ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2025. Випуск 97. С. 103–113
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2025. Issue 97. P. 103–113
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.103-113

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ БУСІНЕСКА-СТОКСА

Мар'яна ХОМА, Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mariana.khoma@lnu.edu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua

Розглянуто нелінійні параболічні системи зі змінними показниками нелінійності. Доведено теорему єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Ключові слова: нелінійна параболічна система, інтегро-диференційна система, узагальнений простір Лебега, змінний показник нелінійності.

1. Вступ

Нехай $n \in \mathbb{N}$ — фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, де $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, де $\tau \in [0,T]$. Розглянемо задачу знаходження функції $u = \mathrm{col}(u_1, \dots, u_n)\colon Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, функцій $\pi\colon Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $\theta\colon Q_{0,T} \to \mathbb{R}$, що задовольняють такі співвідношення:

$$u_t - A\,\Delta u + G\,|u|^{q(x,t)-2}u + \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)dy +$$

$$+ B\,\theta + \nabla\pi = F(x,t) \ \text{ в } \ Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0 \ \text{ в } \ Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\theta_t - a\Delta\,\theta + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t) \ \text{ в } \ Q_{0,T}, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega \pi(x,t)dx = 0 \ \text{ в } \ (0,T), \tag{4}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{5}$$

$$\theta|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ \text{ в } \ \Omega, \tag{7}$$

2020 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35D30, 46E30, 60H15

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x) \text{ в } \Omega, \tag{8}$$

де $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ — лапласіан u; $\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ — дивергенція u; $\nabla\pi = (\frac{\partial \pi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \pi}{\partial x_n})$ — градієнт π; $A, G, a > 0$ — фіксовані числа; $\mathfrak{Z}$ — матриця-функція порядку n; $B, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^n$ — деякі вектори; $q = q(x,t)$ — змінний показник нелінійності.

Системи Нав'є-Стокса з постійними показниками нелінійності досліджуються в [1], [2], [3] (див. також наведену там літературу). Параболічні системи Стокса та інші рівняння зі змінними показниками нелінійностей досліджено в [4], [5], [6]. Системи Бусінеска для рівнянь Нав'є-Стокса з постійними показниками нелінійності вивчено, наприклад, у [7], [8]. Системи Стокса з постійними та змінними показниками нелінійностей досліджено в наших попередніх працях [9], [10]. Системи Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності досліджено, мабуть, вперше.

2. **Формулювання задачі і основних результатів**

Спершу введемо потрібні нам позначення. Норму банахового простору B позначимо через $\|\cdot; B\|$. Нехай $\mathcal{O} = \Omega$ або $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, $L^0(\mathcal{O})$ — множина вимірних за Лебегом функцій $v\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, $L^p(\mathcal{O})$ — стандартний простір Лебега, $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$ — стандартні простори Соболєва,

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \;\mid\; \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0\}. \tag{9}$$

Для кожної функції $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ через $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0$ визначимо числа

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \qquad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \tag{10}$$

а через $S_\mathfrak{q}$ — функцію

$$S_\mathfrak{q}(s) := \max\{s^{\mathfrak{q}_0}, s^{\mathfrak{q}^0}\}, \quad s \geq 0. \tag{11}$$

Якщо $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ та $\mathfrak{q}_0 > 1$, то визначимо $\mathfrak{q}' \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ так

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y) - 1} \quad \text{майже для всіх (м.д.в.)} \quad y \in \mathcal{O}. \tag{12}$$

Зауважимо, що $\frac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}'(y)} = 1$, $y \in \mathcal{O}$.

Нехай $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ та $\mathfrak{q}_0 \geq 1$. Узагальненим простором Лебега $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ називають лінійний простір функцій $v \in L^0(\mathcal{O})$, для яких виконується нерівність

$$\rho_\mathfrak{q}(v; \mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)} dy < +\infty. \tag{13}$$

Розглядатимемо $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ з нормою Люксембурга

$$\|v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})\| := \inf\{\lambda > 0 \;\mid\; \rho_\mathfrak{q}(v/\lambda; \mathcal{O}) \leq 1\}. \tag{14}$$

Коли $\mathfrak{q}_0 > 1$, то $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ є рефлексивним сепарабельним банаховим простором (див. [11, с. 599, 600, 604]). Узагальнені простори Лебега було введено В. Орлічем у [12]. Властивості таких просторів досліджено, зокрема, у [11], [13], [14], [15].

