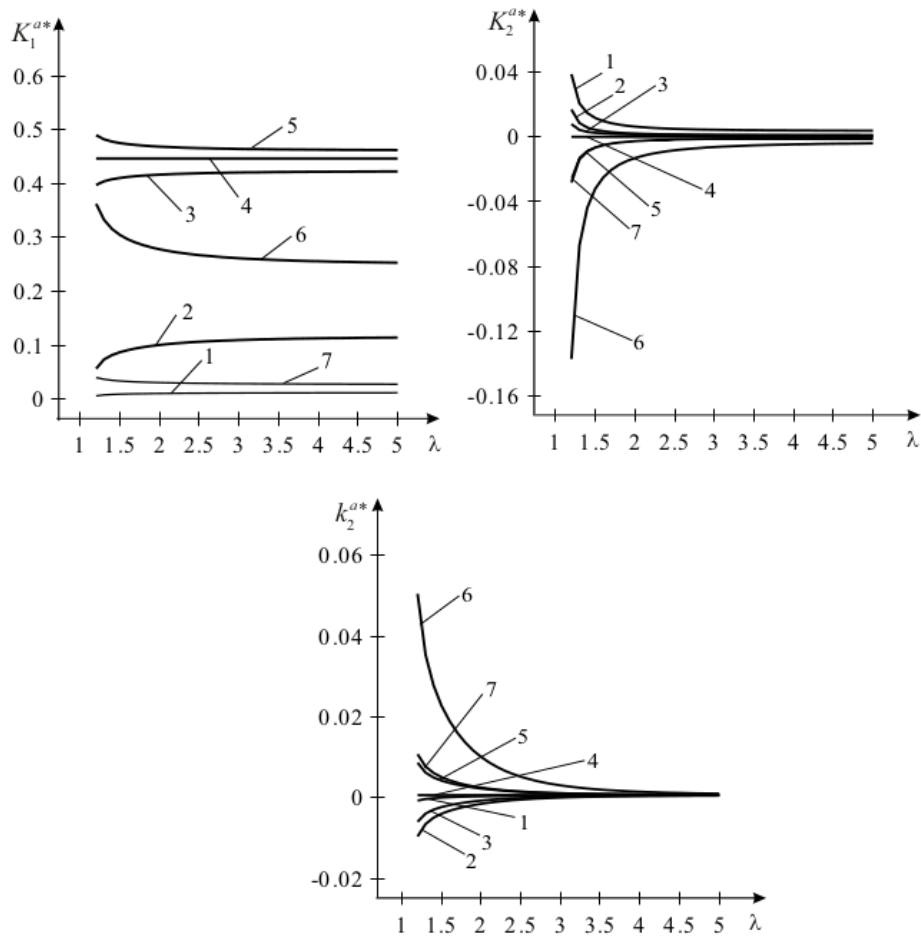


Рис. 6. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль від  $\lambda$  при різних значеннях  $\beta = \lg(E_1/E_2)$ .

На рис. 7 наведено графічні залежності коефіцієнтів інтенсивності від  $\beta$  при  $\lambda = 2$ . Криві 1 побудовані при  $X_0 = 0.1$ , криві 2 — при  $X_0 = 0.5$ , криві 3 — при  $X_0 = 1$ , криві 4 — при  $X_0 = 1.3$ , криві 5 — при  $X_0 = 1.5$ . Бачимо, що  $K_1$  набуває максимального значення при  $0 < \beta < 0.5$ . При зростанні  $X_0$  мінімальне значення  $K_2$  зменшується.

