ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.622:519.642 *http://dx.doi.org/10.30970/vam.2026.36.00000*

МЕТОД ЗМІННОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ ДРУГОГО РОДУ

Я. Пелех[1], Б. Філь[2], Б. Пахолок[1]

[1]*Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. С. Бандери 12, Львів, 79013, Україна,
e-mail: yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua, bohdan.b.pakholok@lpnu.ua,
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна,
e-mail: bohdan.fil@lnu.edu.ua

При розрахунку сучасних прикладних задач виникає необхідність знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, а також отримувати гарантовану оцінку похибки результату. В цій роботі виведено явні розрахункові формули типу Рунге-Кутти розв'язування початкової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь (ІДР) Вольтерри другого роду. Знайдено множину параметрів, при яких отримано двосторонні наближення то точного розв'язку без використання додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння. Пара формул, що відповідають двом значенням параметра двосторонності, які відрізняються лише знаком, складають розрахункові формули двостороннього методу. Одна з них дає верхнє наближення, а інша – нижнє наближення до точного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціального рівняння. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень, а модуль піврізниці дає похибку результату обчислень. Виписано явний вираз головного члена локальної похибки результату, який обчислюється з використанням раніше отриманих значень правої частини інтегро-диференціального рівняння. Знайдено значення параметрів, при яких отримано числові методи першого, другого, третього та четвертого порядку точності. Для m-стадійного методу типу Рунге-Кутти ($m = \overline{1,4}$) запропоновано методику знаходження у кожній вузловій точці значення похибки апроксимації, вибору кроку інтегрування та зміну порядку точності наближеного методу. Модульний характер запропонованих алгоритмів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку початкової задачі для інтегро-диференціального рівняння. Співставлення цих наближень дає важливу інформацію для вибору кроку інтегрування та оцінки точності результату.

Ключові слова: задача Коші, інтегро-диференціальне рівняння, числові методи, двосторонні наближення, порядок точності, локальна похибка.

1. Вступ

Одним із сучасних наукових методів дослідження явищ та процесів є математичне моделювання, яке в багатьох випадках дає змогу імітувати реальний процес і дає можливість отримувати як якісну так і кількісну картину процесу. У даний час активно розвиваються напрямки, які пов'язані із застосуванням інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри. Зокрема, задачі кінетики, електроніки, відновлення спотвореного зображення, задачі томографії, гідроакустики, розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок), деякі розділи біології (задача про поширення епідемії, задача кінетики печінки, моделювання міжклітинних взаємодій), економіки виробництва (динамічні макроекономічні моделі, моделі систем, що розвиваються) і т.д. приводять до необхідності розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь і їхніх систем.

Оскільки розв'язки в замкнутому вигляді можна отримати лише в окремих часткових випадках, виникає проблема побудови наближених методів, які були б оптимальними за точністю та правильно відображали основні властивості поставлених задач. При розрахунку таких задач виникає необхідність знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, а також отримувати гарантовану оцінку похибки результату.

Проблема побудови наближених методів розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь є актуальним завданням обчислювальної математики та комп'ютерного моделювання.

В останні роки багато авторів працювали над чисельними методами інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. Інтегро-диференціальні рівняння та їх системи (ІДРС) зустрічаються при моделюванні багатьох процесів науки і техніки. Feldstein A. та ін. у роботі [1] наводят широкий перелік їх застосування в різних галузях.

В праці [2] Izadi M. et al. отримано наближені розв'язки нелінійного логістичного рівняння дробового порядку. В [3] розроблено нову техніку факторизації для нелінійних частинних розрядів. В праці [4] застосовано функцію Бесселя для розв'язання нелінійних ІДРС Фредгольма-Вольтерра-Гаммерштейна. Застосування поліномів Геноккі представлено в [5]. В праці [6] запропоновано неполіноміальний метод B-сплайнів. Деякі динамічні моделі досліджені в [7]. Метод конвергентної колокації на основі поліфрактономів Якобі представлено в [8]. В [9] досліджено новий набір ортогональних базисних функцій. Наближений розв'язок рівнянь Фредгольма побудовано в [10]. Shirania D. та ін. в праці [11] запропоновано два методи колокації. У всіх перерахованих роботах відсутні способи знаходження двосторонньої оцінки похибки результату.

Al-Shimmary A. et al. в [12] на основі перетворення Коула-Хопфа запропонували метод розв'язання рівняння Бюргерса за допомогою методу Рунге-Кутти 6-го порядку точності. В статті [13] запропоновано розв'язування ІДРС Вольтерри діагональним неявним багатокроковим блочним методом. В [14] пропонуються числові методи на основі багатокрокових методів для звичайних диференціальних рівнянь.

Чаплигіним С.А. в [15] розроблено принципи побудови двосторонніх методів. Розвиток і модифікації представлені в [16]. Сеньом П.С. в [17] сформовано методику побудови та дослідження двосторонніх методів. Gubkina N. et al. в [18] розглянуто першу крайову задачу для одновимірного нелінійного рівняння теплопровідності. Однак такі аналітичні методи накладають досить сильні обмеження і їх важко реалізувати на ПК. У роботі [19] розглядаються методи дещо іншого типу.

Pelekh Ya.M. в [20] побудовані методи типу Рунге-Кутти з двостороньою оцінкою локальної похибки, а в [21] – двосторонні методи для розв'язання інтегральних рівнянь. В роботі [22] досліджено значення напруг при індукційному нагріванні феромагнітного шару. Задача розв'язується нелінійними вкладеними методами типу Рунге-Кутти з двосторонньою оцінкою локальної похибки.