Аналогічно як в [16, с. 24] визначимо множину

$$\mathcal{P}^{\log}(\mathcal{O}) := \{p \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O}) \;\mid\; p \text{ — глобально log-неперервна}$$

$$\text{за Гельдером}, \quad p_0 \geq 1\}. \tag{15}$$

Для кожної функції $u \in L^1(Q_{0,T}) = L^1(0,T;L^1(\Omega))$ маємо, що $u(\cdot,t) \in L^1(\Omega)$, $t \in (0,T)$. Для зручності писатимемо просто $u(t)$ замість $u(\cdot,t)$. Нехай $s \in \mathbb{N}$,

$$(u,v)_\Omega := \begin{cases} \int\limits_\Omega (u(x),v(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx, & u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_n), v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \\ \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, & u,v\colon \Omega \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16}$$

Розглянемо простір Соболєва $[H^s(\Omega)]^n$ зі скалярним добутком

$$((u,v))_s := \sum_{i=1}^n (u_i,v_i)_{H^s(\Omega)}, \quad u,v \in [H^s(\Omega)]^n. \tag{17}$$

Нехай $\mathcal{D} := [D(Q_{0,T})]^n$ — простір основних функцій,

$$Y_1 := H^1_0(\Omega), \qquad U_1(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Y_1). \tag{18}$$

Нехай множини соленоїдальних функцій (функцій, для яких виконується умова нестискуваності $\mathrm{div}\, u = 0$)

$$C_{\mathrm{div}} := \{u \in [C^\infty_0(\Omega)]^n \;\;|\;\; \mathrm{div}\, u = 0\}, \tag{19}$$

$$X_q \ \text{— замикання } \ C_{\mathrm{div}} \ \text{ в } \ [L^q(\Omega)]^n, \qquad H := X_2, \tag{20}$$

$$Z_s \ \text{— замикання } \ C_{\mathrm{div}} \ \text{ в } \ [H^s(\Omega)]^n, \tag{21}$$

розглядаються, зокрема, з нормами

$$\|h;X_q\| := \|h;[L^q(\Omega)]^n\| = \sum_{l=1}^n \|h_l;L^q(\Omega)\|, \ h = \mathrm{col}(h_1,\ldots,h_n) \in X_q,$$

та $\|z;Z_s\| := \sqrt{((z,z))_s}$, $z = \mathrm{col}(z_1,\ldots,z_n) \in Z_s$, відповідно. Аналогічно як в [17, с. 7] визначимо множину

$$\mathcal{D}_{\mathrm{div}} := \{u \in \mathcal{D} \;\;|\;\; \mathrm{div}\, u = 0\}. \tag{22}$$

Зрозуміло, що простір соленоїдальних основних функцій $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ є підмножиною $\mathcal{D}$. Простори лінійних неперервних функціоналів над просторами $\mathcal{D}$ та (22) позначимо $\mathcal{D}^*$ та $\mathcal{D}^*_{\mathrm{div}}$ відповідно.

Припустимо, що виконуються позначення

$$V(t) := Z_1 \cap [L^{q(x,t)}(\Omega)]^n, \quad t \in [0,T], \tag{23}$$

$$U(Q_{0,T}) := L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^n, \tag{24}$$

$$W(Q_{0,T}) := \{u \in U(Q_{0,T}) \;\;|\;\; u_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}. \tag{25}$$

Нехай виконуються такі умови.

