ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2025. Випуск 97. С. 79–89
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2025. Issue 97. P. 79–89
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.079-089

УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Ігор КУЦЕВОЛ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, ihor.kutsevol@lnu.edu.ua

Розглянуто мішану задачу для сильно нелінійних систем інтегро-диференціальних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Показано неперервну залежність від вхідних даних узагальненого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: параболічна система, змінний показник нелінійності, узагальнених розв'язок, стійкість.

1. Вступ

Нехай $T > 0$ та $n, N \in \mathbb{N}$ — деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{0,\tau} = \Omega \times (0,\tau)$ та $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, де $\tau \in [0,T]$. Шукатимемо вектор-функцію $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_N) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^N$ таку, що

$$\widetilde{u}_{k,t} + \alpha\, \Delta^2\big(\widetilde{u}_k + b_k\big) - \sum_{i=1}^{n} \Big(a_{ik}(x,t) \Big| \widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}(x,t) \Big|^{p(x,t)-2} \Big(\widetilde{u}_k + b_k(x,t) \Big)_{x_i} \Big)_{x_i} + \\ + \Big(\mathsf{N}\Big(\widetilde{u} + b \Big) \Big)_k (x,t) + \phi_k \Big(\Big(\mathsf{E}(\widetilde{u} + b) \Big)_k (x,t) \Big) = F_k(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \qquad (1)$$

$$\widetilde{u}(x,t) = \Delta \widetilde{u}(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \qquad (2)$$

$$\widetilde{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

де $\alpha > 0$ — деяке число, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — лапласіан, $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ — білапласіан,

$$(\mathsf{N}z)_k(x,t) := g_k(x,t) |z(x,t)|^{q(x,t)-2} z_k(x,t), \qquad (4)$$

2020 Mathematics Subject Classification: 35K35, 35K55, 35D30, 35B30

$$(\mathsf{E}z)_k(x,t) := \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}_k(x,t,y) z_k(y,t)\, dy, \quad z=(z_1,\ldots,z_N), \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{5}$$

$a_{ik}, g_k, \phi_k, \mathfrak{Z}_k,\ u_0 := (u_{0,1},\ldots,u_{0,N}),\ F := (F_1,\ldots,F_N)$ та $b := (b_1,\ldots,b_N)$ — деякі функції, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,N}$; $p=p(x,t)$ та $q=q(x,t)$ — змінні показники нелінійності.

Задачі для рівнянь і систем рівнянь параболічного типу зі змінними показниками нелінійності вивчено, зокрема, в [1], [2], [3], [4]. Неперервну залежність розв'язку від деяких вхідних даних задач для нелінійних рівнянь і систем доведено, наприклад, у [5], [6]. Відповідне (1) рівняння з другою похідною за часовою змінною, за умови $b_k \equiv 0$ та без інтегральних доданків розглянуто в [7]. Систему рівняння другого порядку і півлінійного рівняння четвертого порядку зі змінними показниками нелінійності та без інтегральних доданків досліджено в [8]. При $b_k \equiv 0$ та коли p, q не залежать від t задачу типу (1)–(3) дослідили в [1]. Мішану задачу для системи (1) з $b_k \not\equiv 0$ та присутнім там інтегральним доданком і змінними показниками нелінійності розглянуто, мабуть, вперше.

У цій праці показано, що малій зміні (у відповідних функційних просторах) вхідних даних u_0, F та b задачі (1)–(3) відповідає мала зміна її узагальненого розв'язку $\widetilde{u}$. Для систем типу (1) такі результати отримано, мабуть, вперше.

2. **Формулювання задачі**

Користуватимемося позначеннями праці [1]. Зокрема, нехай $\|\cdot\|_B \equiv \|\cdot;B\|$ — норма деякого банахового простору B, B^N — декартів степінь B, B^* — спряжений до B простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ — скалярний добуток між B^* та B, $(\cdot,\cdot)_H$ — скалярний добуток в деякому гільбертовому просторі H, $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$. Нехай $\mathcal{O}=\Omega$ чи $\mathcal{O}=Q_{0,T}$; $D(\mathcal{O})$ — простір гладких фінітних (основних) функцій; $L^p(\mathcal{O})$ — стандартний простір Лебега функцій $v=v(y)$, $y\in\mathcal{O}$; $W^{k,p}(\mathcal{O})$ — стандартний простір Соболєва; $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ — узагальнених простір Лебега; $W^{k,\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ — узагальнений простір Соболєва; $C([0,T];B)$ — простір B-значних неперервних функцій $w:[0,T]\to B$; $L^p(0,T;B)$ — стандартний простір Лебега-Бохнера,