В цій праці, використовуючи методику викладену Butcher J.C. в [23], запропоновано методи розв'язування задачі Коші для ІДРС та їх систем.

Об'єктом дослідження є задача Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Предметом *дослідження* є початкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерри.

Мета дослідження – розробити нові обчислювальні методи для наближеного розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Це дасть можливість отримати числові методи з двосторонньою оцінкою похибки результату, вкладені методи, а також метод змінного порядку та кроку інтегрування.

Для досягнення мети дослідження використано теорію побудови сучасних методів розв'язання початкової задачі для звичайних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема однокрокових методів типу Рунге-Кутта, а також теорію побудови двосторонніх наближень.

2. Постановка задачі

Розглянемо на відрізку $I_L : [x_0,\, x_0+L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x,\, u(x),\, \int_{x_0}^{x} g[x,s,u(s)]\, ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, \qquad x \in [x_0,\, x_0+L]\,, \quad L < \infty, \tag{2}$$

де $F : I_L \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ і $g : \big\{x, s, u(s) \mid x_0 \le s \le x \le x_0+L\big\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є достатньо диференційовані функції.

Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F[x, u(x), z(x)]\,, \qquad z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x,s,u(s)]\, ds. \tag{3}$$

3. Побудова методу Рунге-Кутти

3.1. Метод другого порядку точності

На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_N = x_0+L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Наближений розв'язок задачі (1)-(2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді:

$$u_1 = u(x_0) + h \sum_{i=1}^{2} a_i\, k_i, \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned}
k_1 &= F[x_0 + \alpha_1 h,\ u_0,\ 0]\,,\\
k_2 &= F[x_0 + \alpha_2 h,\ u_0 + \beta_{21} h k_1,\ \gamma_{21} K_1]\,,\\
K_1 &= hg[x_0 + l_1 h,\ x_0 + m_1 h,\ u_0 + c_{11} h k_1]\,.
\end{aligned}$$

Тут a_i, α_i $(i = 1,2)$, β_{21}, γ_{21}, l_1, m_1, c_{11} – невідомі параметри, які знайдемо з умови:

$$R_1 = |u(x_0+h) - u_1| = O(h^3). \tag{5}$$

Розвинення розв'язку задачі (1)–(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$\begin{aligned}
u(x_0+h) &= u(x_0) + hF_0 + \frac{1}{2}h^2(g_0 F_{0,0,z} + F_0 F_{0,u,0} + F_{x,0,0})\\
&+\frac{1}{6}h^3\Big(g_0^2 F_{0,0,2z} + 2F_0 g_0 F_{0,u,z} + F_0^2 F_{0,2u,0} + F_{0,u,0}(g_0 F_{0,0,z} + F_0 F_{0,u,0} + F_{x,0,0})\\
&+2g_0 F_{x,0,z} + 2F_0 F_{x,u,0} + F_{2x,0,0} + F_{0,0,z}(F_0 g_{0,0,u} + g_{0,s,0} + 2g_{x,0,0})\Big) + O(h^4).
\end{aligned} \tag{6}$$

Розвинувши k_i $(i = 1, 2)$ в ряд по степенях h до третього порядку включно, отримаємо:

$$
\begin{gathered}
k_1 = F_0 + \alpha_1 F_{x,0,0} h + \frac{1}{2}\alpha_1^2 F_{2x,0,0} h^2 + \frac{1}{6}\alpha_1^3 F_{3x,0,0} h^3 + O(h^4), \\
k_2 = F_0 + \left(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2 F_{x,0,0}\right)h + \\
\Big(\frac{1}{2}g_0^2\gamma_{21}^2 F_{0,0,2z} + F_0 g_0\beta_{21}\gamma_{21}F_{0,u,z} + \frac{1}{2}F_0^2\beta_{21}^2 F_{0,2u,0} + \alpha_1\beta_{21}F_{0,u,0}F_{x,0,0} + g_0\alpha_2\gamma_{21}F_{x,0,z} \\
+F_0\alpha_2\beta_{21}F_{x,u,0} + \frac{1}{2}\alpha_2^2 F_{2x,0,0} + \gamma_{21}F_{0,0,z}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0})\Big)h^2 \\
+\Big(\frac{1}{6}g_0^3\gamma_{21}^3 F_{0,0,3z} + \frac{1}{2}F_0 g_0^2\beta_{21}\gamma_{21}^2 F_{0,u,2z} + \frac{1}{2}F_0^2 g_0\beta_{21}^2\gamma_{21}F_{0,2u,z} + \frac{1}{6}F_0^3\beta_{21}^3 F_{0,3u,0} \\
+F_0\alpha_1\beta_{21}^2 F_{0,2u,0}F_{x,0,0} + \frac{1}{2}g_0^2\alpha_2\gamma_{21}^2 F_{x,0,2z} + \alpha_1\alpha_2\beta_{21}F_{x,0,0}F_{x,u,0} + F_0 g_0\alpha_2\beta_{21}\gamma_{21}F_{x,u,z} \\
+\frac{1}{2}F_0^2\alpha_2\beta_{21}^2 F_{x,2u,0} + \frac{1}{2}\alpha_1^2\beta_{21}F_{0,u,0}F_{2x,0,0} + \frac{1}{2}g_0\alpha_2^2\gamma_{21}F_{2x,0,z} + \frac{1}{2}F_0\alpha_2^2\beta_{21}F_{2x,u,0} \\
+\frac{1}{6}\alpha_2^3 F_{3x,0,0} + g_0\gamma_{21}^2 F_{0,0,2z}\left(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}\right) \\
+\alpha_2\gamma_{21}F_{x,0,z}\left(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}\right) \\
+F_{0,u,z}(g_0\alpha_1\beta_{21}\gamma_{21}F_{x,0,0} + F_0\beta_{21}\gamma_{21}\left(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}\right)) \\
+\frac{1}{2}\gamma_{21}F_{0,0,z}\left(2c_{11}\alpha_1 F_{x,0,0}g_{0,0,u} + c_{11}^2 F_0^2 g_{0,0,2u} + c_{11}F_0 m_1 g_{0,s,u} + m_1^2 g_{0,2s,0}\right. \\
\left. +2c_{11}F_0 l_1 g_{x,0,u} + 2l_1 m_1 g_{x,s,0} + l_1^2 g_{2x,0,0}\right)\Big)h^3 + O(h^4).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Розглянемо різницю:

