

УДК 519.217

НАПІВМАРКІВСЬКІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ В НЕЛІНІЙНІЙ АПРОКСИМАЦІЇ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua, i_bazylevych@yahoo.com

Досліджено напівмарковські випадкові процеси. Розглянуто напівмарковський процес в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ з нелінійним множником нормування $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для цього процесу побудовано матричнозначні випадкові еволюції. Знайдено границю умовного математичного сподівання випадкової еволюції для напівмарковського процесу.

Ключові слова: напівмарковський процес, випадкова еволюція, багатовимірне рівняння відновлення, нелінійний множник нормування, процес Маркова.

Розглянемо напівмарковський процес $x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$, $t > 0$, $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ з нелінійним множником нормування $g(\varepsilon)$. Нехай $E = \{1, 2, \dots, m\}$ – множина станів, а τ – момент першого стрибка. Тоді цей процес задається напівмарковською матрицею

$$F_{ij}^{\varepsilon}(t) = P \left\{ x(\tau) = j, \tau \leq \frac{t}{g(\varepsilon)} \mid x(0) = i \right\}, \quad i, j \in E, \quad t \geq 0.$$

Функція $F_{ij}^{\varepsilon}(t)$ неспадна, причому $F_{ij}^{\varepsilon}(0) = 0$ та $F_{ij}^{\varepsilon}(\infty) = 1$.

Нехай виконуються такі умови.

1. Існує границя

$$F_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

2. Середній час перебування в кожному зі станів рівномірно інтегровний

$$\sup_{\varepsilon} \int_T^{\infty} t \cdot F_i^{\varepsilon}(dt) \rightarrow 0$$

при $T \rightarrow \infty$, де $F_i(t)$ – негратчасті функції розподілу моменту першого стрибка.

3. Ланцюг Маркова, вкладений в граничний процес $x(t)$, розкладний.

Побудуємо сім'ю випадкових матричнозначних еволюцій

$$N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \begin{cases} \Gamma_{x_0}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), & 0 \leq \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_1; \\ \Gamma_{x_0}(\tau_1)\Lambda_{x_1}(g(\varepsilon))\Gamma_{x_1}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - \tau_1\right), & \tau_1 \leq \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_2; \\ \dots & \\ \Gamma_{x_0}(\tau_1)\Lambda_{x_1}(g(\varepsilon))\Gamma_{x_1}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \dots \cdot \Lambda_{x_n}(g(\varepsilon))\Gamma_{x_n}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - \tau_n\right), & \tau_n \leq \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_{n+1}; \\ \dots & \end{cases}$$

В заданій еволюції $\left\{ \Gamma_{x_i}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \mid x_i \in E, t \geq 0 \right\}$ — сім'я рівномірно неперервних напівгруп додатних стисних операторів в R^d . Ці оператори визначають неперервну складову випадкової еволюції напівмарківського процесу $x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ на проміжках сталості $[\tau_n; \tau_{n+1})$. Стрибки випадкової еволюції визначаються лінійними стисними операторами $\{\Lambda_{x_i}(g(\varepsilon)) \mid x_i \in E\}$ в моменти відновлення τ_n .

Нехай виконуються такі умови.

1. Існує границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda_i(g(\varepsilon)) = I$$

за нормою оператора для кожного $i \in E$.

2. Існує границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_i\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \Gamma_i(t)$$

за нормою оператора для кожного $i \in E$.

3. Існує інтеграл

$$\int_0^{\infty} (\Gamma_i(u) - I) F_i(du) \cdot \vec{1} = \vec{0},$$

для кожного $i \in E$.

4. Для кожного $i, j \in E$

$$\sum_{i \in E} p_i^{(s)} \cdot \vec{1} \cdot \int_0^{\infty} (\Gamma_i(u) - I) F_{ij}(du) = \vec{0}.$$

Сформулюємо теорему.

