ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 93. С. 42–53
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 93. P. 42–53
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.042-053

УДК 512.535

ПРО ГОМОМОРФІЗМИ БІЦИКЛІЧНИХ РОЗШИРЕНЬ АРХІМЕДОВИХ ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНИХ ГРУП

Олег ГУТІК, Оксана ПРОХОРЕНКОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
oksana.prokhorenkova@lnu.edu.ua

Нехай $\mathscr{B}^+(G)$ — біциклічне розширення лінійно впорядкованої групи G, означене в [22]. Ми доводимо, якщо G і H — архімедові лінійно впорядковані групи, то кожний o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G \to H$ породжує гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$, і кожний гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$ породжує o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G \to H$.

Ключові слова: напівгрупа, біциклічний моноїд, біциклічне розширення, лінійно впорядкована група, гомомофізм, o-гомомофізм, ізоморфізм, категорія, ізоморфні категорії.

1. Вступ, означення та мотивація досліджень

Ми користуватимемося термінологією з [11, 12, 13, 18, 26, 28]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω, а адитивну групу цілих чисел зі звичайним на ній лінійним порядком – через $\mathbb{R}$. Також, якщо $\leq$ – передпорядок на множині X, то через $\leq^*$ будемо позначати дуальний передпорядок на X, тобто $a \leq^* b$ тоді і лише тоді, коли $b \leq a$, $a, b \in X$. Очевидно, що дуальний порядок до лінійного порядку знову є лінійним.

Якщо S – напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [1, 28]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до x*. *В'язка* – це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* – це комутативна в'язка.

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M15, 18B40

Якщо S – напівгрупа, то ми позначатимемо відношення Ґріна на S через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$:

$$
\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.
\end{aligned}
$$

(див. означення в [11, §2.1] або [19]). Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не містить власних двобічних ідеалів, тобто S складається з одного $\mathscr{J}$-класу, і *біпростою*, якщо S складається з одного $\mathscr{D}$-класу. *Передпорядки Ґріна* $\leq_{\mathscr{L}}$ і $\leq_{\mathscr{R}}$ на напівгрупі S визначаються так:

$$
\begin{aligned}
&a \leq_{\mathscr{L}} b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a \subseteq S^1b;\\
&a \leq_{\mathscr{R}} b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 \subseteq bS^1,
\end{aligned}
$$

де $a, b \in S$ [20].

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для довільних $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку говоритимемо, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*.

Якщо S – напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$, для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див. [11, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p, q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [8] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. У [2] описано структуру напівгрупи ендоморфізмів біциклічної напівгрупи та розширеної біциклічної напівгрупи. Різні розширення біциклічного моноїда вводили раніше різні автори [15, 16, 17, 31]. Такими є, зокрема, конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [10, 29, 30, 21].

Зауваження 1. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2) = (i_1+i_2-\min\{j_1,i_2\}, j_1+j_2-\min\{j_1,i_2\}) = \\ = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1,j_1-i_2+j_2), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

Нагадаємо [18], що *частково впорядкована група* це група $(G,\cdot)$ на якій визначено частковий порядок "$\leqslant$", що є інваріантним стосовно зсувів, тобто "$\leqslant$" задовольняє таку властивість: для всіх $a,b,g \in G$ з $a \leqslant b$ випливає, що $a\cdot g \leqslant b\cdot g$ і $g\cdot a \leqslant g \cdot b$.

Далі в тексті через e ми позначатимемо одиничний (нейтральний) елемент групи G. Підмножина $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ частково впорядкованої групи G називається *додатним конусом* в G і задовольняє такі властивості:

(1) $G^+ \cdot G^+ \subseteq G^+$;
(2) $G^+ \cap (G^+)^{-1} = \{e\}$;
(3) $x^{-1}\cdot G^+ \cdot x \subseteq G^+$ для всіх $x \in G$.

Кожна підмножина P групи G, яка задовольняє умови (1)–(3) індукує частковий порядок на G ($x \leqslant y$ тоді і лише тоді, коли $x^{-1}\cdot y \in P$), для якої P є додатним конусом.

Будемо говорити, що алгебричний гомоморфізм $h\colon G \to H$ частково впорядкованих груп (напівгруп) G і H є *o-гомоморфізмом*, якщо відображення h зберігає порядок (є ізотонним) [18]. Алгебричний ізоморфізм $h\colon G \to H$ частково впорядкованих груп G і H, який є порядковим ізоморфізмом, називається *o-ізоморфізмом.* Якщо існує o-ізоморфізм $h\colon G \to H$ частково впорядкованих груп (напівгруп) G і H, то у цьому випадку будемо говорити, що частково впорядковані групи G і H є *o-ізоморфіними.* Також o-гомоморфізм (o-ізоморфізм) $h\colon G \to G$ для частково впорядкованої групи G будемо називати *o-ендоморфізмом* (*o-авторфізмом*).