(A): $A, G, a > 0$; $B, \mathfrak{B} \in \mathbb{R}^n$;

(Q): $q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ (див. (15)) та $q_0 \geq 2$ (див. (10));

(E): $\mathfrak{Z}$ — квадратна матриця порядку n з елементами з $L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$;

(F): $F \in L^2(0,T;H)$, $f \in L^2(Q_{0,T})$;

(U): $u_0 \in H$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Визначимо оператори $A_1\colon Y_1 \to Y_1^*$, $A_2\colon Z_1 \to Z_1^*$, $\mathsf{A}_1\colon U_1(Q_{0,T}) \to [U_1(Q_{0,T})]^*$ та $\mathsf{A}_2\colon L^2(0,T;Z_1) \to L^2(0,T;Z_1^*)$ так:

$$\langle A_1\xi, \eta\rangle_{Y_1} := \int\limits_\Omega a \sum_{i=1}^n \xi_{x_i}(x)\eta_{x_i}(x)dx, \quad \xi, \eta \in Y_1; \tag{26}$$

$$\langle A_2 z, w\rangle_{Z_1} := \int\limits_\Omega A \sum_{i=1}^n \Big(z_{x_i}(x), w_{x_i}(x)\Big)_{\mathbb{R}^n} dx, \quad z, w \in Z_1; \tag{27}$$

$$\langle \mathsf{A}_1 u, v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle A_1 u(t), v(t)\rangle_{Y_1} dt, \quad u, v \in U_1(Q_{0,T}); \tag{28}$$

$$\langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} := \int\limits_0^T \langle A_2 u(t), v(t)\rangle_{Z_1} dt, \quad u, v \in L^2(0,T;Z_1). \tag{29}$$

Також введемо такі оператори:

$$(N(t)z)(x) := g(x,t)|z(x)|^{q(x,t)-2}z(x), \tag{30}$$

$z = z(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$;

$$(\mathsf{N}u)(x,t) := \big(N(t)u(t)\big)(x) = g(x,t)|u(x,t)|^{q(x,t)-2}u(x,t), \tag{31}$$

$u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$;

$$(E(t)z)(x) := \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)dy, \tag{32}$$

$z = z(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$;

$$(\mathsf{E}u)(x,t) := \big(E(t)u(t)\big)(x) = \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)dy, \tag{33}$$

$u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_{0,T}$.

Використовуватимемо позначення (16) і оператори $S(t)\colon V(t) \to [V(t)]^*$ та $\mathsf{S}\colon U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$, які визначимо так:

$$\langle S(t)z, w\rangle_{V(t)} := \langle A_2 z, w\rangle_{Z_1} + \\ + (N(t)z, w)_\Omega + (E(t)z, w)_\Omega, \quad z, w \in V(t), \quad t \in (0,T); \tag{34}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \langle \mathsf{A}_2 u, v\rangle_{L^2(0,T;Z_1)} + \\ + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(\mathsf{N}u)(x,t) + (\mathsf{E}u)(x,t)\Big]v(x,t)dxdt, \quad u, v \in U(Q_{0,T}). \tag{35}$$

Дамо означення розв'язку нашої задачі. Нехай

$$\chi_{0,\tau}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\tau]; \\ 0, & t \notin [0,\tau], \end{cases} \quad \tau \in (0,T], \tag{36}$$

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q^0}\Big), \quad h = \min\Big\{2, \ \frac{q^0}{q^0 - 1}\Big\}. \tag{37}$$

Означення 1. Трійка функцій $\{u, \pi, \theta\}$ називається *узагальненим розв'язком задачі (1)–(8)*, якщо

$$u \in W(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; Z_s^*), \quad \pi \in W^{-1,h}(0,T; L^h(\Omega)),$$
$$\theta \in U_1(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \quad \theta_t \in [U_1(Q_{0,T})]^*;$$

для всіх $z \in U(Q_{0,T})$, $v \in U_1(Q_{0,T})$ та $\tau \in (0,T]$ виконуються рівності

$$\langle u_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E}u, z)_{\mathbb{R}^n} + $$
$$+ \theta(B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F, z)_{\mathbb{R}^n}\Big] dxdt = 0, \tag{38}$$

$$\langle \theta_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i} v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} v - fv\Big] dxdt = 0; \tag{39}$$

виконуються початкові умови (7)–(8); функція π задовольняє (1) в сенсі простору $\mathcal{D}^*$ і задовольняє (4) в сенсі простору $D^*(0,T)$.

