УДК 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА

Оксана ГАЛАЗЮК, Ігор ТУРЧИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

З використанням інтегрального перетворення Лагерра-Фур'є побудовано розв'язок осесиметричної нестаціонарної задачі теплопровідності для радіально-шаруватого циліндра при локальному нагріві його граничних поверхонь.

Ключові слова: інтегральне перетворення Лагерра-Фур'є, нестаціонарна задача теплопровідності, радіально-шаруватий циліндр.

Найпоширеніший метод дослідження фізико-механічних полів у композитних тілах і середовищах – гомогенізація його властивостей за однією або декількома координатами з подальшим вивченням їхньої поведінки як гіпотетично однорідних структур [1]. Такий підхід допомагає спростити загальне формулювання задачі, використати відомі методи досліджень фізико-механічних полів в однорідних тілах. У рамках такого підходу не вдається достовірно визначити якісні та кількісні характеристики процесів у самому композиті, зумовлені його неоднорідністю.

Інший підхід, який враховує внутрішню неоднорідність і взаємодію окремих складових композита, приводить до розгляду окремих задач для кожного елемента композита з подальшим врахуванням умов спряження [2]. На підставі цього підходу вдається врахувати реальний стан у кожному шарі та визначити особливості трансформації фізико-механічних полів на поверхнях розділу. Сьогодні досить ґрунтовно вивчено стаціонарні процеси в таких тілах, проте в сучасній літературі практично немає синтезуючих аналітичних методів, які б дали змогу вирішити подібну проблему у випадку нестаціонарного процесу від математичного моделювання до здійснення достовірного кількісного та якісного аналізу.

Мета нашої праці – розробити аналітико-числової методики побудови розв'язку квазістатичних осесиметричних задач теплопровідності для радіально-шаруватих циліндричних тіл і дослідження перехідного температурного поля в композитних циліндричних тілах, зумовлених раптовою зміною температур граничних поверхонь.

Розглянемо композит, що складається з M вкладених циліндрів різної товщини і з різними фізико-механічними властивостями. Циліндр з індексом "1" є внутрішнім циліндричним шаром композита, а з індексом

"M" – зовнішнім. Джерелом перехідного термонапруженого стану в композиті є раптова локальна (за осьовою координатою) зміна температур граничних внутрішньої та зовнішньої поверхні.

Нестаціонарне температурне поле в тілі визначається розв'язком початково-крайової задачі для рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho T^{(i)}\right)+\partial_\gamma^2 T^{(i)}=\frac{1}{\tilde{a}_2}\frac{\partial T^{(i)}}{\partial\tau},\quad i=1,M \tag{1}$$

при таких крайових умовах

$$T^{(1)}\left(\rho_0,\gamma,\tau\right)=T_0\left(\gamma,\tau\right);\quad T^{(M)}(\rho_M,\gamma,\tau)=T_M\left(\gamma,\tau\right), \tag{2}$$

умовах спряження

$$\begin{gathered}T^{(i)}\left(\rho_i,\gamma,\tau\right)=T^{(i+1)}\left(\rho_i,\gamma,\tau\right);\\ \tilde{\lambda}_T^{(i)}\partial_\rho T^{(i)}\left(\rho_i,\gamma,\tau\right)=\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\partial_\rho T^{(i+1)}\left(\rho_i,\gamma,\tau\right),\end{gathered} \tag{3}$$

та при нульових початкових умовах

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,0)=0, \tag{4}$$

де $T^{(i)}(\rho,\gamma,Fo)$ – температурне поле i-го циліндра; $\rho=r/R_0$, $\gamma=z/R_0$ – безрозмірні змінні циліндричної системи координат; $\tau=at/R_0^2$ – критерій Фур'є; $T^{(0)}(\gamma,\tau)$ – температура внутрішньої поверхні композита; $\tilde{a}_i=a/a_i$, $\tilde{\lambda}_T^i=\lambda_T^{i+1}/\lambda_T^i$, λ_T^i,a_i – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності i-го шару; a – коефіцієнт температуропровідності деякого матеріалу (вибирається залежно від завдань числового аналізу); $\rho_i=R_i/R_0$, R_0,R_M – радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхонь композита $R_i;\left(i=\overline{1,M-1}\right)$ – радіуси поверхонь спряження між шарами.

