ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2025. Випуск 97. С. 114–119
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2025. Issue 97. P. 114–119
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.114-119

УДК 519.217

СУМІШ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЇ В НЕЛІНІЙНІЙ АПРОКСИМАЦІЇ

Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська,1 м. Львів, 79000
e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua

Дана робота присвячена дослідженню суміші напівмарковських випадкових еволюцій. Розглядаються два напівмарковські випадкові процеси в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ з нелінійним множником нормування $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для даного процесу побудовано матричнозначні випадкові еволюції. Знайдено границю умовного математичного сподівання випадкової еволюції для суміші напівмарковських процесів.

Ключові слова: напівмарковський процес, випадкова еволюція, суміш, багатовимірне рівняння відновлення, нелінійний множник нормування, процес Маркова.

Розглянемо напівмарковські процеси $x_1(\frac{t}{g(\varepsilon)})$ та $x_2(\frac{t}{g(\varepsilon)})$, $t > 0$, де $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ з нелінійним множником нормування $g(\varepsilon)$. [1]

Нехай процес $x_1(\frac{t}{g(\varepsilon)})$ протікає з імовірністю p_1, а процес $x_2(\frac{t}{g(\varepsilon)})$ з імовірністю p_2, де $p_1 + p_2 = 1$. Тоді побудуємо випадковий процес, який буде сумішшю даних напівмарковських процесів

$$x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = p_1\, x_1\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2\, x_2\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Нехай $E = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множина станів, а τ — момент першого стрибка. Тоді цей процес задається напівмарковською матрицею

$$F^{\varepsilon}_{ij}(t) = \mathbb{P}\left\{ x(\tau) = j,\ \tau \le \frac{t}{g(\varepsilon)} \;\middle|\; x(0) = i \right\}, \qquad i, j \in E,\ t \ge 0.$$

Функція $F^{\varepsilon}_{ij}(t)$ — неспадна, причому $F^{\varepsilon}_{ij}(0) = 0$ та $F^{\varepsilon}_{ij}(\infty) = 1$.

Нехай виконуються наступні умови

2020 Mathematics Subject Classification: 60J25

1. Існує границя

$$F_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

2. Середній час перебування в кожному зі станів рівномірно інтегровний:

$$\sup_{\varepsilon} \int_T^{\infty} t\, F_i^{\varepsilon}(dt) \;\longrightarrow\; 0, \qquad T \to \infty,$$

де $F_i(t)$ — неґратчасті функції розподілу моменту першого стрибка.

3. Ланцюг Маркова, вкладений у граничний процес $x(t)$, є розкладним.

Побудуємо сім'ю випадкових матричнозначних еволюцій [4]

$$N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \begin{cases} \Gamma_{x_0}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) & 0 \leqslant \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_1 \\ \Gamma_{x_0}(\tau_1)\cdot\Lambda_{x_1}(g(\varepsilon))\cdot\Gamma_{x_1}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - \tau_1\right) & \tau_1 \leqslant \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_{x_0}(\tau_1)\cdot\Lambda_{x_1}(g(\varepsilon))\cdot\Gamma_{x_1}(\tau_2-\tau_1)\cdot\ldots\cdot & \\ \Lambda_{x_n}(g(\varepsilon))\cdot\Gamma_{x_n}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - \tau_n\right) & \tau_n \leqslant \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_{n+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

В заданій еволюції $\{\Gamma_{x_t}(\frac{t}{g(\varepsilon)}) \mid x_t \in E, t \geqslant 0\}$ — сім'я рівномірно неперервних напівгруп додатних стисних операторів в $\mathbb{R}^d$. Ці оператори визначають неперервну складову випадкових еволюцій напівмарковського процесу $x(\frac{t}{g(\varepsilon)})$ на проміжках сталості $[\tau_n; \tau_{n+1})$. Стрибки випадкової еволюції визначаються лінійними стисними операторами $\{\Lambda_{x_t}(g(\varepsilon)) \mid x_t \in E\}$ в моменти відновлення τ_n.