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q}\in L^\infty(\mathcal{O}) \quad | \quad \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0\}. \tag{6}$$

Для будь-якого $\mathfrak{q}\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ позначимо

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \quad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \qquad S_{\mathfrak{q}}(s) := \max\{s^{\mathfrak{q}_0},\, s^{\mathfrak{q}^0}\}, \quad s\ge 0, \tag{7}$$

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y)-1} \ \text{ for a.e. } \ y\in\mathcal{O} \tag{8}$$

(тут $\frac{1}{\mathfrak{q}(y)}+\frac{1}{\mathfrak{q}'(y)}=1$ майже для всіх (м.д.в.) $y\in\mathcal{O}$ та $\mathfrak{q}'\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ при $\mathfrak{q}_0>1$),

$$\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\, dy, \quad v=v(y). \tag{9}$$

Нехай $\operatorname{Lip}(\mathbb{R})$ — множина ліпшицевих на $\mathbb{R}$ функцій,

$$L^0(\mathcal{O}) := \{v:\mathcal{O}\to\mathbb{R} \quad | \quad v \ \text{— вимірна за Лебегом на } \ \mathcal{O}\}. \tag{10}$$

Аналогічно як в [4, с. 24] визначимо множину

$$\mathcal{P}^{\log}(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O}) \ \mid \ \mathfrak{q} \text{ — глобально log-неперервна за Гельдером}, \ \ \mathfrak{q}_0 \geq 1\}. \tag{11}$$

Нехай $\Delta^0 v := v$, $\Delta^1 v := \Delta v$ — лапласіан, $\Delta^s v := \Delta(\Delta^{s-1} v)$, $s \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_s := \{v \in H^{2s}(\Omega) \ \mid \ v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = \ldots = \Delta^{s-1} v|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{12}$$

$\mathcal{W}_s^* := [\mathcal{W}_s]^*$. Також нехай $Z := \mathcal{W}_1$,

$$X(t) := W_0^{1,p(x,t)}(\Omega), \quad Y(t) := L^{q(x,t)}(\Omega), \tag{13}$$

$$H := [L^2(\Omega)]^N, \qquad V(t) := Z^N \cap [X(t)]^N \cap [Y(t)]^N \cap H, \tag{14}$$

$$X^*(t) := [X(t)]^*, \quad Y^*(t) := [Y(t)]^*, \quad H^* \simeq H, \quad V^*(t) := [V(t)]^*, \tag{15}$$

$$U(Q_{0,T}) := \{u : (0,T) \to V(t) \ \ \mid \ \ D^\alpha u \in [L^2(Q_{0,T})]^N \ \text{ при } \ |\alpha| = 2,$$
$$u_{x_1}, \ldots, u_{x_n} \in [L^{p(x,t)}(Q_{0,T})]^N, \quad u \in [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N \cap [L^2(Q_{0,T})]^N\}, \tag{16}$$

$$W(Q_{0,T}) := \{w \in U(Q_{0,T}) \ \ \mid \ \ w_t \in [U(Q_{0,T})]^*\}. \tag{17}$$

Відомо, що $W(Q_{0,T}) \subset C([0,T]; H)$ і що для функцій з цього простору виконується формула інтегрування частинами за часовою змінною (див., наприклад, Твердження 3.26 [4, с. 95]). Припустимо, що виконуються такі умови:

(P): $p, q \in \mathcal{P}^{\log}(Q_{0,T})$ (див. (11));

(Z): $\alpha > 0$, $r_0 = \min\{2, p_0, q_0\}$, $r^0 = \max\{2, p^0, q^0\}$, $r \in \mathbb{N}$,

$$s \geq \frac{1}{2}\max\Big\{2, \ \ 1 + \frac{n(p^0-2)}{2p^0}, \ \ \frac{n(q^0-2)}{2q^0}\Big\};$$

(A): $a_{ik} \in L^0(Q_{0,T})$, $0 < a_0 \leq a_{ik}(x,t) \leq a^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,N}$;

(G): $g_k \in L^0(Q_{0,T})$, $0 < g_0 \leq g_k(x,t) \leq g^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $k = \overline{1,N}$;

(Φ): $\phi_k \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R})$, $|\phi_k(\xi)| \leq \phi^0|\xi|$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $0 \leq \phi^0 < +\infty$, $k = \overline{1,N}$;

(E): $\mathfrak{Z}_k \in L^0(Q_{0,T} \times \Omega)$, $|\mathfrak{Z}_k(x,t,y)| \leq \mathfrak{Z}^0 < +\infty$ м.д.в. $(x,t,y) \in Q_{0,T} \times \Omega$, де $k = \overline{1,N}$.

