

УДК 517.53

## РОЗТЯГ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З РАДІАЛЬНОЮ ТРИЩИНОЮ, НА ПРОДОВЖЕННІ ЯКОЇ УТВОРИЛИСЯ ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ

Максим ШАЙНОГА, Лукіян МАРКЕВИЧ

*Львівський національний університет ім. І. Франка,  
Університетська 1, м. Львів, 79000  
e-mail: Maksym.Shainoha@lnu.edu.ua, Lukiian.Markevych@lnu.edu.ua*

У статті розв'язано задачу про розтяг круглої ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною радіальною тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони. Використавши теорію функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень на берегах тріщини. Крайові умови на межі пластини вдалось задовольнити аналітично. Для моделювання пластичних зон на продовженні тріщини була використана умова пластичності Треска-Сен-Венана. Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язувалася чисельно за допомогою методу механічних квадратур. У статті побудовано графіки довжин пластичних зон в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження та геометричних параметрів задачі.

*Ключові слова:* кругла пластина, тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, задача лінійного спряження, сингулярні інтегральні рівняння.

### 1. Вступ

Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються у машинобудуванні, авіаційній, будівельній, суднобудівній та інших галузях техніки. Під час встановлення чи у процесі експлуатації в них можуть виникати тріщиноподібні дефекти. Під дією зовнішнього навантаження біля тріщиноподібних дефектів виникають високі концентрації напружень, на продовженні яких утворюються пластичні зони, і важливо знати, як ці дефекти будуть впливати на напружено-деформований стан та

на міцність конструкції. Тому задачі розтягу пластин з тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, є актуальними.

У роботі [1] розв'язано задачу про двосторонній згин моментами на безмежності ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною щілиною та пластичними зонами у її вершинах, які моделюються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару. У [4] досліджено напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з двома прямолінійними поверхневими тріщинами з урахуванням пластичних зон на їх продовженні. Вплив пластичної зони, яка виходить під кутом від міжфазної тріщини, на міцність кусково-однорідного тіла досліджено у праці [6]. Задачу згину з розтягом пластини з тріщиною, береги якої контактують, і на продовженні якої утворилися пластичні зони зі зміцненням розв'язано у роботі [7]. У [8] досліджено взаємодію між періодичними тріщинами на продовженні яких утворилися пластичні зони. У праці [9] використано числовий метод скінченних елементів для задачі про розтяг квадратної пластини з тріщиною та пластичними зонами на її продовженні з використанням умови пластичності Треска-Сен-Венана. У дослідженні [10] використано принцип суперпозиції для отримання комплексних розв'язків для визначення напружено-деформованого стану тіла з внутрішньою тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони, з використанням критерію Мора-Кулона. У статті [11] подано метод визначення місцезнаходження втомної тріщини та представлено методологію оцінки розмірів пластичних зон на її продовженні.

Метою статті є визначення напружено-деформованого стану за розтягу круглої пластини з тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони, з використанням умови пластичності Треска-Сен-Венана.

## 2. Формулювання задачі

Розглянемо круглу ізотропну пластину завтовшки  $2h$  із радіальною прямолінійною наскрізною тріщиною довжиною  $2l$ . Розмістимо декартову систему координат  $Ox\bar{y}z$  у серединній площині пластини, так що початок координат співпадає з центром пластини, а вісь  $\bar{O}z$  перпендикулярна до неї. Виберемо у площині  $Oxy$  полярну систему координат  $r$  і  $\theta$  таким чином, щоб точка  $O$  була її полюсом, а вісь  $Ox$  — полярною віссю. Нехай  $(x_0, 0)$  координата центру тріщини у площині  $Oxy$ . Введемо декартову систему координат  $O_1x_1y_1$  з центром  $O_1$  у точці  $(x_0, 0)$ , так щоб вісь  $O_1x_1$  співпадала з лінією тріщини. Припустимо, що за дії рівномірно розподіленого розтягувального навантаження  $P$  на межі (див. рис. 1) на продовженні тріщини утворилися прямолінійні пластичні зони завдовжки  $w_1$  і  $w_2$ . Позначимо через  $S^+$  область зовнішні пластини, через  $S^-$  — всередині, через  $L_1$  — лінію, де розміщена тріщина, прямолінійні пластичні зони —  $L'_1$  і  $L''_1$ , через  $L$  — границю пластини;  $L_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$ .

Згідно формулювання задачі на межі пластини маємо такі крайові умови

$$\sigma_{rr} = P, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad x \in L, \quad (1)$$

де  $\sigma_{rr}$  і  $\tau_{r\theta}$  — компоненти тензора напружень у полярній системі координат.