Теорема. Нехай виконуються умови 1–4 та існує нормуючий множник $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і ненульова матриця C . Тоді існує границя умовного математичного

сподівання напіварковської випадкової еволюції

$$E \left\{ N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j | x(0) = i \right\} \rightarrow c_{sk}(t) \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} [\vec{1} \otimes \vec{1}] \cdot E_j \left\{ \int_0^\tau \Gamma_j(u) du \right\},$$

$$\text{де } c_{sk} = [e^{tC}]_{sk}, \pi^{(k)} = \sum_{i,j \in E_k} p_i^{(k)} \cdot \left(\vec{1} \cdot \int_0^\infty t \Gamma_i(t) F_{ij}(dt) \cdot \vec{1} \right).$$

Доведення. Позначимо

$$E_i(N(t), x(t) = j) = E(N(t), x(t) = j | x(0) = i).$$

За формулою повної ймовірності маємо, що

$$E_i(N(t), x(t) = j) = E_i(N(t), x(t) = j, t < \tau) + \int_0^t E_i(N(t), x(t) = j, \tau \in du),$$

де τ – момент першого стрибка напіварковського процесу $x(t)$.

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t E_i(N(t), x(t) = j, \tau \in du) &= \sum_{l=1}^d \int_0^t E_i(N(t), x(t) = j, x(\tau) = l, \tau \in du) = \\ &= \sum_{l=1}^d \int_0^t P_i(x(\tau) = l, \tau \in du) \cdot E_i(N(t), x(t) = j | x(u) = l, \tau = u) = \\ &= \sum_{l=1}^d \int_0^t F_{il}(du) \Gamma_i(u) \Lambda_l E_l(N(t-u), x(t-u) = j). \end{aligned}$$

Отже, $E_i(N(t), x(t) = j)$ є розв'язком багатовимірної рівняння відновлення

$$X_{ij}(t) = A_{ij}(t) + \sum_{l=1}^m K_{il} X_{lj}(t),$$

де

$$X_{ij}(t) = E_i(N(t), x(t) = j),$$

$$A_{ij}(t) = E_i(N(t), x(t) = j, t < \tau) = \alpha_{ij} \Gamma_i(t) P_i(t < \tau),$$

$$K_{ij}(dt) = E_i(N(t), x(\tau) = j, \tau \in dt) = F_{ij}(dt) \Gamma_i(t) \Lambda_j.$$

Величини $X_{ij}(t), A_{ij}(t), K_{ij}(t)$ – матриці розмірності $d \times d$.

Розглянемо функції $A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$. Тоді

$$\left\| A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \right\| \leq P_i \left\{ \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau \right\} = 1 - F\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Оцінимо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} \left\| A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - F \left(\frac{k}{g(\varepsilon)} \right) \right) \leq \int_0^{\infty} \left(1 - F \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right) dt < \infty.$$

Отже, при $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} \left\| A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\|$ рівномірно збігається за ε .

Далі потрібно довести, що сім'я функцій $A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right)$ рівномірно безпосередньо інтегровна за Ріманом [4].

Розглянемо таку оцінку

$$\begin{aligned} & \sup_{kh \leq t \leq (kh+h)} \left\| A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| - \inf_{kh \leq t \leq (kh+h)} \left\| A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| \leq \\ & \leq \sup_{kh \leq t \leq u \leq kh+h} \left\| A_{ij} \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) - A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\|. \end{aligned}$$

Позначимо

$$w(h) = \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leq t-u \leq h} \left\| A_{ij} \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) - A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} w(h) &= \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leq t-u \leq h} \left\| \Gamma_i \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) P_i \{u < \tau\} \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\varepsilon} \sup_{0 \leq t-u \leq h} \left\| \Gamma_i \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} - \frac{t}{g(\varepsilon)} \right) - I \right\| P_i \{t < \tau\} \leq \\ &\leq \sup_{\varepsilon} \left\| \Gamma_i \left(\frac{h}{g(\varepsilon)} \right) - I \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$.

Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо таку різницю

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon} \left(h \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{kh \leq t \leq u \leq kh+h} \left\| A_{ij} \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) - A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| \right) = \\ &= \sup_{\varepsilon} \left(h \cdot \left(\sum_{k=0}^{[T/h]} \sup_{kh \leq t \leq u \leq kh+h} \left\| A_{ij} \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) - A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{[T/h]}^{\infty} \sup_{kh \leq t \leq u \leq kh+h} \left\| A_{ij} \left(\frac{u}{g(\varepsilon)} \right) - A_{ij} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right\| \right) \right) \leq \\ &\leq h \cdot \frac{T}{h} \cdot w(h) + 2 \sup_{\varepsilon} \sum_{kh > T} P_i \{kh + h < \tau\} \leq \\ &\leq T \cdot w(h) + 2 \sup_{\varepsilon} \int_T^{\infty} \left(1 - F_i \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \right) dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0, g(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

Звідки отримуємо рівномірну безпосередню інтегровність.