$$
\begin{gathered}
u(x_0 + h) - u_1 = (1 - a_1 - a_2)F_0 h + \\
\frac{1}{2}\Big(-g_0(-1 + 2a_2\gamma_{21})F_{0,0,z} - F_0(-1 + 2a_2\beta_{21})F_{0,u,0} - (-1 + 2a_1\alpha_1 + 2a_2\alpha_2)F_{x,0,0}\Big)h^2 \\
+\frac{1}{6}\Big(-g_0^2(-1 + 3a_2\gamma_{21}^2)F_{0,0,2z} - F_0^2(-1 + 3a_2\beta_{21}^2)F_{0,2u,0} + F_{0,u,0}F_{x,0,0} \\
-6a_2\alpha_1\beta_{21}F_{0,u,0}F_{x,0,0} + g_0\Big(F_{0,0,z}F_{0,u,0} - 2F_0(-1 + 3a_2\beta_{21}\gamma_{21})F_{0,u,z} \\
-2(-1 + 3a_2\alpha_2\gamma_{21})F_{x,0,z}\Big) + F_{2x,0,0} - 3a_1\alpha_1^2 F_{2x,0,0} - 3a_2\alpha_2^2 F_{2x,0,0} \\
+F_0\Big(F_{0,u,0}^2 - 2(-1 + 3a_2\alpha_2\beta_{21})F_{x,u,0} - (-1 + 6c_{11}a_2\gamma_{21})F_{0,0,z}g_{0,0,u}\Big) \\
+F_{0,0,z}g_{0,s,0} - 6a_2 m_1\gamma_{21}F_{0,0,z}g_{0,s,0} - 2(-1 + 3a_2 l_1\gamma_{21})F_{0,0,z}g_{x,0,0}\Big)h^3 + O(h^4).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при відповідних степенях змінної h, отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 - 1 &= 0, \\
a_2\gamma_{21} - \tfrac{1}{2} &= 0, \\
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - \tfrac{1}{2} &= 0, \\
a_2\beta_{21} - \tfrac{1}{2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Розв'язки системи (9) дають варіанти значень параметрів для методу другого порядку точності, наступного вигляду:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \dfrac{1}{2}, \quad a_1 = 1 - a_2, \quad a_2 \neq 0.$
2. $\alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq \frac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - 2\alpha_1}, \quad a_1 = \dfrac{\alpha_2 - \frac{1}{2}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad a_2 = \dfrac{\frac{1}{2} - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$
3. $\alpha_1 = 0, \; \alpha_2 = \dfrac{2}{3}, \; \beta_{21} = \gamma_{21} = \dfrac{2}{3}, \; a_1 = \dfrac{1}{4}, \; a_2 = \dfrac{3}{4}.$

3.2. Побудова двосторонніх розрахункових формул

Побудуємо розрахункові формули, які дають двосторонні наближення до точного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціального рівняння. Для цього в системі (9) прирівняємо друге, третє і четверте рівняння до $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, відповідно.

Тоді похибка в точці $x = x_1$ має вигляд:

$$R_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left\{\omega_1 h^2 (F_x)_0 + \omega_2 h^2 (F_u)_0 + \omega_3 h^2 (F_z)_0 (g)_0\right\} = O(h^3).$$

При різних значеннях ω_i $(i = 1, 2, 3)$ побудовано двосторонні наближення. Зокрема, для прикладу, якщо покласти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ і

$$a_1 = 1 - a_2, \quad a_2 = \frac{1 - 2\omega}{2\alpha_2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_{21} = \gamma_{21} = \alpha_2, \quad \left(\omega \neq \tfrac{1}{2}\right),$$

де α_2 – відмінний від нуля параметр, то

$$R_1(\omega) = \omega h^2 u''(x_0) + O(h^3) = \omega h (k_2 - k_1) + O(h^3).$$

Отже, отримано розрахункові формули, які дозволяють знаходити не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)–(2) в точці x_1, а також обчислювати явний вираз головного члена локальної похибки методу без додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

3.3. Метод третього порядку точності

Наближений розв'язок задачі (1), (2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді:

$$u_1 = u(x_0) + h \sum_{i=1}^{3} a_i \, k_i, \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned}
k_1 &= F[x_0 + \alpha_1 h, \; u_0, \; 0]\,, \\
k_2 &= F[x_0 + \alpha_2 h, \; u_0 + \beta_{21} h k_1, \; \gamma_{21} K_1]\,, \\
k_3 &= F[x_0 + \alpha_3 h, \; u_0 + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2, \; \gamma_{31} K_1 + \gamma_{32} K_2]\,, \\
K_1 &= hg[x_0 + l_1 h, \; x_0 + m_1 h, \; u_0 + c_{11} h k_1]\,, \\
K_2 &= hg[x_0 + l_2 h, \; x_0 + m_2 h, \; u_0 + c_{21} h k_1 + c_{22} h k_2]\,.
\end{aligned}$$