Лінійно впорядкована група – це частково впорядкована група G така, що відношення часткового порядку "$\leqslant$" на G є лінійним [9]. Частково впорядкована група G називається *ґратково впорядкованою* або l-групою, якщо частковий порядок "$\leqslant$" визначає ґраткову структуру на G [13]. Очевидно, що кожна лінійно впорядкована група є ґратково впорядкованою. Лінійно впорядкована група G називається *архімедовою*, якщо для довільних $a,b \in G^+ \setminus \{e\}$ існує таке натуральне число n, що $a \leqslant b^n$ [9]. За теоремою Гьольдера (див. [13, Theorem 24.16] або [23]) кожна архімедова лінійно впорядкована група o-ізоморфна підгрупі адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}$ із звичайним лінійним порядком.

Надалі в тексті вважатимемо, що G лінійно впорядкована група.

Для кожного елемента $g \in G$ позначимо

$$G^+(g) = \{x \in G\colon g \leqslant x\}.$$

Множина $G^+(g)$ називається *додатним конусом над елементом* g в групі G.

Для довільних елементів $g,h \in G$ розглянемо часткове перетворення $\alpha_h^g\colon G \rightharpoonup G$, означене за формулою

$$(x)\alpha_h^g = x\cdot g^{-1}\cdot h, \qquad \text{для } x \in G^+(g).$$

Зауважимо, що з леми XIII.1 з [9] випливає, що для так визначеного часткового відображення $\alpha_h^g\colon G \rightharpoonup G$ звуження $\alpha_h^g\colon G^+(g) \to G^+(h)$ є бієктивним відображенням.

Позначимо

$$\mathscr{B}(G) = \{\alpha_h^g\colon G \rightharpoonup G\colon g,h \in G\} \text{ і } \mathscr{B}^+(G) = \{\alpha_h^g\colon G \rightharpoonup G\colon g,h \in G^+\},$$

і на множинах $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ визначимо операцію композиції часткових відображень. Легко бачити, що

$$\alpha_h^g \cdot \alpha_l^k = \alpha_b^a, \qquad \text{де} \quad a = (h \vee k)\cdot h^{-1} \cdot g \quad \text{і} \quad b = (h \vee k) \cdot k^{-1} \cdot l, \tag{1}$$

для $g,h,k,l \in G$. Отже, з властивості (1) додатного конуса та умови (1) випливає, що $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ є піднапівгрупами симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_G$ над множиною G.

За твердженням 1.2 з [22] для лінійно впорядкованої групи G виконуються такі твердження:

- (i) елементи α_h^g і α_g^h є взаємно інверсними в $\mathscr{B}(G)$ для всіх $g,h \in G$ (відп., в $\mathscr{B}^+(G)$ для всіх $g,h \in G^+$);
- (ii) елемент α_h^g напівгрупи $\mathscr{B}(G)$ (відп., $\mathscr{B}^+(G)$) є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $g = h$;
- (iii) $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ інверсні піднапівгрупи в $\mathscr{I}_G$;
- (iv) напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ (відп., $\mathscr{B}^+(G)$) ізоморфна напівгрупі, визначеній на множині $S_G = G \times G$ (відп., $S_G^+ = G^+ \times G^+$), з такою операцією:

$$(a,b)(c,d) = \begin{cases} (c \cdot b^{-1} \cdot a, d), & \text{якщо } b < c;\\ (a,d), & \text{якщо } b = c;\\ (a, b\cdot c^{-1}\cdot d), & \text{якщо } b > c,\end{cases} \tag{2}$$

  де $a,b,c,d \in G$ (відп., $a,b,c,d \in G^+$).

Очевидно, що:

1. якщо група G ізоморфна адитивній групі цілих чисел $(\mathbb{Z},+)$ зі звичайним лінійним порядком $\leqslant$, то напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$, а напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ ізоморфна розширеній біциклічній напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ (див. [14]);
2. якщо група G ізоморфна адитивній групі дійсних чисел $(\mathbb{R},+)$ зі звичайним лінійним порядком $\leqslant$, то напівгрупа $\mathscr{B}(G)$ ізоморфна напівгрупі $B^2_{(-\infty,\infty)}$ (див. [24, 25]), а напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ ізоморфна напівгрупі $B^1_{[0,\infty)}$ (див. [3, 4, 5, 6, 7]),
3. напівгрупа $\mathscr{B}^+(G)$ зоморфна напівгрупі $S(G)$, яка визначена в [16, 17].