Без обмеження загальності будемо вважати, що температури граничних поверхонь симетричні щодо площини $\gamma=0$. Застосувавши до задачі (1)–(3) інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [3] та $\cos$-перетворення Фур'є за змінною γ [4], врахувавши нульову початкову умову (4), одержимо трикутну послідовність крайових задач для звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{1}{\rho}d_\rho\left(\rho d_\rho\overline{T}_n^{(i)}\right)-\left(\xi^2+\lambda\frac{1}{\tilde{a}_i}\right)\overline{T}_n^{(i)}=\lambda\frac{1}{\tilde{a}_i}\sum_{m=0}^{n-1}\overline{T}_m^{(i)},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ i=\overline{1,2} \tag{5}$$

з відповідно трансформованими крайовими умовами та умовами спряження (2), (3)

$$\overline{T}_n^{(1)}(\xi,\rho_0) = \overline{T}_{0,n}(\xi); \quad \overline{T}_n^{(M)}(\xi,\rho_M) = \overline{T}_{M,n}(\xi), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\rho_i) = \overline{T}_n^{(i+1)}(\xi,\rho_i); \\ &\tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho \overline{T}_n^{(i)}(\xi,\rho_i) = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho \overline{T}_n^{(i+1)}(\xi,\rho_i), \end{aligned} \tag{7}$$

Тут $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\rho) = \int\limits_0^\infty \cos(\xi\gamma)\left[\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda\tau)T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)L_n(\lambda\tau)d\tau\right]d\gamma$ – зображення за Лагерром і Фур'є, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра; λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок послідовності (5) можна записати у вигляді алгебричної згортки [3]

$$T_n^i = \sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi,\rho) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi,\rho)\right], \tag{8}$$

де $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda\frac{1}{\tilde{a}_i}}$, $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$, $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ – функції, які визначають з трансформованих умов (6), (7). Відповідно $G_j(\cdot)$ і $W_j(\cdot)$ – лінійно-незалежні послідовності фундаментальних розв'язків систем (1.5), які можна подати у такому вигляді

$$G_j^{(i)}(\xi,\rho) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^{(i)}\rho^k \mathrm{I}_k(\omega_i\rho), \; W_j(\xi,\rho) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^{(i)}\left(-\rho^k\right)\mathrm{K}_k(\omega_i\rho). \tag{9}$$

Тут $\mathrm{I}_p(\cdot), \mathrm{K}_p(\cdot)$ – модифіковані функції Бесселя [5].

Для знаходження коефіцієнтів $a_{j,k}^{(i)}$ підставимо вирази $G_j^{(i)}(\xi,\rho)$, які мають подання (9) в (5). Оскільки

$$\frac{1}{\rho}d_\rho\left(\rho d_\rho G_j^{(i)}\right) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^{(i)}\omega\left[2k\rho^{k-1}\mathrm{I}_{k-1}(\omega\rho) + \omega\rho^k\mathrm{I}_k(\omega\rho)\right],$$

то після підстановки цього виразу в рівняння

$$\frac{1}{\rho}d_\rho\left(\rho d_\rho G_j\right) - \omega^2 G_j = \lambda\frac{1}{\tilde{a}_i}\sum_{m=0}^{j-1} G_m, \quad n = 0, \; 1, \; 2, \; \dots \; , \quad i = \overline{1,M}$$

одержимо

$$2\omega\sum_{k=1}^{j} k a_{j,k}\rho^{k-1}I_{k-1}(\omega\rho) = \lambda\frac{1}{\tilde{a}_i}\sum_{m=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{m} a_{j,k}\rho^k I_k(\omega\rho).$$

Прирівнюючи у цьому рівнянні коефіцієнти при однакових ρ^k і $\mathrm{I}_k(\omega\rho)$ ($k = 1,2,..$), прийдемо до рекурентних співвідношень на коефіцієнти $a_{j,k}$