Тут a_i, α_i $(i = 1, 2, 3)$, $\beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$, $\gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$, l_1, l_2, m_1, m_2, c_{11}, c_{21}, c_{22} – параметри, які необхідно знайти, виходячи з умови:

$$R_1 = |u(x_0 + h) - u_1| = O(h^4).$$

Розвинувши k_i $(i = 1, 2, 3)$ по степенях змінної h до третього порядку включно, отримаємо k_1, k_2 (7) та:

$$
\begin{aligned}
k_3 = F_0 &+ \Big((g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,0,z} + (F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})F_{0,u,0} + \alpha_3 F_{x,0,0}\Big)h \\
&+ \Big(\frac{1}{2}(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^2 F_{0,0,2z} + (F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,u,z} \\
&+ \frac{1}{2}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^2 F_{0,2u,0} + F_{0,u,0}(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} + \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} \\
&+ F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2 F_{x,0,0})) + \alpha_3(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{x,0,z} + \alpha_3(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})F_{x,u,0} \\
&+ \frac{1}{2}\alpha_3^2 F_{2x,0,0} + F_{0,0,z}\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}) \\
&+ \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2 g_{0,s,0} + l_2 g_{x,0,0})\Big)\Big)h^2 \\
&+ \Big(\frac{1}{6}(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^3 F_{0,0,3z} + \frac{1}{2}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^2 F_{0,u,2z} \\
&+ \frac{1}{2}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^2(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,2u,z} + \frac{1}{6}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^3 F_{0,3u,0} + (F_0\beta_{31} \\
&+ F_0\beta_{32})F_{0,2u,0}(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} + \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2 F_{x,0,0})) \\
&+ \frac{1}{2}\alpha_3(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^2 F_{x,0,2z} + \alpha_3(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} + \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} \\
&+ \alpha_2 F_{x,0,0}))\, F_{x,u,0} + \alpha_3(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{x,u,z} \\
&+ \frac{1}{2}\alpha_3(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^2 F_{x,2u,0} + \frac{1}{2}\alpha_3^2(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{2x,0,z} \\
&+ \frac{1}{2}\alpha_3^2(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})F_{2x,u,0} + \frac{1}{6}\alpha_3^3 F_{3x,0,0} + (g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,0,2z} \times \\
&\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}) + \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2 g_{0,s,0} + l_2 g_{x,0,0})\Big) \\
&+ \alpha_3 F_{x,0,z}\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}) + \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} \\
&+ m_2 g_{0,s,0} + l_2 g_{x,0,0})\Big) + F_{0,u,0}\Big(\frac{1}{2}\alpha_1^2\beta_{31}F_{2x,0,0} + \beta_{32}\Big(\frac{1}{2}g_0^2\gamma_{21}^2 F_{0,0,2z} + F_0 g_0\beta_{21}\gamma_{21}F_{0,u,z} \\
&+ \frac{1}{2}F_0^2\beta_{21}^2 F_{0,2u,0} + \alpha_1\beta_{21}F_{0,u,0}F_{x,0,0} + g_0\alpha_2\gamma_{21}F_{x,0,z} + F_0\alpha_2\beta_{21}F_{x,u,0} + \frac{1}{2}\alpha_2^2 F_{2x,0,0} \\
&+ \gamma_{21}F_{0,0,z}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} + m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0})\Big)\Big) + F_{0,u,z}\Big((g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} \\
&+ \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2 F_{x,0,0})) + (F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0 g_{0,0,u} \\
&+ m_1 g_{0,s,0} + l_1 g_{x,0,0}) + \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2 g_{0,s,0} + l_2 g_{x,0,0})\Big)\Big) \\
&+ F_{0,0,z}\Big(\frac{1}{2}\gamma_{31}\big(2c_{11}\alpha_1 F_{x,0,0}g_{0,0,u} + c_{11}^2 F_0^2 g_{0,0,2u} + 2c_{11}F_0 m_1 g_{0,s,u} m_1^2 g_{0,2s,0} \\
&+ 2c_{11}F_0 l_1 g_{x,0,u} + 2l_1 m_1 g_{x,s,0} + l_1^2 g_{2x,0,0}\big) + \gamma_{32}((c_{21}\alpha_1 F_{x,0,0} + c_{22}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} \\
&+ F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2 F_{x,0,0}))g_{0,0,u} + \frac{1}{2}(c_{21}F_0 + c_{22}F_0)^2 g_{0,0,2u} + (c_{21}F_0 + c_{22}F_0)m_2 g_{0,s,u} \\
&+ \frac{1}{2}m_2^2 g_{0,2s,0} + (c_{21}F_0 + c_{22}F_0)l_2 g_{x,0,u} + l_2 m_2 g_{x,s,0} + \frac{1}{2}l_2^2 g_{2x,0,0}\Big)\Big)\Big)h^3 + O(h^4).
\end{aligned}
$$