У [16, 22] досліджується структура напівгруп $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ для лінійно впорядкованої групи G. Зокрема, описані відношення Ґріна на $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$, їхні в'язки та доведено, що ці напівгрупи біпрості. Також у [22] доведено, що для комутативної лінійно впорядкованої групи G усі нетривіальні конгруенції на напівгрупах $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$ є груповими тоді і лише тоді, коли група G архімедова та описано структуру групових конгруенцій на групах $\mathscr{B}(G)$ і $\mathscr{B}^+(G)$.

Надалі ми ототожнюватимемо напівгрупу $\mathscr{B}^+(G)$ з напівгрупою S_G^+, відповідно, з напівгруповою операцією визначеною за формулою (2). Оскільки G – архімедова лінійно впорядкована група, то вона за теоремою Гьольдера (див. [13, Theorem 24.16] або [23]) комутативна, а отже, напівгрупова операція на $\mathscr{B}^+(G)$ виглядає так:

$$(3)\qquad (a,b)(c,d)=\begin{cases} (a\cdot b^{-1}\cdot c,d), & \text{якщо } \ b<c;\\ (a,d), & \text{якщо } \ b=c;\\ (a,b\cdot c^{-1}\cdot d), & \text{якщо } \ b>c,\end{cases}$$

де $a,b,c,d\in G^+$.

Доводимо таке: якщо G і H – архімедові лінійно впорядковані групи, то кожний o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G\to H$ породжує гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$, і кожний гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ породжує o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G\to H$. Звідси випливає, що напівгрупа o-ендоморфізмів архімедової лінійно впорядкованої групи G ізоморфна напівгрупі ендоморфізмів її біциклічного розширення $\mathscr{B}^+(G)$.

2. Гомоморфізми біциклічних розширень

Лема 1. *Нехай G і H – підгрупи лінійно впорядкованої адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді кожний o-гомоморфізм $\varphi\colon G^+\to H^+$ додатного конуса G^+ групи G в додатний конус H^+ групи H визначається за формулою*

$$(x)\varphi=r_\varphi\cdot x,$$

для деякого дійсного числа r_φ.

Доведення. Зауважимо, якщо $(x_0)\varphi=0$ для деякого елемента $a\in G^+\setminus\{0\}$, то оскільки для довільного елемента $a>0$ з G^+ існує таке натуральне число n, що $na_0\geqslant a$, матимемо

$$0=n(x_0)\varphi=(nx_0)\varphi\geqslant(a)\varphi\geqslant 0,$$

тобто $(a)\varphi=0$. Звідси випливає, що ендоморфізм $\varphi\colon G^+\to G^+$ анулюючий, тобто $(x)\varphi=0\cdot x$ для всіх $x\in G^+$.

Далі вважатимемо, що ендоморфізм $\varphi\colon G^+\to G^+$ неанулюючий. Розглянемо в додатному конусі G^+ два довільні різні числа a_1 й a_2. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a_1<a_2$. Тоді $0<(a_1)\varphi<(a_2)\varphi$. Доведемо, що

$$\frac{(a_1)\varphi}{(a_2)\varphi}=\frac{a_1}{a_2},$$

звідки випливає рівність

$$\frac{(a_1)\varphi}{a_1}=\frac{(a_2)\varphi}{a_2},$$

яку нам і треба було довести. Припустимо, що, наприклад,

$$\frac{(a_1)\varphi}{(a_2)\varphi}<\frac{a_1}{a_2}.$$

Тоді за принципом Архімеда існує додатне таке раціональне число $\frac{m}{n}$, що

$$\frac{(a_1)\varphi}{(a_2)\varphi}<\frac{m}{n}<\frac{a_1}{a_2},$$

де $n, m \in \mathbb{N}$. Звідси впливає, що $na_1 > ma_2$ і $n(a_1)\varphi < m(a_2)\varphi$. Отримали протиріччя, оскільки з нерівності $na_1 > ma_2$ випливає, що

$$n(a_1)\varphi = (na_1)\varphi > (ma_2)\varphi = m(a_2)\varphi.$$

Припустивши, що

$$\frac{(a_1)\varphi}{(a_2)\varphi} > \frac{a_1}{a_2},$$

аналогічно попередньо викладеним міркуванням, отримуємо протиріччя. З вище доведеного випливає, що існує таке дійсне число r_φ, що для всіх $x \in G^+$ виконується рівність $(x)\varphi = r_\varphi \cdot x$. Зауважимо, що $r_\varphi = \dfrac{(a_1)\varphi}{a_1}$. □