Основний результат статті — така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови **(A)**–**(E)**, то задача (1)–(8) не може мати більше одного узагальненого розв'язку* $\{u, \pi, \theta\}$.

Перш ніж перейти до доведення теореми 1 розглянемо математичну модель, в якій виникають системи Бусінеска-Стокса (1)–(3).

3. **Виникнення класичної системи рівнянь Бусінеска**

Конвекція, яка пов'язана з неоднорідним нагріванням, є одним з найбільш розповсюдженим видом протікання рідин і газів у Всесвіті. Значну роль вона відіграє і в різноманітних технічних пристроях. Це пояснює постійне зацікавлення вчених конвекцією. Останнім часом, цей інтерес стимулюється і такою обставиною: задачі про конвекцію дають багато матеріалу для розроблення нових ідей, які стосуються співвідношення порядку і хаосу в гідродинаміці, поведінки гідродинамічних об'єктів тощо.

Часто предметом вивчення є конвекція в плоскому горизонтальному шарі рідини, який підігрівають знизу — *конвекція Релея-Бенара.* Вона містить в собі риси, які характерні для багатьох явищ гідродинамічної нестійкості. В той же час, при такій конвекції, через відсутність інтенсивного потоку, просторові і часові ефекти в значній мірі розщеплені, а це створює значні умови як для експериментального, так і для теоретичного її вивчення. Конвекція Релея-Бенара дає багато можливостей для дослідження процесів самовільного виникнення впорядкованих просторових структур і при цьому ставить цікаві запитання щодо реалізації форм і масштабів течій — відбору тих, які виявляються найбільш оптимальними.

Розглянемо відому задачу, яка включає в себе систему гідродинамічних рівнянь в наближенні Буссінеска (або Обербека-Буссінеска). Візьмемо плоский горизонтальний шар рідини $0 \le z \le h$ (вісь OZ декартової системи координат (x, y, z) напрямлена вверх) і будемо вважати, що температура $T = T(x, y, z, t)$ його недеформованих верхніх і нижніх поверхонь фіксована:

$$T|_{z=0} = T_1, \qquad T|_{z=h} = T_2 \equiv T_1 - \Delta T, \tag{40}$$

де $\Delta T = \beta h$, β — незбурений градієнт температури. Щільність рідини ρ вважається функція лише однієї температури T (тобто припускається нестисненність):

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0), \tag{41}$$

де ρ_0 — значення щільності при деякій, вибраній потрібним чином "середній" температурі T_0, α — коефіцієнт об'ємного теплового розширення. Відомо, що при малому α і малій зміні матеріальних параметрів середовища (кінематичної в'язкості ν та температуропровідності χ) для доволі повільних процесів, щільність і ці параметри можна вважати сталими для всіх членів рівняння, крім одного: зміна щільності зберігається там, де вона множиться на прискорення сили тяжіння g (цей член є архімедовою силою, яка і породжує конвекцію). При цих і деяких інших умовах відомо, що класичні рівняння Буссінеска мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \alpha \theta \, \mathbf{g} + \nu \, \Delta u, \tag{42}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u, \nabla) T = \chi \Delta T, \tag{43}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{44}$$

де u — вектор швидкості рідини, $\theta = T - T_1 + \beta z$ — збуренням температури, p' — збурення тиску p, тобто його відхилення від розподілу, що відповідає цьому температурному профілю, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Традиційно такі рівняння доповнюють відповідними крайовими і початковими умовами, що ми і робимо далі.

В літературі зустрічається декілька способів переходу в цій задачі до безрозмірних змінних. Далі будемо використовувати найбільш розповсюджений. В якості одиниці довжини виберемо товщину шару h, одиниці часу — час вертикальної дифузії тепла $\tau_u = h^2/\chi$, одиниці температури — різницю температур ΔT між поверхнями шару. Тоді (42)–(44) набуде такого безрозмірного вигляду:

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u\right] = -\nabla \pi + \widehat{z} R \, \theta + \Delta u, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u, \nabla)\theta = \Delta \theta + u_z, \tag{46}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{47}$$

де $R = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu \chi}$ та $P = \frac{\nu}{\chi}$ — основні параметри, що характеризують режим конвекції, які називаються числами Релея і Прандтля відповідно, π — безрозмірна форма величини $\frac{p'}{\rho_0}$, $\widehat{z}$ — одиничний вектор в напрямку осі OZ.