Розглянемо різницю:

$$
\begin{gathered}
u(x_0+h)-u_1=(1-a_1-a_2-a_3)F_0h+\frac{1}{2}\Big(-g_0(-1+2a_2\gamma_{21}+2a_3(\gamma_{31}+\gamma_{32}))F_{0,0,z}\\
-F_0(-1+2a_2\beta_{21}+2a_3(\beta_{31}+\beta_{32}))F_{0,u,0}-(-1+2a_1\alpha_1+2a_2\alpha_2+2a_3\alpha_3)F_{x,0,0}\Big)h^2\\
+\frac{1}{6}\Big(-g_0^2(-1+3a_2\gamma_{21}^2+3a_3(\gamma_{31}+\gamma_{32})^2)F_{0,0,2z}-F_0^2(-1+3a_2\beta_{21}^2\\
+3a_3(\beta_{31}+\beta_{32})^2)F_{0,2u,0}+F_{0,u,0}F_{x,0,0}-6a_2\alpha_1\beta_{21}F_{0,u,0}F_{x,0,0}-6a_3\alpha_1\beta_{31}F_{0,u,0}F_{x,0,0}\\
-6a_3\alpha_2\beta_{32}F_{0,u,0}F_{x,0,0}+g_0\Big((1-6a_3\beta_{32}\gamma_{21})F_{0,0,z}F_{0,u,0}-2F_0(-1+3a_2\beta_{21}\gamma_{21}\\
+3a_3(\beta_{31}+\beta_{32})(\gamma_{31}+\gamma_{32}))F_{0,u,z}-2(-1+3a_2\alpha_2\gamma_{21}+3a_3\alpha_3(\gamma_{31}+\gamma_{32}))F_{x,0,z}\Big)\\
+F_{2x,0,0}-3a_1\alpha_1^2F_{2x,0,0}-3a_2\alpha_2^2F_{2x,0,0}-3a_3\alpha_3^2F_{2x,0,0}\\
+F_0\Big((1-6a_3\beta_{21}\beta_{32})F_{0,u,0}^2-2(-1+3a_2\alpha_2\beta_{21}+3a_3\alpha_3(\beta_{31}+\beta_{32}))F_{x,u,0}\\
-(-1+6c_{11}(a_2\gamma_{21}+a_3\gamma_{31})+6a_3(c_{21}+c_{22})\gamma_{32})F_{0,0,z}g_{0,0,u}\Big)+F_{0,0,z}g_{0,s,0}\\
-6a_2m_1\gamma_{21}F_{0,0,z}g_{0,s,0}-6a_3m_1\gamma_{31}F_{0,0,z}g_{0,s,0}-6a_3m_2\gamma_{32}F_{0,0,z}g_{0,s,0}\\
-2(-1+3a_2l_1\gamma_{21}+3a_3(l_1\gamma_{31}+l_2\gamma_{32}))F_{0,0,z}g_{x,0,0}\Big)h^3+O(h^4).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при відповідних степенях змінної h^i $(i=1,2,3)$ отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3-1&=0,\\
a_2\gamma_{21}+a_3\gamma_{31}+a_3\gamma_{32}-\tfrac{1}{2}&=0,\\
a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3-\tfrac{1}{2}&=0,\\
a_2\beta_{21}+a_3\beta_{31}+a_3\beta_{32}-\tfrac{1}{2}&=0,\\
a_2\alpha_2\gamma_{21}+a_3\alpha_3\gamma_{31}+a_3\alpha_3\gamma_{32}-\tfrac{1}{3}&=0,\\
\tfrac{1}{2}a_2\gamma_{21}^2+\tfrac{1}{2}a_3\gamma_{31}^2+a_3\gamma_{31}\gamma_{32}+\tfrac{1}{2}a_3\gamma_{32}^2-\tfrac{1}{6}&=0,\\
\tfrac{1}{2}a_1\alpha_1^2+\tfrac{1}{2}a_2\alpha_2^2+\tfrac{1}{2}a_3\alpha_3^2-\tfrac{1}{6}&=0,\\
a_2m_1\gamma_{21}+a_3m_1\gamma_{31}+a_3m_2\gamma_{32}-\tfrac{1}{6}&=0,\\
a_2l_1\gamma_{21}+a_3l_1\gamma_{31}+a_3l_2\gamma_{32}-\tfrac{1}{3}&=0,\\
a_3\beta_{32}\gamma_{21}-\tfrac{1}{6}&=0,\\
a_2\alpha_1\beta_{21}+a_3\alpha_1\beta_{31}+a_3\alpha_2\beta_{32}-\tfrac{1}{6}&=0,\\
a_2\beta_{21}\gamma_{21}+a_3\beta_{31}\gamma_{31}+a_3\beta_{32}\gamma_{31}+a_3\beta_{31}\gamma_{32}+a_3\beta_{32}\gamma_{32}-\tfrac{1}{3}&=0,\\
a_2\alpha_2\beta_{21}+a_3\alpha_3\beta_{31}+a_3\alpha_3\beta_{32}-\tfrac{1}{3}&=0,\\
a_3\beta_{21}\beta_{32}-\tfrac{1}{6}&=0,\\
a_2c_{11}\gamma_{21}+a_3c_{11}\gamma_{31}+a_3c_{21}\gamma_{32}+a_3c_{22}\gamma_{32}-\tfrac{1}{6}&=0,\\
\tfrac{1}{2}a_2\beta_{21}^2+\tfrac{1}{2}a_3\beta_{31}^2+a_3\beta_{31}\beta_{32}+\tfrac{1}{2}a_3\beta_{32}^2-\tfrac{1}{6}&=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Похибка має вигляд:

$$
\begin{aligned}
R_1 = \Big(&-\tfrac{1}{6}a_1\alpha_1^3F_{3x,0,0} - a_2\Big(\tfrac{1}{6}g_0^3\gamma_{21}^3F_{0,0,3z} + \tfrac{1}{2}F_0g_0^2\beta_{21}\gamma_{21}^2F_{0,u,2z} + \tfrac{1}{2}F_0^2g_0\beta_{21}^2\gamma_{21}F_{0,2u,z}\\
&+\tfrac{1}{6}F_0^3\beta_{21}^3F_{0,3u,0} + F_0\alpha_1\beta_{21}^2F_{0,2u,0}F_{x,0,0} + \tfrac{1}{2}g_0^2\alpha_2\gamma_{21}^2F_{x,0,2z} + \alpha_1\alpha_2\beta_{21}F_{x,0,0}F_{x,u,0}\\
&+F_0g_0\alpha_2\beta_{21}\gamma_{21}F_{x,u,z} + \tfrac{1}{2}F_0^2\alpha_2\beta_{21}^2F_{x,2u,0} + \tfrac{1}{2}\alpha_1^2\beta_{21}F_{0,u,0}F_{2x,0,0} + \tfrac{1}{2}g_0\alpha_2^2\gamma_{21}F_{2x,0,z}\\
&+\tfrac{1}{2}F_0\alpha_2^2\beta_{21}F_{2x,u,0} + \tfrac{1}{6}\alpha_2^3F_{3x,0,0} + g_0\gamma_{21}^2F_{0,0,2z}\left(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0}\right)\\
&+\alpha_2\gamma_{21}F_{x,0,z}\left(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0}\right) + F_{0,u,z}(g_0\alpha_1\beta_{21}\gamma_{21}F_{x,0,0}\\
&+F_0\beta_{21}\gamma_{21}\left(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0}\right)) + \tfrac{1}{2}\gamma_{21}F_{0,0,z}\left(2c_{11}\alpha_1F_{x,0,0}g_{0,0,u}\right.\\
&\left.+c_{11}^2F_0^2g_{0,0,2u} + 2c_{11}F_0m_1g_{0,s,u} + m_1^2g_{0,2s,0} + 2c_{11}F_0l_1g_{x,0,u} + 2l_1m_1g_{x,s,0} + l_1^2g_{2x,0,0}\right)\Big)\\
&-a_3\Big(\tfrac{1}{6}(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^3F_{0,0,3z} + \tfrac{1}{2}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^2F_{0,u,2z}\\
&+\tfrac{1}{2}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^2(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,2u,z} + \tfrac{1}{6}(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^3F_{0,3u,0}\\
&+(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})F_{0,2u,0}(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} + \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2F_{x,0,0}))\\
&+\tfrac{1}{2}\alpha_3(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})^2F_{x,0,2z} + \alpha_3(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0} + \beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0}\\
&+\alpha_2F_{x,0,0}))\,F_{x,u,0} + \alpha_3(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{x,u,z}\\
&+\tfrac{1}{2}\alpha_3(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})^2F_{x,2u,0} + \tfrac{1}{2}\alpha_3^2(g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{2x,0,z} + \tfrac{1}{2}\alpha_3^2(F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})F_{2x,u,0}\\
&+\tfrac{1}{6}\alpha_3^3F_{3x,0,0} + (g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})F_{0,0,2z}\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0})\\
&+\gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2g_{0,s,0} + l_2g_{x,0,0})\Big)\\
&+\alpha_3F_{x,0,z}\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0}) + \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2g_{0,s,0}\\
&+l_2g_{x,0,0})\Big) + F_{0,u,0}\Big(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2\beta_{31}F_{2x,0,0} + \beta_{32}\big(\tfrac{1}{2}g_0^2\gamma_{21}^2F_{0,0,2z} + F_0g_0\beta_{21}\gamma_{21}F_{0,u,z}\\
&+\tfrac{1}{2}F_0^2\beta_{21}^2F_{0,2u,0} + \alpha_1\beta_{21}F_{0,u,0}F_{x,0,0} + g_0\alpha_2\gamma_{21}F_{x,0,z} + F_0\alpha_2\beta_{21}F_{x,u,0} + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2F_{2x,0,0}\\
&+\gamma_{21}F_{0,0,z}(c_{11}F_0g_{0,0,u} + m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0})\big)\Big) + F_{0,u,z}\Big((g_0\gamma_{31} + g_0\gamma_{32})(\alpha_1\beta_{31}F_{x,0,0}\\
&+\beta_{32}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2F_{x,0,0})) + (F_0\beta_{31} + F_0\beta_{32})\Big(\gamma_{31}(c_{11}F_0g_{0,0,u}\\
&+m_1g_{0,s,0} + l_1g_{x,0,0}) + \gamma_{32}((c_{21}F_0 + c_{22}F_0)g_{0,0,u} + m_2g_{0,s,0} + l_2g_{x,0,0})\Big)\Big)\\
&+F_{0,0,z}\Big(\tfrac{1}{2}\gamma_{31}(2c_{11}\alpha_1F_{x,0,0}g_{0,0,u} + c_{11}^2F_0^2g_{0,0,2u} + 2c_{11}F_0m_1g_{0,s,u} + m_1^2g_{0,2s,0}\\
&+2c_{11}F_0l_1g_{x,0,u} + 2l_1m_1g_{x,s,0} + l_1^2g_{2x,0,0})\\
&+\gamma_{32}((c_{21}\alpha_1F_{x,0,0} + c_{22}(g_0\gamma_{21}F_{0,0,z} + F_0\beta_{21}F_{0,u,0} + \alpha_2F_{x,0,0}))\,g_{0,0,u}\\
&+\tfrac{1}{2}(c_{21}F_0 + c_{22}F_0)^2g_{0,0,2u} + (c_{21}F_0 + c_{22}F_0)m_2g_{0,s,u} + \tfrac{1}{2}m_2^2g_{0,2s,0}\\
&+(c_{21}F_0 + c_{22}F_0)l_2g_{x,0,u} + l_2m_2g_{x,s,0} + \tfrac{1}{2}l_2^2g_{2x,0,0})\Big)\Big)\Big)h^4 + O(h^5).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Випишемо кілька множин розв'язків системи (12) при $\alpha_2 = 2/3$ (не визначені параметри є довільними):