Лема 2. *Нехай G і H – лінійно впорядковані групи, причому G – архімедова. Тоді для кожного o-гомоморфізму $\varphi\colon G \to H$ виконується лише одна з умов:*

(*i*) *φ – ін'єктивне відображення;*
(*ii*) *φ – анулюючий гомоморфізм.*

Доведення. У випадку, коли G – тривіальна (одноелементна) група, то умови (i) та (ii) збігаються та твердження леми очевидне. Тому надалі будемо вважати, що G – нескінченна група.

Припустимо, що $\varphi\colon G \to H$ – неін'єктивний гомоморфізм. Тоді існують такі $x, y \in G$, що $x < y$ і $(x)\varphi = (y)\varphi$. Тоді $e = x \cdot x^{-1} < y \cdot x^{-1}$ і

$$(e)\varphi = (x \cdot x^{-1})\varphi = (x)\varphi \cdot (x^{-1})\varphi = (y)\varphi \cdot (x^{-1})\varphi = (y \cdot x^{-1})\varphi,$$

а отже, з архімедовості лінійного порядку на групі G випливає, що $(e)\varphi = (g)\varphi$ для довільного $g \in G^+$. Оскільки G – лінійно впорядкована група, то для довільного елемента $g_1 \in\in G^+$ існує натуральне число n таке, що $g_1 \leqslant g^n$. Звідси випливає, що

$$(e)\varphi \leqslant (g_1)\varphi \leqslant (g^n)\varphi = ((g)\varphi)^n = ((e)\varphi)^n = (e)\varphi,$$

а отже, φ – анулюючий гомоморфізм. □

Для довільної лінійно впорядкованої групи G означимо

$$\mathscr{B}^+_{\rightarrow}(G) = \left\{(e, g)\colon g \in G^+\right\} \qquad \text{і} \qquad \mathscr{B}^+_{\downarrow}(G) = \left\{(g, e)\colon g \in G^+\right\}.$$

Для довільного елемента $g \in G^+$ маємо, що

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^+(G) \cdot (e, g) &= \left\{(x, y) \cdot (e, g)\colon x, y \in G^+\right\} = \\ &= \left\{(x, y \cdot g)\colon x, y \in G^+\right\} = \\ &= G^+ \times (G^+ \cdot g)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(g, e) \cdot \mathscr{B}^+(G) &= \left\{(g, e) \cdot (x, y)\colon x, y \in G^+\right\} = \\ &= \left\{(g \cdot x, y)\colon x, y \in G^+\right\} = \\ &= (g \cdot G^+) \times G^+.\end{aligned}$$

Оскільки за теоремою Вагнера–Престона (див. [11, Theorem 1.17]) кожен головний лівий ідеал і кожен головний правий ідеал в інверсній напівгрупі породжується єдиним ідемпотентом, то з лінійності природного часткового порядку на напівґратці ідемпотентів напівгрупи $\mathscr{B}^+(G)$ (див. [22, Proposition 2.1(i)]) випливає таке твердження.

Твердження 1. *Нехай G – лінійно впорядкована група. Для $g_1, g_2 \in G^+$ такі умови еквівалентні:*

(i) $(e, g_1) \leq^*_{\mathscr{L}} (e, g_2)$;
(ii) $(g_1, e) \leq^*_{\mathscr{R}} (g_2, e)$;
(iii) $(g_2, g_2) \preccurlyeq (g_1, g_1)$;
(iv) $g_1 \leqslant g_2$,

а отже, $(\mathscr{B}^+_{\rightarrow}(G), \leq^*_{\mathscr{L}})$ і $\left(\mathscr{B}^+_{\downarrow}(G), \leq^*_{\mathscr{R}}\right)$ – лінійно впорядковані множини.