Стандартно вважатимемо u та θ нескінченно малими і лінеаризуємо рівняння (45)–(46). Отримаємо таку систему рівнянь, яку називатимемо системою Бусінеска-Стокса:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \widehat{z} R \, \theta = -\nabla \pi, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta - u_z = 0, \tag{49}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{50}$$

Наша система (1)–(3) є певним узагальненням щойно отриманої системи (48)–(50).

4. **Допоміжні твердження**

Нехай $\mathbb{Z}_{\geq -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \geq -1\}$, $s \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $p \in [1, \infty]$, $W^{s,p}(\Omega)$ — стандартний простір Соболєва, Y — деякий банахів простір,
$W^{0,p}(0, T; Y) := L^p(0, T; Y)$ — стандартний простір Лебега-Бохнера,

$$W^{-1,p}(0,T;Y) := \Big\{ f \in D^*(0,T;Y) \ \Big| \ f = f_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial y_j}, \ f_j \in L^p(0,T;Y) \ (0 \leq j \leq N) \Big\}.$$

Нагадаємо одне відоме твердження.

Твердження 1 (узагальнена теорема де Рама, див. твердження 7 [4], с. 171)**.** *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита обмежена область з ліпшицевою межею, $T > 0$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $h_1, h_2 \in [1, \infty]$, $\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}(0, T; [W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)$. Тоді якщо*

$$\langle \mathcal{F}(\cdot), v \rangle_{[D(\Omega)]^n} = 0 \ \text{ в } d^*(0, T) \tag{51}$$

для всіх $v \in C_{div}$, то існує единий елемент

$$\pi \in W^{s_1,h_1}(0, T; W^{s_2+1,h_2}(\Omega)), \tag{52}$$

який задовольняє співвідношення

$$\nabla \pi = \mathcal{F} \quad \text{в просторі} \quad [D^*(Q_{0,T})]^n, \tag{53}$$

$$\int_{\Omega} \pi(x, \cdot) dx = 0 \quad \text{в просторі} \quad D^*(0, T). \tag{54}$$

Крім того, існує таке число $C_1 > 0$ (яке не залежить від $\mathcal{F}, \pi$), що

$$\|\pi; W^{s_1,h_1}(0, T; W^{s_2+1,h_2}(\Omega))\| \leq C_1 \|\mathcal{F}; W^{s_1,h_1}(0, T; [W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)\|. \tag{55}$$

Зараз наведемо кілька допоміжних оцінок.

Зауваження 1. Якщо $u = (u_1, \ldots, u_n) \in [L^2(\mathcal{O})]^n$, де $\mathcal{O} = \Omega$ чи $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, то

$$\| |u|; L^2(\mathcal{O})\|^2 = \int_{\mathcal{O}} |u|^2 dy = \sum_{l=1}^{n} \|u_l; L^2(\mathcal{O})\|^2 \leq n \|u; [L^2(\mathcal{O})]^n\|^2,$$

$$\| |u|; L^2(\mathcal{O})\| \leq \sqrt{n} \|u; [L^2(\mathcal{O})]^n\|. \tag{56}$$

Лема 1. *Якщо виконується умова **(E)**, то оператори $\mathtt{E}\colon [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$, $E(t)\colon [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$, $t \in (0, T)$, є лінійними, обмеженими і неперервними. Крім того, виконуються оцінки*

$$\| |E(t)z|; L^2(\Omega)\| \leq E^0 \cdot \| |z|; L^2(\Omega)\| \leq \sqrt{n} E^0 \|z; [L^2(\Omega)]^n\|, \quad z \in [L^2(\Omega)]^n, \tag{57}$$

$$\| |\mathtt{E}u|; L^2(Q_{0,\tau})\| \leq E^0 \| |u|; L^2(Q_{0,\tau})\| \leq$$

$$\leq \sqrt{n} E^0 \|u; [L^2(Q_{0,\tau})]^n\|, \ u \in [L^2(Q_{0,T})]^n, \tag{58}$$