(FD): $F \in L^2(0,T;H)$;

(UD): $u_0 \in H$;

(WD): $b \in U(Q_{0,T})$.

Введемо оператори $\mathsf{S} : U(Q_{0,T}) \to [U(Q_{0,T})]^*$ та $S(t) : V(t) \to V^*(t)$ для $t \in [0,T]$ за допомогою таких рівностей:

$$\langle S(t)z, w\rangle_{V(t)} := \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N}\Big[\alpha\, \Delta z_k \Delta w_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x,t)|z_{x_i}|^{p(x,t)-2} z_{k,x_i} w_{k,x_i} +$$
$$+ (\mathsf{N}z)_k w_k + \phi_k\Big((\mathsf{E}z)_k\Big) w_k\Big]\, dx, \quad z, w \in V(t), \quad t \in (0,T); \tag{18}$$

$$\langle \mathsf{S}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \int_0^T \langle S(t)u(t), v(t)\rangle_{V(t)}\, dt, \quad u, v \in U(Q_{0,T}). \tag{19}$$

Дамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. Вектор-функція $\widetilde{u} : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^N$ називається *узагальненим розв'язком задачі (1)–(3)*, якщо виконуються такі твердження:

1) $\widetilde{u} \in W(Q_{0,T})$;

2) функція $\widetilde{u}$ задовольняє рівність

$$\int_{Q_{0,T}} \sum_{k=1}^{N} \Big[-\widetilde{u}_k\, v_{k,t} + \alpha\, \Delta\big(\widetilde{u}_k + b_k\big)\Delta v_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(x,t)\big|\widetilde{u}_{x_i} + b_{x_i}\big|^{p(x,t)-2}\big(\widetilde{u}_{k,x_i} + b_{k,x_i}\big)v_{k,x_i} +$$

$$+ \Big(\mathsf{N}\big(\widetilde{u}+b\big)\Big)_k v_k + \phi_k\Big(\Big(\mathsf{E}\big(\widetilde{u}+b\big)\Big)_k\Big)v_k\Big]\, dxdt = \int_{Q_{0,T}} \sum_{k=1}^{N} F_k v_k\, dxdt \tag{20}$$

для всіх пробних функцій $z \in U(Q_{0,T})$, тобто, в сенсі просторів $[U(Q_{0,T})]^*$ та $[D^*(Q_{0,T})]^N$ виконується рівність

$$\widetilde{u}_t + \mathsf{S}(\widetilde{u} + b) = F; \tag{21}$$

3) $\widetilde{u}$ задовольняє умову (3) в сенсі простору $C([0,T]; H)$.

Нехай $SP(u_0, F, b)$ — множина розв'язків $\widetilde{u}$ задачі (1)–(3) в сенсі означення 1. За наведених припущень та умови $\partial\Omega \subset C^{2s}$, використовуючи метод Фаедо-Гальоркіна, можна показати, що $SP(u_0, F, b) \neq \varnothing$. Крім того, виконується така оцінка:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \Big[|\Delta\widetilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^{p(x,t)} + |\widetilde{u}|^{q(x,t)} + |\widetilde{u}|^2 \Big]\, dxdt \le C_1 \mathtt{F}(\tau), \tag{22}$$

де $C_1 > 0$ — стала, які не залежить від $\tau, \widetilde{u}, u_0, F, b$,

$$\mathtt{F}(\tau) = \int_{\Omega} |u_0(x)|^2\, dx +$$

$$+ \int_{Q_{0,\tau}} \Big[|\Delta b|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}|^{p(x,t)} + |b|^{q(x,t)} + |b|^2 \Big]\, dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{23}$$

3. Допоміжні твердження

Користуватимемося такими оцінками нелінійних виразів.

Твердження 1 (Лема 3.3, [3], с. 4). *Якщо $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0 > 1$, $\mathfrak{q}'$ взято з (8), то для всіх $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, та м.д.в. $y \in \mathcal{O}$ виконується узагальнена нерівність Юнга*

$$ab \le \varepsilon\, |a|^{\mathfrak{q}(y)} + Y_{\mathfrak{q}}(\varepsilon)\, |b|^{\mathfrak{q}'(y)}, \tag{24}$$

де $Y_{\mathfrak{q}}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/(\mathfrak{q}_0 - 1)}$, а при $\mathfrak{q}(y) \equiv 2$ матимемо, що $Y_2(\varepsilon) = 1/(4\varepsilon)$.