Лема 3. *Нехай G – лінійно впорядкована група. Тоді підмножина $\mathscr{B}^+_{\rightarrow}(G)$ $(\mathscr{B}^+_{\downarrow}(G))$ з індукованою напівгруповою операцією з $\mathscr{B}^+(G)$ і лінійним порядком $\leq^*_{\mathscr{L}}$ $(\leq^*_{\mathscr{R}})$ o-ізоморфна додатному конусу G^+ з індукованою напівгруповою операцією з групи G.*

Доведення. Очевидно, що відображення $\iota_{\rightarrow}\colon G^+ \to \mathscr{B}^+_{\rightarrow}(G)$ означене за формулою $(g)\iota_{\rightarrow} = (e, g)$ є o-ізоморфізмом. Справді, легко бачити, що $\iota_{\rightarrow}$ – бієктивне відображення, і для довільних $g_1, g_2 \in G^+$ маємо, що

$$\begin{aligned}
(g_1)\iota_{\rightarrow} \cdot (g_2)\iota_{\rightarrow} &= (e, g_1) \cdot (e, g_2) = \\
&= (e, g_1 \cdot e^{-1} \cdot g_2) = \\
&= (e, g_1 \cdot g_2) = \\
&= (g_1 \cdot g_2)\iota_{\rightarrow},
\end{aligned}$$

оскільки $e \leqslant g_1$ у G^+. Далі скористаємося твердженням 1.

Аналогічно доводиться, що відображення $\iota_{\downarrow}\colon G^+ \to \mathscr{B}^+_{\downarrow}(G)$ означене за формулою $(g)\iota_{\downarrow} = (g, e)$ є o-ізоморфізмом. □

Лема 4. *Нехай G і H – архімедові лінійно впорядковані групи. Тоді кожний o-гомоморфізм $\varphi\colon G \to H$ породжує гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$, який визначається за формулою*

$$(x, y)\widetilde{\varphi} = \big((x)\varphi, (y)\varphi\big), \qquad \text{для всіх} \quad x, y \in G^+.$$

Доведення. У випадку, якщо $\varphi\colon G \to H$ – анулюючий гомоморфізм, то твердження леми очевидне.

Зафіксуємо довільні $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G^+$. Тоді

$$\begin{aligned}
\big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big)\widetilde{\varphi} &= \begin{cases} \big(x_1 \cdot y_1^{-1} \cdot x_2, y_2\big)\widetilde{\varphi}, & \text{якщо } y_1 < x_2; \\ \big(x_1, y_2\big)\widetilde{\varphi}, & \text{якщо } y_1 = x_2; \\ \big(x_1, y_1 \cdot x_2^{-1} \cdot y_2\big)\widetilde{\varphi}, & \text{якщо } y_1 > x_2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \big((x_1 \cdot y_1^{-1} \cdot x_2)\varphi, (y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1 < x_2; \\ \big((x_1)\varphi, (y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1 = x_2; \\ \big((x_1)\varphi, (y_1 \cdot x_2^{-1} \cdot y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1 > x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

і, оскільки $\varphi\colon G \to H$ – o-гомоморфізм лінійно впорядкованих груп, то за лемою 2 маємо, що

$$
\begin{aligned}
(x_1,y_1)\widetilde{\varphi}\cdot(x_2,y_2)\widetilde{\varphi} &= \big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big)\cdot\big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big) = \\
&= \begin{cases} \big((x_1)\varphi\cdot((y_1)\varphi)^{-1}\cdot(x_2)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } (y_1)\varphi<(x_2)\varphi;\\ \big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } (y_1)\varphi=(x_2)\varphi;\\ \big((x_1)\varphi,(y_1)\varphi\cdot((x_2)\varphi)^{-1}\cdot(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } (y_1)\varphi>(x_2)\varphi \end{cases}\\
&= \begin{cases} \big((x_1)\varphi\cdot((y_1)\varphi)^{-1}\cdot(x_2)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1<x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1=x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_1)\varphi\cdot((x_2)\varphi)^{-1}\cdot(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1>x_2 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \big((x_1)\varphi\cdot(y_1^{-1})\varphi\cdot(x_2)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1<x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1=x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_1)\varphi\cdot(x_2^{-1}\varphi)\cdot(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1>x_2 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \big((x_1\cdot y_1^{-1}\cdot x_2)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1<x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1=x_2;\\ \big((x_1)\varphi,(y_1\cdot x_2^{-1}\cdot y_2)\varphi\big), & \text{якщо } y_1>x_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отже, так означене $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ є o-гомоморфізмом моноїдів. □

Лема 5. *Нехай G і H – архімедові лінійно впорядковані групи. Тоді кожний гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ породжує o-гомоморфізм $\varphi\colon G^+\to H^+$ такий, що*

(4) $$(x,y)\widetilde{\varphi}=\big((x)\varphi,(y)\varphi\big), \qquad \textit{для всіх} \quad (x,y)\in\mathscr{B}^+(G).$$

Доведення. За теоремою Гьольдера (див. [13, Theorem 24.16] або [23]), не зменшуючи загальності, можемо вважати, що G і H – підгрупи адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}$ із звичайним лінійним порядком.