На берегах тріщини маємо наступні крайові умови

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = 0, \quad \tau_{x_1y_1}^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

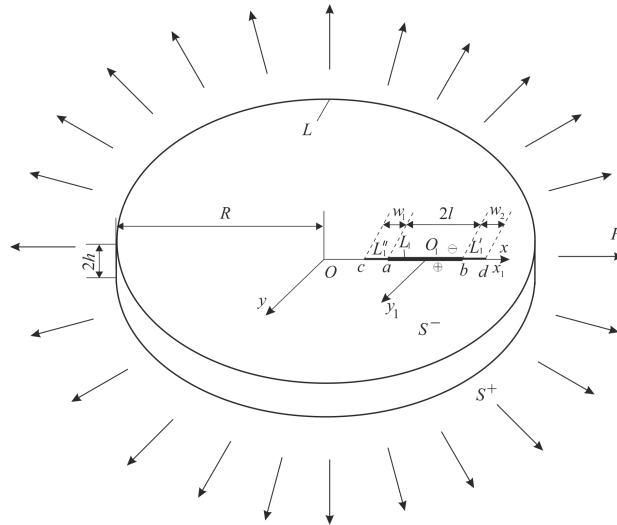


Рис. 1. Кругла пластина з радіальною тріщиною та пластичними зонами

де  $\sigma_{y_1 y_1}$ ,  $\tau_{x_1 y_1}$  — компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини з пластичними зонами при  $y_1 \rightarrow \pm 0$ .

У пластичних зонах маємо такі крайові умови

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(1)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{\pm} = -\tau_0^{(1)}, \quad x_1 \in L'_1, \quad (3)$$

$$\sigma_{y_1 y_1}^{\pm} = \sigma_0^{(2)}, \quad \tau_{x_1 y_1}^{\pm} = \tau_0^{(2)}, \quad x_1 \in L''_1, \quad (4)$$

де  $\sigma_0^{(1)}$ ,  $\sigma_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(1)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$  — невідомі нормальні та дотичні напруження у пластичних зонах.

### 3. Розв’язок задачі

За узагальненого плоского напруженого стану компоненти тензора напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  і вектора переміщень  $u_x$ ,  $u_y$  у декартовій системі координат виражаються через дві функції комплексної змінної  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}), \\ \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(u_x + iu_y) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $z = x + iy$ ,  $\mu = E/(2(1+\nu))$  — модуль зсуву матеріалу пластини,  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ,  $E$  — модуль пружності матеріалу пластини,  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона,  $i^2 = -1$ .

Компоненти тензора напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{r\theta}$  і вектора переміщень  $u_r$ ,  $u_\theta$  у полярній системі координат визначимо за співвідношеннями [2]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}), \\ \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}, \\ \frac{2\mu}{iz} \frac{\partial}{\partial\theta}(u_r + iu_\theta) &= \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}\end{aligned}\quad (6)$$

Нехай

$$\Phi(z) = \Phi_k(z) + \Phi_1(z_1), \quad \Psi(z) = \Psi_k(z) + \Psi_1(z_1) - x_0\Phi_1'(z_1), \quad (7)$$

де функції  $\Phi_K(z)$  і  $\Psi_K(z)$  голоморфні в області  $S^-$ , а функції  $\Phi_1(z_1)$  і  $\Psi_1(z_1)$  голоморфні ззовні тріщини з пластичними зонами.

Введемо функції

$$\Omega_1(z_1) = \overline{\Phi_1(z_1)} + z_1\overline{\Phi_1'(z_1)} + \overline{\Psi_1(z_1)}, \quad (8)$$

$$\Phi_K(z) = -\overline{\Phi_k}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi_k'}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi_k}\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+ \quad (9)$$

де  $\overline{\Phi_1(z_1)} = \overline{\Phi_1(\bar{z}_1)}$ .