Твердження 2 (Твердження 4 [2], с. 701). *Якщо* $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ *та* $\mathfrak{q}_0 > 1$*, то правильними є такі твердження:*

i) для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y \in \mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\Big||\eta_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_1 - |\eta_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_2\Big| \le C_2(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0)\Big(|\eta_1| + |\eta_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-1-\alpha(y)}|\eta_1 - \eta_2|^{\alpha(y)}, \qquad (25)$$

де $0 \le \alpha(y) \le \min\{1, \mathfrak{q}(y) - 1\}$*,* $C_2(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) := \max\{1, 2^{2\mathfrak{q}_0}, (\mathfrak{q}^0 - 1)2^{2\mathfrak{q}_0}\}$;

ii) для всіх $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y \in \mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\Big(|\xi_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_2, \xi_1 - \xi_2\Big) \ge C_3(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0)\Big(|\xi_1| + |\xi_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-\beta(y)}|\xi_1 - \xi_2|^{\beta(y)}, \quad (26)$$

де $\max\{\mathfrak{q}(y), 2\} \le \beta(y) < \infty$*,* $C_3(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0) := \min\{2^{2\mathfrak{q}^0}, (\mathfrak{q}_0 - 1)2^{2\mathfrak{q}^0}\}$.

Аналогічно як лему 3.26 [1, с. 875] отримуємо таке твердження.

Лема 1. *Якщо виконується умова **(E)**, то* $\mathsf{E} : L^2(0,T;H) \to L^2(0,T;H)$ *є лінійним обмеженим неперервним оператором і задовольняє оцінку*

$$\|\mathsf{E}u; L^2(0,T;H)\| \le C_4\|u; L^2(0,T;H)\|, \quad u \in L^2(0,T;H), \qquad (27)$$

де $C_4 > 0$ *— стала, яка не залежить від* u.

4. **Основний результат**

Основним результатом цієї праці є така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(P)-(WD)**,* $p_0 \ge 2$ *та* $q_0 \ge 2$*. Тоді розв'язок* $\widetilde{u}$ *детермінованої задачі (1)–(3) неперервно залежить від вхідних даних* u_0, F, b.

Доведення теореми 1. Нехай $\widetilde{u}_1 \in SP(u_0^1, F^1, b^1)$, $\widetilde{u}_2 \in SP(u_0^2, F^2, b^2)$. Запишемо (21) для $\widetilde{u}_1, F^1, b^1$:

$$\widetilde{u}_{1,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_1 + b^1) = F^1. \qquad (28)$$

Запишемо (21) для $\widetilde{u}_2, F^2, b^2$:

$$\widetilde{u}_{2,t} + \mathsf{S}(\widetilde{u}_2 + b^2) = F^2. \qquad (29)$$

Віднявши рівність (29) від (28), подіємо елементами з отриманої рівності на елемент $\widetilde{u} \cdot \chi_{0,\tau} \in U(Q_{0,T})$, де $\widetilde{u} := \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$ та

$$\chi_{0,\tau}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\tau]; \\ 0, & t \notin [0,\tau], \end{cases} \quad \tau \in (0,T]. \qquad (30)$$

Одержимо таку рівність:

$$\langle \widetilde{u}_t, \chi_{0,\tau}\widetilde{u}\rangle_{U(Q_{0,T})} + \int\limits_0^\tau \Big\langle S(t)(\widetilde{u}_1(t) + b^1(t)) - S(t)(\widetilde{u}_2(t) + b^2(t)), \widetilde{u}(t)\Big\rangle_{V(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,\tau}} (F^1 - F^2, \widetilde{u})_{\mathbb{R}^N}\, dt, \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши формулу інтегрування частинами, звідси одержимо, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{u}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{k=1}^{N}\Big[\alpha|\Delta\widetilde{u}_k|^2+\alpha(\Delta b_k^1-\Delta b_k^2)\Delta\widetilde{u}_k+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_{ik}(x,t)\Big(|\widetilde{u}_{x_i}^1+b_{x_i}^1|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_{k,x_i}^1+b_{k,x_i}^1)-|\widetilde{u}_{x_i}^2+b_{x_i}^2|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_{k,x_i}^2+b_{k,x_i}^2)\Big)\times$$
$$\times\Big((\widetilde{u}_{k,x_i}^1+b_{k,x_i}^1)-(\widetilde{u}_{k,x_i}^2+b_{k,x_i}^2)-(b_{k,x_i}^1-b_{k,x_i}^2)\Big)+$$
$$+g_k(x,t)\Big(|\widetilde{u}^1+b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_k^1+b_k^1)-|\widetilde{u}^2+b^2|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_k^2+b_k^2)\Big)\times$$
$$\times\Big((\widetilde{u}_k^1+b_k^1)-(\widetilde{u}_k^2+b_k^2)-(b_k^1-b_k^2)\Big)+$$
$$+\Big\{\phi_k\Big(\Big(\mathsf{E}\big(\widetilde{u}^1+b^1\big)\Big)_k\Big)-\phi_k\Big(\Big(\mathsf{E}\big(\widetilde{u}^2+b^2\big)\Big)_k\Big)\Big\}\widetilde{u}_k\Big]\,dxdt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0^1-u_0^2|\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}(F^1-F^2,\widetilde{u})\,dxdt,\quad\tau\in(0,T].\tag{31}$$

Оскільки $p(x,t)\geq p_0\geq 2$ та $q(x,t)\geq q_0\geq 2$, то, використавши (26) двічі (раз — для $\mathfrak{q}=p(x,t)$ та $\beta=p(x,t)$, а раз — для $\mathfrak{q}=q(x,t)$ та $\beta=q(x,t)$) після елементарних перетворень, з (31) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{u}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\alpha|\Delta\widetilde{u}|^2+C_5\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}_{x_i}+b_{x_i}^1-b_{x_i}^2|^{p(x,t)}+$$
$$+C_6|\widetilde{u}+b^1-b^2|^{q(x,t)}\Big]\,dxdt\leq\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u_0^1-u_0^2|^2\,dx+$$
$$+J_1(\tau)+J_2(\tau)+J_3(\tau)+J_4(\tau)+J_5(\tau),\tag{32}$$

де сталі $C_5,C_6>0$ залежать лише від a_0,g_0,p_0,p^0,q_0,q^0. Крім того,

$$J_1(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}|F^1-F^2|\cdot|\widetilde{u}|\,dxdt,$$
$$J_2(\tau)=\alpha\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{k=1}^{N}|\Delta b_k^1-\Delta b_k^2|\cdot|\Delta\widetilde{u}_k|\,dxdt,$$
$$J_3(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}(x,t)|\cdot\times$$
$$\times\Big||\widetilde{u}_{x_i}^1+b_{x_i}^1|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_{k,x_i}^1+b_{k,x_i}^1)-|\widetilde{u}_{x_i}^2+b_{x_i}^2|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_{k,x_i}^2+b_{k,x_i}^2)\Big|\cdot|b_{k,x_i}^1-b_{k,x_i}^2|\,dxdt,$$
$$J_4(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{k=1}^{N}|g_k(x,t)|\times$$
$$\times\Big||\widetilde{u}^1+b^1|^{q(x,t)-2}(\widetilde{u}_k^1+b_k^1)-|\widetilde{u}^2+b^2|^{p(x,t)-2}(\widetilde{u}_k^2+b_k^2)\Big|\cdot|b_k^1-b_k^2|\,dxdt,$$
$$J_5(\tau)=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{k=1}^{N}\Big|\phi_k\Big(\Big(\mathsf{E}\big(\widetilde{u}^1+b^1\big)\Big)_k\Big)-\phi_k\Big(\Big(\mathsf{E}\big(\widetilde{u}^2+b^2\big)\Big)_k\Big)\Big|\cdot|\widetilde{u}_k|\,dxdt.$$

З нерівностей

$$\alpha\beta \le \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2, \qquad \alpha\beta \le \varepsilon|\alpha|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|\beta|^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{33}$$

легко отримати оцінки:

$$J_1(\tau) \le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2\,dxdt, \tag{34}$$

$$J_2(\tau) \le C_7(\theta_1)\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\Delta b^1 - \Delta b^2|^2\,dxdt + \theta_1\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\Delta\widetilde{u}|^2\,dxdt, \tag{35}$$

де $\theta_1 > 0$ — довільна стала.