Якщо гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ анулюючий, то $(x,y)\widetilde{\varphi}=(0,0)$ для всіх $(x,y)\in\mathscr{B}^+(G)$. Отже, $(g)\varphi=0$ для всіх $g\in G^+$, звідки випливає, що $(g)\varphi=0$ для довільного елемента $g\in G$.

Припустимо, що гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ неанулюючий та неін'єктивний. За теоремою 3.2 з [22] кожна неодинична конгруенція на напівгрупі $\mathscr{B}^+(G)$ є груповою. Отже, образ $(\mathscr{B}^+(G))\widetilde{\varphi}$ є підгрупою напівгрупи $\mathscr{B}^+(H)$. Оскільки за твердженням 2.1(v) [22] усі $\mathscr{H}$-класи в напівгрупі $\mathscr{B}^+(H)$ одноелементні, то $(\mathscr{B}^+(G))\widetilde{\varphi}$ – одноелементна підмножина в $\mathscr{B}^+(H)$, тобто $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ – анулюючий гомоморфізм, протиріччя. З отриманого протиріччя випливає, що $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ – ін'єктивний гомоморфізм.

Означимо o-гомоморфізм $\varphi\colon G^+\to H^+$.

Оскільки $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ – гомоморфізм моноїдів, то

$$(0,0)\widetilde{\varphi}=(0,0)=((0)\varphi,(0)\varphi),$$

а отже, $(0)\varphi=0$.

Для довільного $g\in G^+$ приймемо $(0,g)\widetilde{\varphi}=(0,(g)\varphi)$. Далі доведемо, що так визначене відображення $\varphi\colon G^+\to H^+$ є o-гомоморфізмом, який задовольняє умову (4). Оскільки $(0,g)\widetilde{\varphi}\in\mathscr{B}^+(H)$, то за означенням напівгрупи $\mathscr{B}^+(H)$ матимемо, що

$(g)\varphi \in H^+$ довільного $g \in G^+$. Тоді для довільних $g_1, g_2 \in G^+$ з рівності

$$(0, g_1) \cdot (0, g_1) = (0, g_1 + g_2)$$

випливає, що

$$\begin{aligned}((0, g_1) \cdot (0, g_1))\widetilde{\varphi} &= (0, g_1 + g_2)\widetilde{\varphi} = \\ &= ((0)\varphi, (g_1 + g_2)\varphi) = \\ &= (0, (g_1 + g_2)\varphi)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}((0, g_1) \cdot (0, g_1))\widetilde{\varphi} &= (0, g_1)\widetilde{\varphi} \cdot (0, g_1)\widetilde{\varphi} = \\ &= ((0)\varphi, (g_1)\varphi) \cdot ((0)\varphi, (g_2)\varphi) = \\ &= (0, (g_1)\varphi) \cdot (0, (g_2)\varphi) = \\ &= (0, (g_1)\varphi + (g_2)\varphi).\end{aligned}$$

Отже, так означене відображення $\varphi\colon G^+ \to H^+$ є гомоморфізмом. З леми 3 випливає, що φ – o-гомоморфізм з додатного конуса G^+ в додатний конус H^+.

Оскільки $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$ – гомоморфізм інверсних напівгруп, то з твердження 1.4.21 з [26] випливає, що

$$\begin{aligned}(g, 0)\widetilde{\varphi} &= ((0, g)^{-1})\widetilde{\varphi} = \\ &= ((0, g)\widetilde{\varphi})^{-1} = \\ &= (0, (g)\varphi)^{-1} = \\ &= ((g)\varphi, 0)\end{aligned}$$

довільного елемента $g \in G^+$. Отже,

$$\begin{aligned}(x, y)\widetilde{\varphi} &= ((x, 0) \cdot (0, y)\widetilde{\varphi} = \\ &= (x, 0)\widetilde{\varphi} \cdot (0, y)\widetilde{\varphi} = \\ &= ((x)\varphi, 0) \cdot (0, (x)\varphi) = \\ &= ((x)\varphi, (x)\varphi)\end{aligned}$$

для довільних $x, y \in G^+$, звідки випливає, що формула (4) коректно визначає o-гомоморфізм $\varphi\colon G^+ \to H^+$. □

Підсумуємо отримані результати в такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай G і H – архімедові лінійно впорядковані групи. Кожний o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G \to H$ породжує гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$, і кожний гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$ породжує o-гомоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G \to H$, які узгоджуються за формулою*

$$(x, y)\widetilde{\varphi} = \big((x)\widehat{\varphi}, (y)\widehat{\varphi}\big), \qquad x, y \in G^+. \tag{5}$$

Доведення. Перше твердження теореми виливає з леми 4.