Існує такий нелінійний множник нормування $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ та матриця C , що

$$X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \rightarrow [e^{tC}]^{sk} \frac{1}{\pi^{(k)}} \cdot \left(\vec{1} \otimes \vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty A_{ij}(u) du \right)$$

при $g(\varepsilon) \rightarrow 0, i \in E_s, j \in E_k$. Тоді

$$\pi^{(k)} = \left(\vec{v}^{(k)} \int_0^\infty t K^{(k)} dt, \vec{1} \right) = \sum_{i,j \in E_k} p_i^{(k)} \left(\vec{1} \cdot \int_0^\infty t \Gamma_i(t) F_{ij}(dt), \vec{1} \right),$$

де $\vec{v}$ - лівий власний вектор матриці K для її максимального власного значення 1.

Враховуючи, що

$$A_{ij}(t) = \alpha_{ij} \Gamma_i(t) P_i \{t < T\},$$

отримуємо

$$\begin{aligned} X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) &\rightarrow [e^{tC}]^{sk} \frac{1}{\pi^{(k)}} \cdot \left(\vec{1} \otimes \vec{v}^{(k)} \cdot \int_0^\infty \Gamma_j(u) P_j \{u < \tau\} du \right) = \\ &= c_{sk}(t) \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} (\vec{1} \otimes \vec{1}) \cdot E_j \int_0^\tau \Gamma_j(u) du. \end{aligned}$$

Отже,

$$E \left\{ N\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j | x(0) = i \right\} \rightarrow c_{sk}(t) \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} [\vec{1} \otimes \vec{1}] \cdot E_j \left\{ \int_0^\tau \Gamma_j(u) du \right\}$$

при $g(\varepsilon) \rightarrow 0$. □

У підсумку доведено теорему та знайдено границю умовного математичного сподівання випадкової еволюції з нелінійним множником нормування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. О. А. Ярова, Я. І. Єлейко, *Гранична теорема для багатовимірного рівняння відновлення*, Кібернетика та системний аналіз **58** (2022), no. 1, 166–179; **English version:** O. A. Yarova and Ya. I. Yeleyko, *Limit theorem for multidimensional renewal equation*, Cybern. Syst. Anal. **58** (2022), no. 1, 144–147. DOI: 10.1007/s10559-022-00443-4
2. О. А. Ярова and Я. І. Єлейко, *The renewal equation in nonlinear approximation*, Мат. Студії **56** (2021), то. 1, р. 103–106. DOI: 10.30970/ms.56.1.103-106
3. О. Ярова, *Асимптотичне зображення нормуючого множника рівняння відновлення*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **89** (2020), 80–88. DOI: 10.30970/vmm.2020.89.080-088
4. Я. І. Єлейко, В. М. Шуренков, *Про асимптотичне зображення перронового кореня матричнозначної стохастичної еволюції*, Укр. Мат. Ж. **48** (1996), no. 1, 35–43; **English version:** Ya. I. Eleiko and V. M. Shurenkov, *On an asymptotic representation of the Perron root of a matrix-valued evolution*, Ukr. Math. J. **48** (1996), no. 1, 38–47. DOI: 10.1007/BF02390981
5. W. Feller, *A simple proof for renewal theorems*, Commun. Pure Appl. Math. **14** (1961), no. 3, 285–293. DOI: 10.1002/cpa.3160140308

Стаття: надійшла до редколегії 03.07.2024
доопрацьована 02.09.2024
прийнята до друку 11.12.2023

SEMI-MARKOV STOCHASTIC EVOLUTIONS IN A NONLINEAR APPROXIMATION

Iryna BAZYLEVYCH, Oksana YAROVA

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, UKRAINE
e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua, i_bazylevych@yahoo.com*

This work is dedicated to the study of semi-Markov random processes. A semi-Markov process is considered in the time scale $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ with a nonlinear normalization factor $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. For this process, matrix-valued random evolutions are constructed. The limit of the conditional mathematical expectation of the random evolution for the semi-Markov process is found.

Key words: Semi-Markov process, stochastic evolution, multivariate renewal equation, nonlinear normalization factor, Markov process.