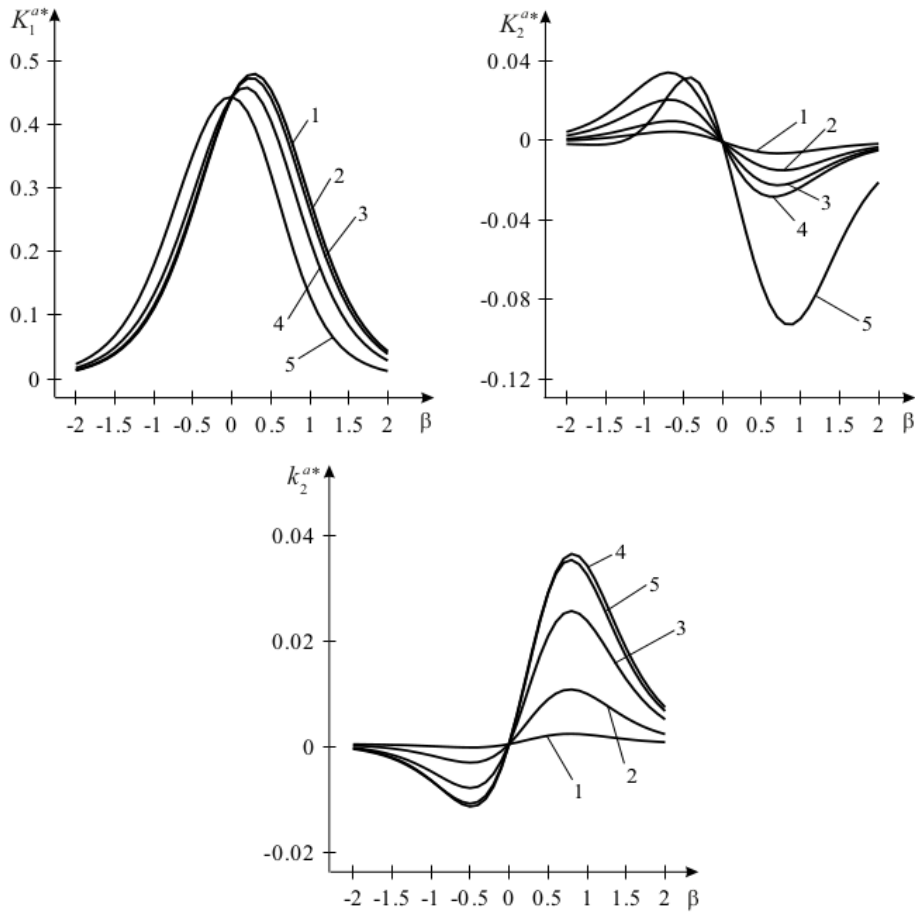


Рис. 7. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль від  $\beta = \lg(E_1/E_2)$  при різних значеннях  $X_0$

### 5. Висновки.

У цій статті вперше розв'язано задачу згину безмежної пластини з пружним включенням-диском та довільно розташованою прямолінійною тріщиною у цьому включенні за смугового контакту берегів тріщини. Досліджено вплив модулів пружності матеріалів пластини та включення на контактне зусилля між берегами тріщини та коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів у вершинах тріщини.

Якщо модулі пружності матеріалу пластини та включення будуть однакові ( $\beta = 0$ ), тоді отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за смугового контакту її берегів у пластині [6,7], а при  $\beta = \gamma = 0$  отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини за лінійного контакту її берегів [1,2]. Числовий аналіз показав, що безрозмірені коефіцієнти інтенсивності зусиль  $k_1^* = k_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$  і моментів  $K_1^* = K_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$

пов'язані між собою залежністю  $k_1^*/K_1^* = 3\alpha(1 + \nu_1)/(3 + \nu_1)$ , тому графічні залежності для коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $k_1^*$  не наведені.