Доведемо друге твердження. За лемою 5 кожний гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$ породжує o-гомоморфізм $\varphi\colon G^+ \to H^+$, який задовольняє умову (4). За твердженням 5.6 з [13] o-гомоморфізм φ продовжується до єдиного

o-гомоморфізму лінійно впорядкованих груп $\widehat{\varphi}\colon G\to H$ такого, що $(g)\widehat{\varphi}=(g)\varphi$ для всіх $g\in G^+$. □

З теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Архімедові лінійно впорядковані групи G і H o-ізоморфні тоді і лише тоді, коли моноїди $\mathscr{B}^+(G)$ і $\mathscr{B}^+(H)$ ізоморфні. Більше того, кожний o-ізоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G\to H$ породжує ізоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$, і кожний ізоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ породжує o-ізоморфізм $\widehat{\varphi}\colon G\to H$, які узгоджуються за формулою* (5).

З теореми 1 випливає, що відображення $\Phi_{\mathscr{B}}$ з напівгрупи $\mathbf{End}^o(G)$ o-ендоморфізмів архімедової лінійно впорядкованої групи G у напівгрупу $\mathbf{End}(\mathscr{B}^+(G))$ ендоморфізмів її біциклічного розширення $\mathscr{B}^+(G)$, визначене за формулою $(\varphi)\Phi_{\mathscr{B}}=\widetilde{\varphi}$, є ізоморфізмом. Отже, виконується така теорема.

Теорема 2. *Нехай G архімедова лінійно впорядкована група. Тоді напівгрупи $\mathbf{End}^o(G)$ та $\mathbf{End}(\mathscr{B}^+(G))$ ізоморфні.*

Наслідок 2. *Нехай G архімедова лінійно впорядкована група. Тоді група o-автомофізмів групи G ізоморфна групі автоморфізмів моноїда $\mathscr{B}^+(G)$.*

3. Про категорії $\mathfrak{TOAG}$ і $\mathfrak{BETOAG}$

Означимо категорію $\mathfrak{TOAG}$ так:

(1) $\mathbf{Ob}(\mathfrak{TOAG})=\{G\colon G$ – архімедова лінійно впорядкована група$\}$;

(2) $\mathbf{Mor}(\mathfrak{TOAG})$ – o-гомоморфізми архімедових лінійно впорядкованих груп,

а категорію $\mathfrak{BETOAG}$ так:

(1) $\mathbf{Ob}(\mathfrak{BETOAG})$ біциклічні розширення $\mathscr{B}^+(G)$ архімедових лінійно впорядкованих груп $G\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{TOAG})$;

(2) $\mathbf{Mor}(\mathfrak{BETOAG})$ є гомоморфізми моноїдів $\mathscr{B}^+(G)$.

Для кожного об'єкта $G\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{TOAG})$ означимо $\mathbf{B}(G)=\mathscr{B}^+(G)$ – біциклічне розширення архімедової лінійно впорядкованої групи G. Для кожного морфізму $\varphi\colon G\to H$ з $\mathbf{Mor}(\mathfrak{TOAG})$ означимо $\mathbf{B}(\varphi)=\widetilde{\varphi}$, де гомоморфізм моноїдів $\widetilde{\varphi}\colon\mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$, що визначається за формулою

$$(x,y)\widetilde{\varphi}=\big((x)\varphi,(y)\varphi\big),\qquad \text{для всіх}\quad x,y\in G^+. \tag{6}$$

З леми 4 випливає, що $\mathbf{B}$ є функтором з категорії $\mathfrak{TOAG}$ у категорію $\mathfrak{BETOAG}$.

Для кожного об'єкта $\mathscr{B}^+(G)\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{BETOAG})$ означимо $\mathbf{T}((\mathscr{B}^+(G)))=G$ – така архімедова лінійно впорядкована група, що $\mathscr{B}^+(G)$ є біциклічним розширенням лінійно впорядкованої групи G. Для кожного морфізму $\widetilde{\varphi}\colon\mathscr{B}^+(G)\to\mathscr{B}^+(H)$ з $\mathbf{Mor}(\mathfrak{BETOAG})$ означимо $\mathbf{T}(\widetilde{\varphi})=\varphi$, де $\varphi\colon G\to H$ o-гомоморфізми архімедових лінійно впорядкованих груп G і H, який за теоремою 1 визначається за формулою (6).