$\tau \in (0,T]$, *де*

$$E^0 = ess \sup_{t\in(0,T)} \Big(\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\Omega} \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n^2 \, dy \Big)^{1/2},$$

$\|\cdot\|_n$ — *норма матриці.*

Доведення. З нерівності Коші-Буняковського і умови **(E)** випливає, що

$$\|\,|E(t)z|;L^2(\Omega)\|^2 = \int\limits_{\Omega} |(E(t)z)(x)|^2 dx = \int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)z(x)dy \Big|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n \cdot |z(y)| dy \Big|^2 dx \le \int\limits_{\Omega} \Bigg(\int\limits_{\Omega} \|\mathfrak{Z}(x,t,y)\|_n^2 dy \Bigg) \Bigg(\int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 dy \Bigg) dx \le$$

$$\le |E^0|^2 \int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 dy = |E^0|^2 \cdot \|\,|z|;L^2(\Omega)\|,$$

тобто маємо (57). Оцінку (58) доводимо аналогічно. □

5. Доведення основної теореми

Нехай $\{u^1,\pi^1,\theta^1\}$ та $\{u^2,\pi^2,\theta^2\}$ є розв'язками задачі (1)–(8), $w = u^1 - u^2$, $M = \theta^1 - \theta^2$. Запишемо рівності (38)–(39) для трійки $\{u^1,\pi^1,\theta^1\}$:

$$\langle u_t^1, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^1, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u^1, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E}u^1, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \theta^1 (B,z)_{\mathbb{R}^n} - (F,z)_{\mathbb{R}^n} \Big] dxdt = 0, \tag{59}$$

$$\langle \theta_t^1, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a \sum_{i=1}^n \theta_{x_i}^1 v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u^1)_{\mathbb{R}^n} v - fv \Big] dxdt = 0. \tag{60}$$

Запишемо (38)–(39) для $\{u^2,\pi^2,\theta^2\}$:

$$\langle u_t^2, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^2, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{E}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \theta^2 (B,z)_{\mathbb{R}^n} - (F,z)_{\mathbb{R}^n} \Big] dxdt = 0, \tag{61}$$

$$\langle \theta_t^2, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a \sum_{i=1}^n \theta_{x_i}^2 v_{x_i} + (\mathfrak{B}, u^2)_{\mathbb{R}^n} v - fv \Big] dxdt = 0. \tag{62}$$

Віднявши (61) від (59) та (62) від (60), отримаємо:

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} z\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A \sum_{i=1}^n (w_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathsf{N}u^1 - \mathsf{N}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (\mathsf{E}w, z)_{\mathbb{R}^n} + M(B,z)_{\mathbb{R}^n} \Big] dxdt = 0, \tag{63}$$

$$\langle M_t, \chi_{0,\tau} v\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a\sum_{i=1}^{n} M_{x_i} v_{x_i} + v(\mathfrak{B}, w)_{\mathbb{R}^n} \Big]\, dxdt = 0. \tag{64}$$

Візьмемо в (63) $z = w$, а в (64) $v = M$. Додавши отримані рівності одержимо:

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U(Q_{0,T})} + \langle M_t, \chi_{0,\tau} M\rangle_{U_1(Q_{0,T})} + \\ + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[A\sum_{i=1}^{n} |w_{x_i}|^2 + a\sum_{i=1}^{n} |M_{x_i}|^2 \Big] dxdt = I, \tag{65}$$

де

$$I = -\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[G\Big(|u^1|^{q(x,t)-2} u^1 - |u^2|^{q(x,t)-2} u^2, u^1 - u^2 \Big)_{\mathbb{R}^n} + \\ + (\mathsf{E} w, w)_{\mathbb{R}^n} + M(B, w)_{\mathbb{R}^n} + M(\mathfrak{B}, w)_{\mathbb{R}^n} \Big]\, dxdt.$$

Використавши, зокрема, оцінку (58), отримаємо таке:

$$I \le \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\mathsf{E} w|\cdot|w| + |M|\cdot|B + \mathfrak{B}|\cdot|w| \Big) dxdt \le C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2 \Big) dxdt.$$