У подальших наукових працях планується дослідити напружено-деформований стан пластини з пружним включенням та системою наскрізних прямолінійних тріщин, які розміщені як у пластині, так і у пружному включенні, за смугового контакту їхніх берегів. На основі енергетичного критерію руйнування планується визначити величину максимального згинного навантаження, яке може бути прикладене до такої пластини.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шацький І.П. *Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами*// Доповіди Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – Т.7. – С. 49–51.
2. Young M., Sun C. *Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates*// International Journal of Fracture. – 1992. – V.55. – 81–93.
3. Shatskyi I., Dalyak T. *Interaction of contact cracks and narrow slits in plate bending*// Procedia Structural Integrity. – 2018,. – V.13. – P. 1476–1481.
4. Dalyak T.M., Shatskyi I.P. *Interference of closable cracks and narrow slits in an elastic plate under bending*// Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2020. – V.14, no.2. – P. 51–68.
5. Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А. *Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини*// Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: В 3-х т. / Під заг. ред. В.В. Панасюка. Львів: Каменяр. – 1999. – Т.1. – С. 72–74.
6. Dempsey J.P., Shekman I.I., Slepyan L.L. *Closure of a through crack in a plate under bending*// International Journal of Solids and Structures. – 1935. – V.35. – P. 4077–4089.
7. Опанасович В.К. *Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь*// Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип.20(2). – С. 123–127.
8. Слободян М.С., Кузь І.С., Білаш О.В., Шайнога М.І. *Згин із розтягом пластини з отвором та системою тріщин за смугового контакту їхніх берегів*// Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2020. – Т.1. – С. 77–85.
9. Кундрат М.М., Гук Н.А., Козакова Н.Л., Острик В.І., Слободян М.С. та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
10. Slobodian M., Zvizlo I., Bilash O., Sorokatyi M., Petruchenko O., Markevych L. *Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges*// Vibroengineering Procedia. – 2024. – V.55. – P. 54–59.
11. Adlucky V.J., Loboda V.V. *Finite-element analysis of the elastoplastic state of a plane with elliptic inclusion in the presence of interface crack*// Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – V.270, no.1. – P. 76–86.
12. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. *A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric biomaterial*// Mechanics and Physics of Structured Media: Asymptotic and Integral Equations Methods of Leonid Filshinsky. – 2022. – P. 253–269.

13. Serednytska K.I., Martynyak R.M. *Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading*// Materials Science. – 2021. – V.57, no.2. – P. 173–179.
14. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007, 716 с.
15. Саврук М.П., Зеленьк В.М. Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. Львів: РАСТР, 2009, 212 с.

*Стаття: надійшла до редколегії 04.07.2024*

*прийнята до друку 01.09.2025*

**BENDING OF A PLATE WITH AN ELASTIC DISK WEAKENED  
BY A CRACK UNDER STRIP CONTACT OF THE CRACK  
FACES****Ivan ZVIZLO<sup>1</sup>, Roman SELIVERSTOV<sup>1</sup>, Oksana BILASH<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ivan Franko National University of Lviv,  
1 Universytetska Street, Lviv, 79007, Ukraine  
e-mail: ivan.zvizlo@lnu.edu.ua, roman.seliverstov@lnu.edu.ua*

<sup>2</sup>*Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy,  
32 Heroes of Maidan Street, Lviv, 79026, Ukraine,  
e-mail: oksana.opanasovych@gmail.com*

The article addresses the problem of bending of an infinite isotropic plate containing an elastic solid disk made of a different material and having an arbitrarily located through rectilinear crack within the disk. The crack faces are free of external loads, and ideal mechanical contact conditions are assumed at the interface between the disk and the plate. It is further assumed that, under uniformly distributed bending moments applied at infinity, the crack faces come into contact over a region of constant width (strip contact) on the upper surface of the plate along the entire crack length. The solution is obtained by reducing the original formulation to two interrelated problems: the plate-bending problem based on the classical plate theory and the corresponding plane elasticity problem. Using the methods of the theory of functions of a complex variable and the Kolosov–Muskhelishvili complex potentials, linear conjugation problems are formulated and solved analytically. A system of singular integral equations is derived for the displacement jumps in the plane problem and for the rotation-angle jumps in the bending problem along the crack faces. The system is solved using the method of mechanical quadratures. Numerical analysis is performed, and plots of the contact forces as well as the intensity factors of forces and moments are presented for various parameters.

*Key words:* crack, bend, elastic disk, isotropic plate, contact, complex potentials, linear conjugation problems, contact force, intensity coefficients.