Функтор $\mathbf{I}$ з категорії $\mathfrak{C}$ в категорію $\mathfrak{K}$ називається *ізоморфізмом* категорій $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{K}$, якщо існує функтор $\mathbf{J}\colon\mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$, для якого обидві композиції $\mathbf{I}\circ\mathbf{J}\colon\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ і $\mathbf{J}\circ\mathbf{I}\colon\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ тотожні функтори [27].

Очевидно, що функтори $\mathbf{B}\colon\mathfrak{TOAG}\to\mathfrak{BETOAG}$ і $\mathbf{I}\colon\mathfrak{BETOAG}\to\mathfrak{TOAG}$ взаємно обернені, а отже, справджується така теорема.

Теорема 3. *Категорії* $\mathfrak{TOAG}$ *і* $\mathfrak{BETOAG}$ *ізоморфні.*

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку Т. Банаху, О. Равському та рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. О. Гутік, О. Прохоренкова, Д. Сех, *Про ендоморфізми біциклічної напівгрупи та розширеної біциклічної напівгрупи*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92** (2021), 5–16. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.005-019
3. K. R. Ahre, *Locally compact bisimple inverse semigroups*, Semigroup Forum **22** (1981), no. 4, 387–389. DOI: 10.1007/BF02572817
4. K. R. Ahre, *On the closure of* $B^1_{[0,\infty)}$, İstanbul Tek. Üniv. Bül. **36** (1983), no. 4, 553–562.
5. K. R. Ahre, *On the closure of* $B'_{[0,\infty)}$, Semigroup Forum **28** (1984), no. 1–3, 377–378. DOI: 10.1007/BF02572501
6. K. R. Ahre, *On the closure of* $B^1_{[0,\infty)}$, Semigroup Forum **33** (1986), no. 2, 269–272. DOI: 10.1007/BF02573200
7. K. R. Ahre, *On the closure of* $B^2_{[0,\infty)}$, İstanbul Tek. Üniv. Bül. **42** (1989), no. 3, 387–390.
8. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
9. G. Birkhoff, *Lattice theory*, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.
10. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. DOI: 10.1007/978-3-662-43119-1
11. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
12. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
13. M. R. Darnel, *Theory of lattice-ordered groups*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.
14. I. Ya. Fihel and O. V. Gutik, *On the closure of the extended bicyclic semigroup*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 131–157.
15. V. A. Fortunatov, *Congruences on simple extensions of semigroups*, Semigroup Forum **13** (1976), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949
16. G. L. Fotedar, *On a semigroup associated with an ordered group*, Math. Nachr. **60** (1974), 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128
17. G. L. Fotedar, *On a class of bisimple inverse semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 49–53.
18. L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, 1963.
19. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
20. P. A. Grillet, *Semigroups. An introduction to the structure theory*, Marcel, Dekker, Inc., New-York, 1995.
21. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups,* Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008

22. O. Gutik, D. Pagon, and K. Pavlyk, *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **15** (2011), no. 2, 61–80. DOI: 10.12697/ACUTM.2011.15.10
23. O. Hölder, *Die Axiome der Quantitat und die Lehre vom Maß*, Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig Math. Phys. CI. **53** (1901), 1–64.
24. R. Korkmaz, *On the closure of* $B^2_{(-\infty,+\infty)}$, Semigroup Forum **54** (1997), no. 2, 166–174. DOI: 10.1007/BF02676599
25. R. Korkmaz, *Dense inverse subsemigroups of a topological inverse semigroup*, Semigroup Forum **78** (2009), no. 3, 528–535. DOI: 10.1007/s00233-009-9136-2
26. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore, World Scientific, 1998.
27. S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., New York, Springer, Graduate Texts in Math. **5**, 2010.
28. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
29. N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups,* Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346
30. R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563
31. R. J. Warne, *Bisimple inverse semigroups mod groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.01.2022
доопрацьована 31.01.2022
прийнята до друку 22.06.2022

ON HOMOMORPHISMS OF BICYCLIC EXTENSIONS OF TOTALLY ORDERED GROUPS

Oleg GUTIK, Oksana PPOKHORENKOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
oksana.prokhorenkova@lnu.edu.ua

Let $\mathscr{B}^+(G)$ be the bicyclic extension of a totally ordered group G which is defined in [22]. We show that if G and H are archimedean totally ordered groups then every o-homomorphism $\widehat{\varphi}\colon G \to H$ generates a monoid homomorphim $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$, and every monoid homomorphism $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{B}^+(G) \to \mathscr{B}^+(H)$ generates o-homomorphism $\widehat{\varphi}\colon G \to H$.

Key words: Semigroup, bicyclic monoid, bicyclic extension, totally ordered group, homomorphism, o-homomorphism, isomomorphism, category, isomomorphic categories.