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{\lambda}{2\tilde{a}_i\omega_i(k+1)}\sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)}, \; k = 0,1,\ldots j-1; \; j = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Для визначення функцій $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$, $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ підставимо розв'язок (8) в крайові умови (6) й умови спряження (7). В результаті одержимо послідовність алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,\rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,\rho_0)\Big] = \overline{T}_{0,n}(\xi),\\
&\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(M)}(\xi)G_j^{(M)}(\xi,\rho_M) + B_{n-j}^{(M)}(\xi)W_j^{(M)}(\xi,\rho_M)\Big] = \overline{T}_{M,n}(\xi);
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi,\rho_i)\Big] =\\
&= \sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi)G_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi)W_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i)\Big],\\
&\tilde{\lambda}_T^{(i)}\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(i)}(\xi)d_\rho G_j^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)d_\rho W_j^{(i)}(\xi,\rho_i)\Big] =\\
&= \tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi)d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi)d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i)\Big].
\end{aligned} \tag{12}$$

У рівняннях (11), (12) в лівій частині залишимо доданки, що містять невідомі $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, решту перенесемо в праву частину

$$\begin{aligned}
&A_n^{(1)}(\xi)G_0^{(1)}(\xi,\rho_0) + B_n^{(1)}(\xi)W_0^{(1)}(\xi,\rho_0) = \overline{T}_{0,n}(\xi) -\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{n}\Big[A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,\rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,\rho_0)\Big],\\
&A_n^{(M)}(\xi)G_0^{(M)}(\xi,\rho_M) + B_n^{(M)}(\xi)W_0^{(M)}(\xi,\rho_M) = \overline{T}_{M,n}(\xi) -\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{n}\Big[A_{n-j}^{(M)}(\xi)G_j^{(M)}(\xi,\rho_M) + B_{n-j}^{(M)}(\xi)W_j^{(M)}(\xi,\rho_M)\Big];
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& A_n^{(i)}(\xi) G_0^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_n^{(i)}(\xi) W_0^{(i)}(\xi,\rho_i) - \\
& - A_n^{(i+1)}(\xi) G_0^{(i+1)}(\xi,\rho_i) - B_n^{(i+1)}(\xi) W_0^{(i+1)}(\xi,\rho_i) = \\
& = \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) \Big] - \\
& - \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi,\rho_i) \Big],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
& A_n^{(i)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho G_0^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_n^{(i)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\rho W_0^{(i)}(\xi,\rho_i) - \\
& - A_n^{(i+1)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho G_0^{(i+1)}(\xi,\rho_i) - B_n^{(i+1)}(\xi) \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\rho W_0^{(i+1)}(\xi,\rho_i) = \\
& = \tilde{\lambda}_T^{(i+1))} \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi,\rho_i) \Big] - \\
& - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho G_j^{(i)}(\xi,\rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho W_j^{(i)}(\xi,\rho_i) \Big].
\end{aligned}
$$

Якщо врахувати значення для $G_0^{(i)}(\xi,\rho)$ і $W_0^{(i)}(\xi,\rho)$ відповідно до подань (9) та прийняти $a_{0,0} = 1, a_{j,0} = 0,\ j = 1,\ 2, \ldots$, то з (13) одержимо трикутні послідовності лінійних рівнянь стосовно невідомих $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, які в матричному записі матимуть вигляд

$$
\left(b_{m,k} \right) \left\{ A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)} \right\}^{\mathrm{T}} = \left\{ c_{n,k} \right\}^{\mathrm{T}}, \quad n = 0,1,2, \ldots \ . \tag{14}
$$

Матриця $\left(b_{m,k} \right)$ має вигляд

$$
\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & \cdots & & 0 \\
& [\mathbf{B}_2] & & & & & \\
0 & & \ddots & & & & 0 \\
& & & [\mathbf{B}_i] & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & & & [\mathbf{B}_{M-1}] & \\
0 & & \cdots & & 0 & b_{2M-1,2M} & b_{2M,2M}
\end{pmatrix}, \tag{15}
$$