Якщо підставити (7)–(9) у (5) та (6), тоді отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} &= \Phi_k(z) - \frac{R^2}{r^2}\Phi_k\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi_k'(z)}\right\} + \\ &+ \Phi_1(z_1) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right)\overline{\Phi_1(z_1)} - \frac{\bar{z}}{z}\left(\Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)}\right)\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{2\mu}{iz} \frac{\partial}{\partial\theta}(u_r + iu_\theta) &= \kappa\Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2}\Phi_k\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi_k'(z)}\right\} + \\ &+ \kappa\Phi_1(z_1) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right)\overline{\Phi_1(z_1)} + \frac{\bar{z}}{z}\left\{\Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)}\right\}\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)} + \Phi_k(z) + \\ &+ \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi_k'(z)} + \frac{R^2}{z^2}\left\{\Phi_k\left(\frac{R^2}{z}\right) - z\overline{\Phi_k'(z)}\right\}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}2\mu \frac{\partial}{\partial\bar{x}}(u_x + iu_y) &= \kappa\Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi_1'(z_1)} + \kappa\Phi_k(z) - \\ &- \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi_k'(z)} - \frac{R^2}{z^2}\left\{\Phi_k\left(\frac{R^2}{z}\right) - z\overline{\Phi_k'(z)}\right\}\end{aligned}\quad (13)$$

Зауважимо, що для функції  $\Phi_k(z)$  виконується

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} a'_0 + a'_1z + \dots, & z \rightarrow 0, \\ b'_0 + b'_1z + \dots, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (14)$$

та

$$a'_0 + \overline{b'_0} = 0, \quad b'_1 = 0. \quad (15)$$

З (12) та крайових умов (2)–(4) отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^+ - (\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^- = 0, \quad t \in \tilde{L}_1,$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$\Omega_1(z) = \Phi_1(z). \quad (16)$$

Додамо (12) та (13)

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) = (1 + \kappa)(\Phi_1(z_1) + \Phi_k(z)).$$

Підставимо крайові умови (2)–(4) у попередню формулу

$$(1 + \kappa)(\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)) = 2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) \right], \quad t \in \tilde{L}_1. \quad (17)$$

де  $[f] = f^+ - f^-$ .

Введемо позначення

$$g'_1(t) = \frac{2\mu}{(1 + \kappa)i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}(u_x + iu_y) \right], \quad t \in \tilde{L}_1.$$

Тоді з (17) маємо таку задачу лінійного спряження

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = g'_1(t),$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{g'_1(t)dt}{t - z_1}. \quad (18)$$

З (10) та крайових умов (1) отримаємо

$$P = \Phi_k^-(s) - \Phi_k^+(s) + \Phi_1(s - x_0) + \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{s} - x_0\right) - \frac{R^2}{s^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{s} - x_0\right) + \left(s - \frac{R^2}{s}\right) \bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{s} - x_0\right) \right\}, \quad s \in L. \quad (19)$$

Якщо ввести функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_k(z) - \Phi_1(z - x_0), & z \in S^+ \\ -P + \Phi_k(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right\}, & z \in S^- \end{cases} \quad (20)$$

тоді з (19) отримаємо задачу лінійного спряження

$$F^+(s) - F^-(s) = 0, \quad s \in L,$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$F(z) = b'_0. \quad (21)$$

Підставимо (21) у (20)

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} b'_0 + \Phi_1(z - x_0), & z \in S^+, \\ b'_0 + P - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)} + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \right. \\ \left. + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \overline{\Phi'_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)} \right\}, & z \in S^-. \end{cases} \quad (22)$$

Підставимо (22) у (14), врахувавши (15), та визначимо сталу  $b'_0$

$$b'_0 = -\frac{P}{2} + \frac{1}{2\pi R^2} \int_c^d t g'_1(t) dt. \quad (23)$$

Якщо підставити крайові умови (2)–(4) у (12) та врахувати (16), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & \Phi_1^+(x_1) + \Phi_1^-(x_1) + \Phi_k(x_1 + x_0) + \left(1 + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2}\right) \overline{\Phi_k(x_1 + x_0)} + \\ & + \left(x_1 + x_0 - \frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) \overline{\Phi'_k(x_1 + x_0)} + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2} \Phi_k\left(\frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) = \\ & = \begin{cases} 0, & x_1 \in [a, b]; \\ \sigma_0^{(2)} + i\tau_0^{(2)}, & x_1 \in [b, d]; \\ \sigma_0^{(1)} - i\tau_0^{(1)}, & x_1 \in [c, a]. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо підставити (16), (18), (22), (23) у (24), тоді у безрозмірних змінних отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомої функції  $g'_1(t)$ .