Оскільки $q(x,t) \ge q_0 \ge 2$, то з оцінки (25) для $\alpha = \alpha(x,t) \equiv 1$ та оцінок

$$|b_k^1 - b_k^2| \le |b^1 - b^2|, \quad k \in \{1, \dots, N\}, \tag{36}$$

отримаємо, що

$$J_4(\tau) \le C_8\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1 + b^1| + |\widetilde{u}_2 + b^2|\Big)^{q(x,t)-2} \cdot |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2|\,dxdt \le$$

$$\le J_4^1(\tau) + J_4^2(\tau), \tag{37}$$

де

$$J_4^1(\tau) = C_9\int\limits_{A_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)-2} \cdot |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2|\,dxdt, \tag{38}$$

$$A_{0,\tau} = \{(x,t) \in Q_{0,\tau} \quad | \quad q(x,t) > 2\}, \tag{39}$$

$$J_4^2(\tau) = C_{10}\int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2| \cdot |b^1 - b^2|\,dxdt, \tag{40}$$

$$B_{0,\tau} = Q_{0,\tau} \setminus A_{0,\tau} = \{(x,t) \in Q_{0,\tau} \quad | \quad q(x,t) \equiv 2\}. \tag{41}$$

Очевидно, що виконується оцінка

$$J_4^2(\tau) \le \theta_2\int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^2\,dxdt + C_{11}(\theta_2)\int\limits_{B_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^2\,dxdt =$$

$$= \theta_2\int\limits_{B_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\,dxdt + C_{11}(\theta_2)\int\limits_{B_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\,dxdt. \tag{42}$$

Легко, також, отримати таке узагальнення нерівності Юнга (24)

$$abc \le \varepsilon_1|a|^{\mathfrak{p}(y)} + \varepsilon_2|b|^{\mathfrak{q}(y)} + \widehat{Y}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)|c|^{r(y)}, \tag{43}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$; $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, r \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$; $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0, r_0 > 1$; $\frac{1}{\mathfrak{p}(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \frac{1}{r(y)} = 1$ для $y \in \mathcal{O}$.

Оскільки, в кожній точці $(x,t) \in A_{0,\tau}$ виконується рівність

$$\frac{1}{\frac{q(x,t)}{q(x,t)-2}} + \frac{1}{q(x,t)} + \frac{1}{q(x,t)} = \frac{q(x,t)-2}{q(x,t)} + \frac{2}{q(x,t)} = \frac{q(x,t)}{q(x,t)} = 1,$$

то можна використати нерівність (43) для показників $\frac{q(x,t)}{q(x,t)-2}, q(x,t), q(x,t)$. Зробивши це, отримаємо таке

$$J_4^1(\tau) \le \theta_3 \int\limits_{A_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt +$$

$$+ \theta_4 \int\limits_{A_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt + C_{12}(\theta_3, \theta_4) \int\limits_{A_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt. \tag{44}$$

Підставивши (42) та (44) в оцінку (37) та збільшивши області інтегрування $A_{0,\tau}$ та $B_{0,\tau}$ до $Q_{0,\tau}$, одержимо

$$J_4(\tau) \le \theta_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\, dxdt +$$

$$+ (\theta_2 + \theta_4) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt + C_{13}(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\, dxdt. \tag{45}$$

Проробивши з інтегралом $J_3(\tau)$ такі ж перетворення, як і з $J_4(\tau)$, аналогічно як (45) одержимо оцінку

$$J_3(\tau) \le \theta_6 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big(|\widetilde{u}_{1,x_i}| + |\widetilde{u}_{2,x_i}| + |b^1_{x_i}| + |b^2_{x_i}|\Big)^{p(x,t)}\, dxdt +$$

$$+ (\theta_5 + \theta_7) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i} + b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)}\, dxdt +$$

$$+ C_{14}(\theta_5, \theta_6, \theta_7) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)}\, dxdt, \quad \theta_5, \theta_6, \theta_7 > 0. \tag{46}$$

З умови Ліпшиця **(Ф)** та лінійності операції інтегрування випливає, що

$$J_5(\tau) \le C_{15} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{k=1}^{N} \Big| \Big(\mathsf{E}(\widetilde{u}^1 + b^1)\Big)_k - \Big(\mathsf{E}(\widetilde{u}^2 + b^2)\Big)_k \Big| \cdot |\widetilde{u}_k|\, dxdt =$$

$$= C_{15} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{k=1}^{N} \Big| \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}_k(x, y, t) \Big[\widetilde{u} + b^1 - b^2\Big]\, dy \Big| \cdot |\widetilde{u}_k|\, dxdt.$$

Звідси, використавши (27), легко отримаємо оцінку

$$|J_5(\tau)| \le C_{16} \Big(\int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2\, dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^2\, dxdt \Big). \tag{47}$$