де $[\mathbf{B}_i]$ – блоки розмірності 2×4

$$[\mathbf{B}_i] \equiv \begin{bmatrix} b_{2i,2i-1} & b_{2i,\,2i} & b_{2i,\,2i+1} & b_{2i,\,2i+2} \\ b_{2i+1,\,2i-1} & b_{2i+1,\,2i} & b_{2i+1,\,2i+1} & b_{2i+1,\,2i+2} \end{bmatrix},$$

а ненульові коефіцієнти обчислюють за формулами

$$b_{1,1} = \mathrm{I}_0\left(\omega_1\rho_0\right) \;;\quad b_{1,2} = \mathrm{K}_0\left(\omega_1\rho_0\right) \;;\quad b_{2i,2i-1} = \lambda_T^{(i)}\omega_i\,\mathrm{I}_1\left(\omega_i\rho_i\right) \;;$$
$$b_{2i,2i} = -\lambda_T^{(i)}\omega_i\,\mathrm{K}_1\left(\omega_i\rho_i\right);\quad b_{2i,2i+1} = -\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1}\,\mathrm{I}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right) \;;$$

$$b_{2i,2i+2} = \lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1}\,\mathrm{K}_1\left(\omega_{i+1}\rho_i\right); b_{2i+1,2i-1} = \mathrm{I}_0\left(\omega_i\rho_i\right); b_{2i+1,\,2i} = \mathrm{K}_0\left(\omega_i\rho_i\right); \quad (16)$$
$$b_{2i+1,\,2i+1} = -\mathrm{I}_0\left(\omega_{i+1}\rho_i\right); b_{2i+1,\,2i+2} = -\mathrm{K}_0\left(\omega_{i+1}\rho_i\right); i = \overline{1,\, M-1};$$
$$b_{2M-1,\,2M} = \mathrm{I}_0\left(\omega_M\rho_M\right);\; b_{2M,\,2M} = \mathrm{K}_0\left(\omega_M\rho_M\right).$$

Стовпець вільних членів $\left\{c_{n,\,k}\right\}$ – є правою частиною рівнянь (13), його компоненти мають вигляд

$$c_{n,1} = \bar{T}_{0,n}(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j^{(1)}(\xi,\rho_0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j^{(1)}(\xi,\rho_0)\right] \;;$$

$$c_{n,\,2M} = \bar{T}_{M,n}(\xi) - \sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(M)}(\xi)G_j^{(M)}\left(\xi,\rho_M\right) + B_{n-j}^{(M)}(\xi)W_j^{(M)}\left(\xi,\rho_M\right)\right];$$

$$\begin{aligned} c_{n,2i} = & -\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}\left(\xi,\rho_i\right) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}\left(\xi,\rho_i\right)\right] + \\ & +\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi)G_j^{(i+1)}\left(\xi,\rho_i\right) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi)W_j^{(i+1)}\left(\xi,\rho_i\right)\right],\quad i = \overline{1,M-1} \;; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} c_{n,\,2i+1} = & -\tilde{\lambda}_T^{(i)}\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)d_\rho G_j^{(i)}\left(\xi,\,\rho_i\right) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)d_\rho W_j^{(i)}\left(\xi,\,\rho_i\right)\right] + \\ & +\tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}^{(i+1)}(\xi)d_\rho G_j^{(i+1)}\left(\xi,\,\rho_i\right) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi)d_\rho W_j^{(i+1)}\left(\xi,\,\rho_i\right)\right],\;\; i = \overline{1,M-1}\,. \end{aligned}$$

Структура (15) матриці $\left[b_{k,l}\right]$ дає змогу досить просто звести її до трикутного вигляду і записати рекурентний розв'язок

$$B_n^{(M)} = \frac{c^*_{n,2M}}{b^*_{2M,2M}}; \quad A_n^{(M)} = \frac{1}{b^*_{2M-1,2M-1}}\left(c^*_{n,2M-1} - B_n^{(M)} b^*_{2M-1,2M}\right);$$

$$B_n^{(i)} = \frac{1}{b^*_{2i,2i}}\left(c^*_{n,2i} - B_n^{(i+1)} b^*_{2i,2i+2} - A_n^{(i+1)} b^*_{2i,2i+1}\right), \quad i = \overline{M-1,1}\ ; \qquad (18)$$

$$A_n^{(i)} = \frac{1}{b^*_{2i-1,2i-1}}\left(c^*_{n,2i-1} - B_n^{(i)} b^*_{2i-1,2i}\right), \quad i = \overline{M-1,1}\ ,$$