$$\int_{-1}^1 \left\{ R(\eta, \xi) G(\eta) + S(\eta, \xi) \overline{G(\eta)} \right\} d\eta = H(\xi), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} H(\xi) &= P^* + \begin{cases} 0, & \xi \in [-1 + 2w_1^*/(2 + w_1^* + w_2^*), 1 - 2w_1^*/(2 + w_1^* + w_2^*)]; \\ (\sigma_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)})/\sigma_y, & \xi \in [-1, -1 + 2w_1^*/(2 + w_1^* + w_2^*)]; \\ (\sigma_0^{(2)} - i\tau_0^{(2)})/\sigma_y, & \xi \in [1 - 2w_1^*/(2 + w_1^* + w_2^*), 1], \end{cases} \\ R(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + \frac{\lambda(1 + 0.5w_1^* + 0.5w_2^*)}{2\pi} \left\{ \frac{X - T}{(TX - 1)^2} + T + \frac{T - X}{TX - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{TX - 1} \left( T + \frac{X - T}{TX - 1} \right) + \frac{T}{(TX - 1)^2} \left( T^2 - TX - \frac{2(X^2 + 2XT - T^2)}{TX - 1} \right) \right\} \\ S(\eta, \xi) &= \frac{\lambda(1 + 0.5w_1^* + 0.5w_2^*)}{2\pi(TX - 1)} \left\{ T - X + \frac{X - T + T^2(T - X)}{TX - 1} \right\} - \\ & \quad - \frac{\lambda(1 + 0.5w_1^* + 0.5w_2^*)T}{2\pi}, \end{aligned}$$

$$X = \varepsilon + 0.5\lambda \{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\xi\}, T = \varepsilon + 0.5\lambda \{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\eta\}$$

$$\varepsilon = \frac{x_0}{R}, \lambda = \frac{l}{R}, w_1^* = \frac{w_1}{l}, w_2^* = \frac{w_2}{l}, G(\eta) = G_1(\eta) + iG_2(\eta), g'_1(l\eta) = \sigma_y G(\eta), P^* = \frac{P}{\sigma_y},$$

$G_1(\eta), G_2(\eta)$  – невідомі дійсні функції,  $\sigma_y$  – межа текучості матеріалу пластини.

З умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини з пластичними зонами отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{G_1(\eta) + iG_2(\eta)\} d\eta = 0. \quad (26)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ)  $k = k_1 + ik_2$  визначимо за формулами [3]

$$k^{c,d} = \mp h \lim_{x_1 \rightarrow c,d} \left( g'_1(x_1) \sqrt{(c+x_1)(d-x_1)} / l \right).$$

Оскільки у вершинах пластичних зон  $c, d$  КІЗ рівні нулеві, тоді

$$k^c = 0, \quad k^d = 0. \quad (27)$$

Для пластичних зон  $L'_1$  і  $L''_1$  запишемо умови пластичності Треска-Сен-Вена на ([3])

$$\max \left\{ |\sigma_1^{(j)}|, |\sigma_2^{(j)}|, |\sigma_1^{(j)} - \sigma_2^{(j)}| \right\} = \sigma_y, \quad (28)$$

де

$$\sigma_{1,2}^{(j)} = 0.5 \left( \sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_0^{(j)} \pm \sqrt{(\sigma_{xx}^{(j)} - \sigma_0^{(j)})^2 + 4(\tau_0^{(j)})^2} \right), \quad j = 1, 2.$$

Отже, для знаходження невідомих функцій  $G_1(\eta), G_2(\eta)$ , невідомих нормальних і дотичних напруження у пластичних зонах  $\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \tau_0^{(1)}, \tau_0^{(2)}$  та довжин пластичних зон  $w_1^*, w_2^*$  отримано систему рівнянь (25)–(28).

#### 4. Числовий аналіз

Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на Рис. 2-3 при  $\nu = 0.3$ . Система сингулярних інтегральних рівнянь (25)–(28) розв'язувалася числовим методом механічних квадратур [5].

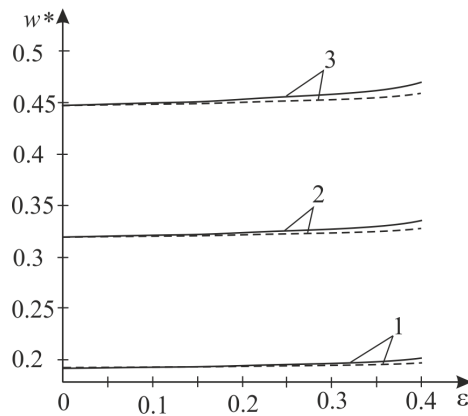


Рис. 2.

На рис. 2 зображено залежність безрозмірених довжин пластичних зон (штрихові лінії), (суцільні лінії) від параметра  $\varepsilon = \frac{x_0}{R}$  при фіксованому значенні. Графіки

1 побудовані при , графіки 2 – , графіки 3 – . Бачимо, що при наближенні тріщини до межі пластини довжини пластичних зон збільшуються.