Застосувавши нерівності (34), (35), (45), (46) та (47) до правої частини нерівності (32), після певних перетворень, отримаємо таке

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(\alpha - \theta_1)|\Delta \widetilde{u}|^2 + (C_5 - \theta_5 - \theta_7) \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i} + b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)} +$$

$$+ (C_6 - \theta_2 - \theta_4)|\widetilde{u} + b^1 - b^2|^{q(x,t)}\Big] \,dxdt \le \theta_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} (|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|)^{q(x,t)} \,dxdt +$$

$$+ \theta_6 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big(|\widetilde{u}_{1,x_i}| + |\widetilde{u}_{2,x_i}| + |b^1_{x_i}| + |b^2_{x_i}|\Big)^{p(x,t)} \,dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u^1_0 - u^2_0|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|^2 \,dxdt +$$

$$+ C_7(\theta_1) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\Delta b^1 - \Delta b^2|^2 \,dxdt + C_{14}(\theta_5, \theta_6, \theta_7) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)} \,dxdt +$$

$$+C_{17} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^2 \,dxdt + C_{18}(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \int\limits_{Q_{0,\tau}} |b^1 - b^2|^{q(x,t)} \,dxdt + C_{19} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2 \,dxdt. \quad (48)$$

Нехай

$$J(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^{n} \Big(|\widetilde{u}_{1,x_i}| + |\widetilde{u}_{2,x_i}| + |b^1_{x_i}| + |b^2_{x_i}|\Big)^{p(x,t)} +$$

$$+\Big(|\widetilde{u}_1| + |\widetilde{u}_2| + |b^1| + |b^2|\Big)^{q(x,t)}\Big] \,dxdt. \quad (49)$$

Вибравши $\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5, \theta_7 > 0$ досить малими, $\theta_6 = \theta_3$ та використавши оцінки

$$|\widetilde{u}_{x_i} + (b^1_{x_i} - b^2_{x_i})|^{p(x,t)} \ge 2^{-p^0}|\widetilde{u}_{x_i}|^{p(x,t)} - |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (50)$$

$$|\widetilde{u} + (b^1 - b^2)|^{q(x,t)} \ge 2^{-q^0}|\widetilde{u}|^{q(x,t)} - |b^1 - b^2|^{q(x,t)}, \quad (51)$$

з (48) після деяких перетворень одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} |\widetilde{u}(x,\tau)|^2 \,dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\Delta\widetilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{u}_{x_i}|^{p(x,t)} + |\widetilde{u}|^{q(x,t)}\Big] \,dxdt \le$$

$$\le C_{20}\Big\{\theta_3 J(\tau) + C_{21}(\theta_3)M(\tau) + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |\widetilde{u}|^2 \,dxdt\Big\}, \quad (52)$$

де

$$M(\tau) = \int\limits_{\Omega} |u^1_0 - u^2_0| \,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} |F^1 - F^2|^2 \,dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\Delta b^1 - \Delta b^2|^2 + \sum_{i=1}^{n} |b^1_{x_i} - b^2_{x_i}|^{p(x,t)} + |b^1 - b^2|^2 + |b^1 - b^2|^{q(x,t)}\Big] \,dxdt; \quad (53)$$

$\theta_3 > 0$ — довільне число; стала $C_{21}(\theta_3) > 0$ залежить від θ_3 та не залежить від $\tau, J(\tau), M(\tau), \widetilde{u}$; стала $C_{20} > 0$ не залежить від $\theta_3, \tau, J(\tau), M(\tau), \widetilde{u}$.

Нехай

$$y(\tau) := \int\limits_{\Omega} |u(x,\tau)|^2 \,dx, \quad \tau \in (0,T].$$

Тоді з (52) випливає, що

$$y(\tau) \le C_{20}\Big(\theta_3 J(\tau) + C_{21}(\theta_3)M(\tau) + \int\limits_0^\tau y(t)\,dt\Big), \quad \tau \in (0,T].$$

Використавши лему Гронуола-Белмана, бачимо, що

$$y(\tau) \le \Big(C_{20}\cdot\theta_3 J(\tau) + C_{20}\cdot C_{21}(\theta_3)M(\tau)\Big)e^{C_{20}\tau}.$$

Оскільки

$$J(\tau) \le J(T), \quad M(\tau) \le M(T), \quad e^{C_{20}\tau} \le e^{C_{20}T},$$

то з цієї нерівності, після деяких перепозначень, випливає, що

$$y(\tau) \le \theta_8 J(T) + C_{22}(\theta_8)M(T), \quad \tau \in [0,T], \tag{54}$$

де $\theta_8 > 0$ — довільне число, стала $C_{22}(\theta_8)$ залежить від θ_8 але не залежить від $\tau, y(\tau), J(T), M(T)$.