де зроблено такі позначення:

$$b^*_{1,1} = b_{1,1} = I_0(\omega_1\rho_0); \; b^*_{1,2} = b_{1,2} = K_0(\omega_1\rho_0);$$

$$b^*_{2i,\,2i} = -\lambda_T^{(i)}\omega_i\left(K_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - I_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i}\right)\ ;$$

$$b^*_{2i,\,2i+1} = -\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\ ;$$

$$b^*_{2i,\,2i+2} = \lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\ ;$$

$$b^*_{2i+1,\,2i+1} = -\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\left(K_0(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - b^*_{2i-1,\,2i} I_0(\omega_i\rho_i)\right) -$$

$$-\lambda_T^{(i)}\omega_i I_0(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\left(K_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - I_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i}\right)\ ;$$

$$b^*_{2i+1,\,2i+2} = \lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\left(K_0(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - b^*_{2i-1,\,2i} I_0(\omega_i\rho_i)\right) -$$

$$-\lambda_T^{(i)}\omega_i K_0(\omega_{i+1}\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1}\left(K_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - I_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i}\right), \quad i = \overline{1,M-1};$$

$$b^*_{2M,2M} = b^*_{2M-1,2M} I_0(\omega_M\alpha_M) - K_0(\omega_M\alpha_M)\,b^*_{2M-1,2M-1};$$

$$c^*_{n,\,1} = c_{n,\,1}; \quad c^*_{n,\,2i} = c_{n,\,2i} b^*_{2i-1,\,2i-1} - c_{n,\,2i-1}\lambda_T^{(i)}\omega_i I_1(\omega_i\rho_i);$$

$$c^*_{n,\,2i+1} = \left(c_{n,\,2i} b^*_{2i-1,\,2i-1} - c_{n,\,2i-1}\lambda_T^{(i)}\omega_i I_1(\omega_i\rho_i)\right)\times$$

$$\times\left(K_0(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - b^*_{2i-1,\,2i} I_0(\omega_i\rho_i)\right) +$$

$$+\lambda_T^{(i)}\omega_i\left(K_1(\omega_i\rho_i)\,b^*_{2i-1,\,2i-1} - b^*_{2i-1,\,2i} I_1(\omega_i\rho_i)\right)\times$$

$$\times\left(c_{n,\,2i+1} b^*_{2i-1,\,2i-1} - c_{n,\,2i-1} I_0(\omega_i\rho_i)\right), \quad i = \overline{1,M-1};$$

$$c^*_{n,2M} = c^*_{n,2M-1} I_0(\omega_M\alpha_M) - c^*_{n,\,2M} b^*_{2M-1,2M-1}.$$

Послідовно знайшовши зі співвідношень (18) всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а, отже, і $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)$, остаточний розв'язок задачі (1)-(4) подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)=\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}^{(i)}G_j(\omega_i,\rho)+B_{n-j}^{(i)}W_j(\omega_i,\rho)\right]\cos(\xi\gamma)d\xi. \quad (19)$$

---

1. *Matysiak S., Wozniak Cz.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // Acta mech. – 1986. – Vol. 65. – P. 223–238.
2. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.
3. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955.
5. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

LAGUERRE'S POLINOMS METHOD IN NON-STATIONARY AXISYMMETRICAL PROBLEM OF HEAT CONDUCTION FOR A RADIAL-LAYERED CYLINDER

Oksana Halazyuk, Igor Turchyn

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Using Fourier-Laguerre's integral transformation method the solution of the non-stationary axisymmetrical heat conduction problem for a radial-layered cylinder under local heating is constructed.

Key words: Fourier-Laguerre's integral transformation, non-stationary heat conduction problem, radial-layered cylinder.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006