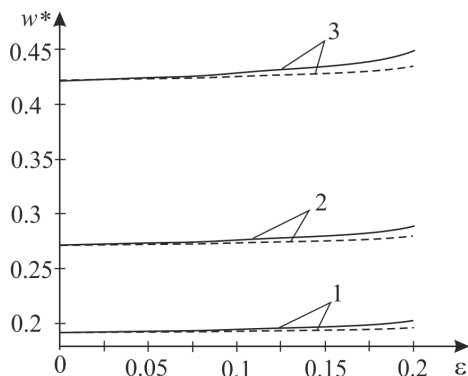


Рис. 3.

На рис. 3 зображено залежність безрозмірених довжин пластичних зон (штрихові лінії), (суцільні лінії) від параметра  $\varepsilon = \frac{x_0}{R}$  при фіксованому значенні. Графіки 1 побудовані при , графіки 2 – , графіки 3 – . Бачимо, що при наближенні тріщини до межі пластини довжини пластичних зон збільшуються.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. О.В. Білаш, *Згин пластини зі щільною за наявності пластичних зон у її вершинах*, Вісник Тернопільського національного технічного університету, **85** (2017), no.1. 23–28.
2. М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, *Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія*, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022, 392 с.
3. Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук, *Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами*, СПОЛОМ, 2003, 320 с.
4. М.М. Николишин, В.К. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян, *Розтяг кусково-однорідної пластини з двома поверхневими тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів з рахуванням пластичних зон по їх фронті*, Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, **2** (2019), 124–135.
5. М.П. Саврук, В.М. Зеленька, *Двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами*, Львів: РАСТР, 2009, 212 с.
6. А.О. Kaminsky, M.V. Dudyk, *Development of plastic zone near tip of interfacial crack with contacting faces*, International Applied Mechanics, **60** (2024), no.2, 149–162.
7. V.K. Opanasovych, M.M. Nykolyshyn, M.S. Slobodian, S.O. Alfavitska, O.K. Bilash, *Combined action of bending and tension of an isotropic plate with through crack in the absence of contact between the faces and with regard for the plastic zones and hardening of material at the tips*, Journal of Mathematical Sciences (United States), **254** (2021), no.1, 117–128.
8. P.P. Shi, *On the plastic zone size of solids containing doubly periodic rectangular-shaped arrays of cracks under longitudinal shear*, Mechanics Research Communications, **67**, (2015), 39–46.

9. D.J. Unger, *Numerical plane stress elastic-perfectly plastic crack analysis under Tresca yield condition with comparison to Dugdale plastic strip model*, Mechanics Research Communications, **34** (2007), no.4, 325–330.
10. G. Wu, W. Wang, S. Peng, *Analytical solution of the stress field and plastic zone at the tip of a closed crack*, Frontiers in Earth Science, **12** (2024), art. no. 1370672.
11. X. Zhao, J. Li, J.-M. Ge, T. Sun, H. Deng, J.-G. Zhu, *Determination of fatigue crack tip location and plastic zone dimensions using displacement fields measured by digital image correlation method*, Engineering Fracture Mechanics, **320** (2025) art. no. 111060.

Стаття: надійшла до редколегії 05.02.2023  
прийнята до друку 11.11.2025

**TENSION OF A CIRCULAR PLATE WITH A RADIAL CRACK,  
IN THE EXTENSION OF WHICH PLASTIC ZONES HAVE BEEN  
FORMED****Maksym SHAINOHA, Lukiian MARKEVYCH***Ivan Franko National University of Lviv,  
str. Universytetska, 1, Lviv, 79000**e-mail: Maksym.Shainoha@lnu.edu.ua, Lukiian.Markevych@lnu.edu.ua*

The article solves the problem of the tension of a circular isotropic plate with a through straight rectilinear radial crack, on the extension of which plastic zones are formed. Using the theory of functions of a complex variable and complex potentials, the solution of the problem is reduced to linear conjugation problems. The obtained linear conjugate problems are solved using a system of singular integral equations with respect to unknown displacement jumps on the crack edges is obtained. The boundary conditions at the plate boundary were satisfied analytically. The Tresca-Saint Venant plasticity condition was used to model the plastic zones on the crack extension. The resulting system of singular integral equations was solved numerically using the method of mechanical quadratures. The article plots the lengths of the plastic zones depending on the applied external load and the geometric parameters of the problem.

*Key words:* circular plate, crack, plastic zones, complex potentials, linear conjugation problem, singular integral equations.