Нехай $\mathrm{B}_1(R)$ — куля радіуса $R > 0$ в просторі $U(Q_{0,T})$ з центром в точці нуль цього простору. Тоді існує $R_1 > 0$ таке, що $b^1, b^2 \in \mathrm{B}_1(R_1)$. Нехай $\mathrm{B}_2(R)$ та $\mathrm{B}_3(R)$ — кулі радіуса $R > 0$ в просторах H та $L^2(0,T;H)$, відповідно, з центрами у відповідних нульових точках цих просторів. Тоді існують числа $R_2 > 0$ та $R_3 > 0$ такі, що $u_0^1, u_0^2 \in \mathrm{B}_2(R_2)$ та $F^1, F^2 \in \mathrm{B}_3(R_3)$. З оцінки типу (22) випливає існування такого числа $R_4 > 0$, що $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in \mathrm{B}_1(R_4)$.

Нехай $R_5 = \max\{R_1, \dots, R_4\}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Розглянемо праву частину нерівності (54). З наведених вище міркувань випливає оцінка $J(T) \le C_{23}(R_5)$. Тоді візьмемо в (54)

$$\theta_8 = \frac{\varepsilon}{2C_{23}(R_5)}.$$

Матимемо, що

$$y(\tau) \le \frac{\varepsilon}{2} + C_{24}(R_5)M(T). \tag{55}$$

Вибравши u_0^1 близьким до u_0^2, F^1 — до F^2, b^1 — до b^2 (у відповідних просторах), можна зробити $M(T) > 0$ досить малим і досягнути оцінки

$$C_{24}(R_5)\cdot M(T) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Підставивши її в (55), одержимо, що $y(\tau) < \varepsilon$. Враховуючи вигляд $y(\tau)$, звідси випливає, що

$$\|\widetilde{u}; C([0,T];H)\| \le \varepsilon, \tag{56}$$

Використавши (56) в правій частині (52) та провівши міркування, аналогічні як при отриманні (56), з (52) отримаємо, що

$$\|\widetilde{u}; U(Q_{0,T})\| \le C_{25}(\varepsilon), \tag{57}$$

де $C_{25}(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$. □

Очевидним наслідком теореми 1 є така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді задача (1)–(3) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \in SP(u_0, F, b)$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$. Аналогічно як в доведенні теореми 1 отримаємо оцінку типу (31) з $b^1 = b^2$ та нульовою правою частиною. Тому $\widetilde{u} = 0$ і теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. O. Buhrii, N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math., **15** (2017), 859–883.
2. O. Buhrii, N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., **473** (2019), 695–711.
3. O.M. Buhrii, N.V. Buhrii, *Doubly nonlinear elliptic-parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities*, Advances in Nonlinear Variational Inequalities, **22** (2019), no.2, 1–22.
4. A. Kaltenbach, Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, V.2329, Springer Nature Switzerland AG, 2023.
5. M.M. Bokalo, *Correctness of the first boundary-value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity*, J. Math. Sciences, **135** (2006), no.1, 2625–2636.
6. M. Bokalo, T. Bokalo, *Correctness of the Fourier problem for nonlinear parabolic systems in unbounded in all variables domains without conditions at infinity*, Visnyk of the Lviv University, Series Mechanics and Mathematics, **94** (2022), 109–145. (in Ukrainian)
7. N. Protsakh, *Existence and uniqueness of the solution to a mixed problem for a certain parabolic equation*, Visnyk of the Lviv University, Series Mechanics and Mathematics, **59** (2001), 148–157. (in Ukrainian)
8. T.M. Bokalo, *Initial-boundary problems for systems of a high order doubly nonlinear parabolic equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Stud., **38** (2012), no.1, 68–80.

Стаття: надійшла до редколегії 09.04.2024
прийнята до друку 03.09.2025

STABILITY OF SOLUTIONS TO SYSTEM OF PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Ihor KUTSEVOL

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, ihor.kutsevol@lnu.edu.ua

We consider the initial-boundary value problem for the strong nonlinear systems of the integro-differential parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. The stability result for the solution of the problem is proved.

Key words: parabolic system, variable exponent of nonlinearity, weak solution, stability.