Використавши формули інтегрування частинами з Твердження 3.26 [16, с. 95] та Твердження 4.23 [16, с. 172], врахувавши початкові умови (7)–(8), одержимо рівність

$$\langle w_t, \chi_{0,\tau} w\rangle_{U(Q_{0,T})} + \langle M_t, \chi_{0,\tau} M\rangle_{U_1(Q_{0,T})} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |M|^2 dx.$$

Тоді з (65) отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \Big(|w|^2 + |M|^2 \Big) dx \le C_2 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2 \Big) dxdt, \quad \tau \in (0, T].$$

Тому, використавши лему Гронуола-Белмана, отримаємо, що $\int_{\Omega_\tau} (|w|^2 + |M|^2) dx \le 0$ для $\tau \in (0, T]$. Отже, $u^1 = u^2$ та $\theta^1 = \theta^2$.

Далі проробимо стандартні перетворення (див., наприклад, [18, с. 200-201]). З (38)–(39) для функцій $u^1 = u^2$ та $\theta^1 = \theta^2$ на підставі Твердження 1 матимемо рівність $\nabla(\pi^1 - \pi^2) = 0$ в сенсі простору $\mathcal{D}^*$. Тому $\pi^1 - \pi^2 = c$ і аналогічно як в [18, с. 200], використавши умову (4), матимемо $c = 0$. Отже, $\pi^1 = \pi^2$ і теорему доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. R. Temam, Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, North-Holland Publ., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
2. J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and preassure*, SIAM J. Math. Anal., **21** (1990), no.5, 1093–1117.
3. J.A. Langa, Real J., Simon J., *Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier-Stokes equations*, Applied Mathematics and Optimization, **48** (2003), no.3, 195–210.
4. O.M. Buhrii, *Visco-plastic, newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Stud., **49** (2018), no.2, 165–180.

5. O. Buhrii, N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **473** (2019), 695–711.
6. M. Bokalo, O. Buhrii, N. Hryadil, *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Nonl. Anal., **192** (2020), https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111700.
7. J.R. Cannon, E. DiBenedetto, *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p*, In Approximation Methods for Navier-Stokes Problems: Proceedings of the Symposium Held by the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM) at the University of Paderborn, Berlin, Heidelberg, 1979: Springer, 129–144.
8. C. Conca, M.A. Rojas-Medar, *The initial value problem for the Boussinesq equations in a time-dependent domain*, Technical report, Universidad de Chile, (1993), 1–16.
9. O. Buhrii, M. Khoma *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system*, Visnyk (Herald) of Lviv Univ. Series Mech.-Math., **85** (2018), 107–119.
10. M.V. Khoma, O.M. Buhrii, Stokes system with variable exponents of nonlinearity // Bukovinian Mathematical Journal, **10** (2022), no.2, 28–42.
11. O. Kováčik, J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J., **41**, (1991) no.116, 592–618.
12. W. Orlicz, *Uber Konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Mathematica, **3** (1931), 200–211.
13. S. Antontsev, S. Shmarev, Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up, Atlantis Studies in Diff. Eq., V.4, Paris: Atlantis Press, 2015.
14. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer, Heidelberg, 2011.
15. X.-L. Fan, D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 424–446.
16. A. Kaltenbach, Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, V.2329, Springer Nature Switzerland AG, 2023.
17. G.P. Galdi, An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem, Fundamental directions in mathematical fluid mechanics, Basel: Birkhauser Basel, 2000.
18. H. Sohr, The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach, Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 2001.

Стаття: надійшла до редколегії 08.12.2024
прийнята до друку 23.10.2025

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL BOUSSINSQ-STOKES SYSTEMS

Mariana KHOMA, Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mariana.khoma@lnu.edu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua

Some nonlinear parabolic systems with variable exponents of the nonlinearity are considered. The initial-boundary value problem for these systems is investigated and the uniqueness theorem for the problem is proved.

Key words: nonlinear parabolic system, integro-differential system, generalized Lebesgue space, variable exponent of nonlinearity.