Нехай виконуються такі умови:

1. Існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda(g(\varepsilon)) = I$$

за нормою оператора для кожного $i \in E$;

2. Існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Gamma_i\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \Gamma_i(t)$$

за нормою оператора для кожного $i \in E$;

3. Існує інтеграл

$$\int_0^{\infty} (\Gamma_i(u) - I)\, F_i(du)\cdot \overline{1} = \overrightarrow{0}$$

для кожного $i \in E$;

4. Для кожного $i, j \in E$

$$\sum_{i\in E} p_i^{(s)} \cdot \overrightarrow{1} \cdot \int_0^{\infty} (\Gamma_i(u) - I)\, F_{ij}(du) = \overrightarrow{0}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–4 та існує нормуючий множник $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ і ненульова матриця C, суміш напівмарковських процесів*

$$x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = p_1 \cdot x_1\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot x_2\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$$

Тоді існує границя умовного математичного сподівання

$$E\left\{N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \mid x(0) = i\right\} \to c_{sk}(t) \cdot \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} \cdot [\overrightarrow{1} \otimes \overrightarrow{1}] \cdot E_j\left\{\int_0^\tau \Gamma_j(u)du\right\},$$

де $c_{sk} = \left[e^{tC}\right]_{sk}$,

$$\pi^{(k)} = \sum_{i,j \in E_k} p_i^{(k)} \cdot \left(\overrightarrow{1} \cdot \int_0^\infty t\Gamma_i(t)F_{ij}(dt), \overrightarrow{1}\right).$$

Доведення. Позначимо

$$E_i(N(t), x(t) = j) = E(N(t), x(t) = j \mid x(0) = i).$$

За формулою повної ймовірності

$$E_i(N(t), x(t) = j) = E_i(N(t), x(t) = j, t < \tau) + \int_0^\tau E_i(N(t), x(t) = j, \tau \in du),$$

де τ — момент першого стрибка напівмарковського процесу $x(t)$.

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^t E_i(N(t), x(t) = j, \tau \in du) = \sum_{l=1}^{d} \int_0^t E_i(N(t), x(t) = j, x(\tau) = l, \tau \in du) =$$

$$= \sum_{l=1}^{d} \int_0^t P_i(x(\tau) = l, \tau \in du) \cdot E_i(N(t), x(t) = j \mid x(u) = l, \tau = u) =$$

$$= \sum_{l=1}^{d} \int_0^t F_{il}(du)\Gamma_i(u)\Lambda_l E_l(N(t-u), x(t-u) = j).$$

Отже, $E_i(N(t), x(t) = j)$ є розв'язком багатовимірного рівняння відновлення

$$X_{ij}(t) = A_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{m} K_{il} \cdot X_{ij}(t),$$

де

$$X_{ij}(t) = E_i(N(t), x(t) = j),$$
$$A_{ij}(t) = E_i(N(t), x(t) = j, t < \tau) = a_{ij}\Gamma_i(t)P_i(t < \tau),$$
$$K_{ij}(dt) = E_i(N(t), x(\tau) = j, \tau \in dt) = F_{ij}(dt)\Gamma_i(t)\Lambda_j.$$

Величини $X_{ij}(t), A_{ij}(t), K_{ij}(t)$ — матриці розмірності $d \times d$. Розглянемо функції $A_{ij}(\frac{t}{g(\varepsilon)})$. Тоді

$$\left\|A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\| \leqslant P_i\left\{\frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau\right\} = 1 - P_i\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Оцінимо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leqslant t \leqslant k+1} \left\| A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - F\left(\frac{k}{g(\varepsilon)}\right)\right) \leqslant \int_0^{\infty}\left(1 - F\left(\frac{k}{g(\varepsilon)}\right)\right) dt < \infty.$$

Отже, при $g(\varepsilon) \to 0$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leqslant t \leqslant k+1} \left\| A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\|$$

рівномірно збігається за ε. Далі потрібно довести, що сім'я функцій $A_{ij}(\frac{t}{g(\varepsilon)})$ рівномірно безпосередньо інтегровна за Ріманом. Розглянемо таку оцінку

$$\sup_{kh \leqslant t \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\| - \inf_{kh \leqslant t \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{kh \leqslant t \leqslant u \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) - A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\|.$$

Позначимо

$$w(h) = \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leqslant u-t \leqslant h} \left\| A_{ij}\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) - A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\|.$$

Тоді

$$w(h) = \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leqslant u-t \leqslant h} \left\| \Gamma_i\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) \cdot P_{ij}\{t < \tau\}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leqslant u-t \leqslant h} \left\| \Gamma_i\left(\frac{u}{g(\varepsilon)} - \frac{t}{g(\varepsilon)} - I\right)\right\| \cdot P_{ij}\{t < \tau\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varepsilon} \left\| \Gamma_i\left(\frac{h}{g(\varepsilon)} - I\right)\right\| \to 0$$

при $h \to 0$. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо наступну різницю

$$\sup_{\varepsilon}\left(h \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{kh \leqslant t \leqslant u \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) - A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\|\right) =$$
$$= \sup_{\varepsilon}\left(h \cdot \left(\sum_{k=0}^{[\frac{T}{h}]} \sup_{kh \leqslant t \leqslant u \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) - A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{[\frac{T}{h}]}^{\infty} \sup_{kh \leqslant t \leqslant u \leqslant kh+h} \left\| A_{ij}\left(\frac{u}{g(\varepsilon)}\right) - A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right\|\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant h \cdot \frac{T}{h} \cdot w(h) + 2 \sup_{\varepsilon} \sum_{kh > T} P_i\{kh + h < \tau\} \leqslant$$
$$\leqslant T \cdot w(h) + 2 \sup_{\varepsilon} \int_T^{\infty}\left(1 - F_i\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right) dt \to 0$$

при $h \to 0, g(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0$. Звідки й отримуємо рівномірну безпосередню інтегровність. Існує такий нелінійний множник нормування $g(\varepsilon) \to 0$ та матриця C, що

$$X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to \left[e^{tC}\right]_{sk} \cdot \frac{1}{\pi^{(k)}} \cdot \left(\vec{1} \otimes \vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty A_{ij}(u)du\right)$$

при $g(\varepsilon) \to 0, i \in E_s, j \in E_k$.

Оскільки,

$$x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = p_1 \cdot x_1\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot x_2\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right),$$

то

$$p_1 \cdot x_{1ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot x_{2ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to \left[e^{tC}\right]_{sk} \cdot \frac{1}{\pi^{(k)}} \cdot \left(\vec{1} \otimes \vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty A_{ij}(u)du\right).$$

Тоді

$$\pi^{(k)} = \left(\vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty tK^k dt, \vec{1}\right) = \sum_{i,j \in E_{ij}} p_i^{(k)} \cdot \left(\vec{1} \cdot \int_0^\infty t\Gamma_i(t)F_{ij}(dt), \vec{1}\right),$$

де $\vec{v}$ — лівий власний вектор матриці K для її максимального власного значення 1.

Враховуючи, що

$$A_{ij}(t) = a_{ij}\Gamma_i(t)P_i(t < \tau),$$

отримуємо

$$X_{ij}\left(\tfrac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to \left[e^{tC}\right]_{sk} \cdot \tfrac{1}{\pi^{(k)}} \cdot \left(\vec{1} \otimes \vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty \Gamma_j(u)P_j\{u < \tau\}du\right) =$$
$$= c_{sk}(t) \cdot \tfrac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} \cdot [\vec{1} \otimes \vec{1}] \cdot E_j\left\{\int_0^\tau \Gamma_j(u)du\right\}.$$

Отже,

$$E\left\{N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \mid x(0) = i\right\} \to c_{sk}(t) \cdot \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} \cdot [\vec{1} \otimes \vec{1}] \cdot E_j\left\{\int_0^\tau \Gamma_j(u)du\right\}$$

при $g(\varepsilon) \to 0$. □

В результаті доведено теорему та знайдемо границю умовного математичного сподівання суміші випадкової еволюції з нелінійним множником нормування.

Список використаної літератури

1. Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. *Limit theorem for multidimensional renewal equation*// Cybernetics and System Analysis. – 2022. – V.58, no.1. – P. 144–147.
2. Yarova O.A. *Asymptotics of solution to multidimensional renewal equation*// Cybernetics and Systems Analysis. – 2025. – V.61, no.5. – P. 853–856. doi:10.1007/s10559-025-00816-5.
3. Yarova O.A. *Asymptotics of mixture of multidimensional renewal equations under nonlinear normalization*// Bulletin of Cherkasy University. Series: Physical and Mathematical Sciences. – 2025. – Issue 1. – P. 3–10.
4. Yeleyko Ya.I., Nishchenko I.I. *On an asymptotic representation of the Perron root of a matrix-valued evolution*// Ukrain. Mat. Zh. – 1996. – V.48, no.1. – P. 35–43.
5. Feller W. *A simple proof for renewal theorems*// Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – no.14. – P. 285–293.

Стаття: надійшла до редколегії 21.07.2025
прийнята до друку 02.10.2025

MIXTURE OF SEMI-MARKOV RANDOM EVOLUTIONS IN NONLINEAR APPROXIMATION

Oksana YAROVA

Ivan Franko Lviv National University,
Universytetska str., 1, L'viv, 79000
e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua

This article is devoted to the study of a mixture of semi-Markov random evolutions. Two semi-Markov random processes are considered on the time scale $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ with a nonlinear normalization factor $g(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. For these processes, matrix-valued random evolutions are constructed. The limit of the conditional expectation of the random evolution for the mixture of semi-Markov processes is obtained.

Key words: semi-Markov process, stochastic evolution, mixture, multivariate renewal equation, nonlinear normalization factor, Markov process.