Розв'язок 1:

$$\alpha_3=\tfrac{2}{3},\ \alpha_1=0,\ a_1=\tfrac{1}{4},\ a_3=\tfrac{1}{4}(3-4a_2),\ \beta_{21}=\tfrac{2}{3},\ -3+4a_2\neq 0,$$
$$\beta_{31}=\frac{-3+8a_2}{-9+12a_2},\ \beta_{32}=\tfrac{1}{3}(2-3\beta_{31}),\ \gamma_{21}=\tfrac{2}{3},\ \gamma_{32}=\tfrac{1}{3}(2-3\gamma_{31}),\ -2+3\gamma_{31}\neq 0,$$
$$l_2=\frac{-8+6l_1+12\beta_{31}-18l_1\beta_{31}+9l_1\gamma_{31}}{-6+9\gamma_{31}},\ -2+3l_1\neq 0,\ m_2=\frac{l_1-l_2-2m_1+3l_2m_1}{-2+3l_1},$$
$$-1+3m_1\neq 0,\ c_{22}=\frac{-c_{11}+c_{21}+m_1-3c_{21}m_1-m_2+3c_{11}m_2}{-1+3m_1}.$$

Розв'язок 2:

$$\alpha_3=0,\ \alpha_1=0,\ a_2=\tfrac{3}{4},\ a_3=\tfrac{1}{4}(1-4a_1),$$
$$\beta_{21}=\tfrac{2}{3},\ -1+4a_1\neq 0,\ \beta_{31}=\frac{1}{-1+4a_1},\ \beta_{32}=-\beta_{31},$$
$$\gamma_{21}=\tfrac{2}{3},\ \gamma_{32}=-\gamma_{31},\ l_1=\tfrac{2}{3},\ l_2=\tfrac{2}{3},\ m_1=\tfrac{1}{3},\ m_2=\tfrac{1}{3},\ \gamma_{31}\neq 0,$$
$$c_{22}=\frac{2\beta_{31}-6c_{11}\beta_{31}+3c_{11}\gamma_{31}-3c_{21}\gamma_{31}}{3\gamma_{31}}.$$

Розв'язок 3:

$$\alpha_3=\tfrac{2}{3},\ \alpha_1=0,\ a_1=\tfrac{1}{4},\ a_2=0,\ a_3=\tfrac{3}{4},\ \beta_{21}=\alpha_2,\ \alpha_2\neq 0,\ \beta_{31}=\frac{2(-1+3\alpha_2)}{9\alpha_2},$$
$$\beta_{32}=\tfrac{1}{3}(2-3\beta_{31}),\ \gamma_{21}=\alpha_2,\ \gamma_{32}=\tfrac{1}{3}(2-3\gamma_{31}),\ l_2=\frac{-4+9l_1\gamma_{31}}{-6+9\gamma_{31}},$$
$$m_1=\tfrac{1}{3},\ m_2=\tfrac{1}{3},\ -2+3l_1\neq 0,$$
$$c_{22}=\frac{-2c_{11}+2c_{21}+l_1-3c_{21}l_1-l_2+3c_{11}l_2}{-2+3l_1},\ -2+3\alpha_2\neq 0.$$

Розв'язок 4:

$$\alpha_3=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2\neq 0,\ a_1=\frac{-1+3\alpha_2}{6\alpha_2},\ -1+\alpha_2\neq 0,\ a_2=\frac{-4+6a_1+3\alpha_2-6a_1\alpha_2}{6(-1+\alpha_2)},$$
$$a_3=1-a_1-a_2,\ \beta_{21}=\alpha_2,\ -2+3\alpha_2\neq 0,\ \beta_{31}=\frac{1-6a_1+6a_1\alpha_2}{-2+3\alpha_2},$$
$$\beta_{32}=-2+12a_1+3\alpha_2-18a_1\alpha_2-5\beta_{31}+6\alpha_2\beta_{31},\ \gamma_{21}=\alpha_2,\ \gamma_{32}=0,$$
$$\gamma_{31}=-2+12a_1+3\alpha_2-18a_1\alpha_2-4\beta_{31}+6\alpha_2\beta_{31},$$
$$l_1=\tfrac{2}{3},\ m_1=\tfrac{1}{3},\ c_{11}=\tfrac{1}{3},\ -1+3\alpha_2\neq 0.$$

Розв'язок 5:

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2\alpha_3\neq 0,\ a_1=\frac{2-3\alpha_2-3\alpha_3+6\alpha_2\alpha_3}{6\alpha_2\alpha_3},\ -1+3\alpha_3-3\alpha_3^2+3a_1\alpha_3^2\neq 0,$$
$$a_2=-\frac{3(1-2\alpha_3+2a_1\alpha_3)^2}{4(-1+3\alpha_3-3\alpha_3^2+3a_1\alpha_3^2)},$$
$$a_3=1-a_1-a_2,\ \beta_{21}=\alpha_2,\ (-1+4a_1)(-2+3\alpha_3)\neq 0,$$

$$\beta_{31} = \frac{-2 + 12\alpha_3 - 12a_1\alpha_3 - 21\alpha_3^2 + 30a_1\alpha_3^2 + 12\alpha_3^3 - 24a_1\alpha_3^3 + 12a_1^2\alpha_3^3}{(-1 + 4a_1)(-2 + 3\alpha_3)},$$

$$\beta_{32} = \alpha_3 - \beta_{31},$$

$$\gamma_{21} = \alpha_2,\ \gamma_{32} = \alpha_3 - \gamma_{31},\ l_1 = \tfrac{2}{3},\ l_2 = \tfrac{2}{3},\ m_1 = \tfrac{1}{3},\ m_2 = \tfrac{1}{3},\ -\alpha_3 + \gamma_{31} \neq 0,$$

$$c_{22} = \frac{-c_{11}\alpha_3 + c_{21}\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 + 3c_{11}\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\beta_{31} - 3c_{11}\alpha_2\beta_{31} + c_{11}\gamma_{31} - c_{21}\gamma_{31}}{-\alpha_3 + \gamma_{31}},$$

$$-1 + \alpha_3 \neq 0.$$

3.4. Метод четвертого порядку точності

Для методу четвертого порядку точності отримано значення параметрів (через громіздкість не наводимо викладок):

$$\begin{gathered}
a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \tfrac{1}{8}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \tfrac{2}{3}, \quad \alpha_4 = 1, \\
\beta_{21} = \tfrac{1}{3}, \quad \beta_{31} = -\tfrac{1}{3}, \quad \beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43} = 1, \quad \beta_{42} = -1, \\
\gamma_{21} = \tfrac{1}{3}, \quad \gamma_{31} = \tfrac{1}{3}(2 - 3\gamma_{32}), \\
\gamma_{41} = 1 - \gamma_{42} - \gamma_{43}, \quad l_3 = \frac{8 - 12l_1 + 9(l_1 - l_2)\gamma_{32} + 3(l_1 - l_2)\gamma_{42} + 3l_1\gamma_{43}}{3\gamma_{43}}, \\
m_3 = \frac{4 - 12m_1 + 9(m_1 - m_2)\gamma_{32} + 3(m_1 - m_2)\gamma_{42} + 3m_1\gamma_{43}}{3\gamma_{43}}, \\
c_{33} = \frac{1}{3\gamma_{43}}\big(4 - 12c_{11} + (9c_{11} - 9c_{21} - 9c_{22})\gamma_{32} + \\
(3c_{11} - 3c_{12} - 3c_{22})\gamma_{42} + (3c_{11} - 3c_{31} - 3c_{32})\gamma_{43}\big),
\end{gathered} \tag{14}$$

де $\gamma_{32}, \gamma_{42}, \gamma_{43}, l_1, l_2, m_1, m_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$ – довільні параметри.

Для знаходження наближень у наступних точках x_n $(n \geq 2)$ користуємося способом рухомого початку. Записавши рівняння (1) у вигляді:

$$u'(x) = F[x, u(x), w_n(x) + W(x)],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, u(s))\, ds, \qquad W(x) = \int_{x_n}^{x} g(x, s, u(s))\, ds,$$

отримаємо задачу з новим початком інтегрування (x_n), для розв'язування якої використовуються формули (4)–(10), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою формул виду (4).

4. Оцінка похибки і вибір кроку інтегрування

Запропоновані обчислювальні формули першого, другого, третього та четвертого порядку точності використовують відповідно одне, два, три та чотири обчислення (звертання) до правої частини інтегро-диференціального рівняння. Такий алгоритм називається m-стадійним методом ($m = \overline{1,4}$).

Локальну похибку апроксимації m-стадійного методу в точці x_n обчислюємо за формулою

$$\delta u_n^{[m]} = \max_{m < i \leq 3} \left| u_n^{[i]} - u_n^{[m]} \right|, \quad m = 1, 2, 3, 4, \tag{15}$$

де $\|\cdot\|$ – максимальна норма вектору. Розмір кроку вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\varepsilon_n^{[m]} < \frac{\varepsilon h}{X - x_0}, \tag{16}$$

де ε – необхідна точність обчислень в кінці інтервалу.

Головний член асимптотичного розкладу локальної похибки апроксимації методу p-го порядку точності має вигляд:

$$R_{n+1}^p = h^{p+1}\Psi\Big(u_n, u_n', \ldots, u_n^{(p)}\Big).$$

При зміні кроку інтегрування в g^i разів, де i – додатне або від'ємне ціле число, для нового кроку $h_{\text{new}} = g^i h$ отримуємо:

$$R_{n+1}^p = h_{\text{new}}^{p+1}\Psi\Big(u_n, \ldots, u_n^{(p)}\Big) = g^{i(p+1)}h^{p+1}\Psi\Big(u_n, \ldots, u_n^{(p)}\Big).$$

Звідси, припускаючи, що поведінка локальної похибки визначається її головним членом, можна прогнозувати розмір кроку, перевіряючи нерівність:

$$\delta u_n^{[m]} < \frac{\varepsilon h}{(X - x_0)\, g^{i(m+1)}}. \tag{17}$$

При цьому, для обчислень на наступному кроці використовується той m-стадійний метод, для якого прогнозований крок максимальний. Якщо нерівність (16) виконується, то y_{n+1} приймається за наближений розв'язок у точці $x_{n+1} = x_n + g^i h$; якщо не виконується, то крок інтегрування зменшується доти, поки не виконається нерівність (17), і весь цикл повторюється зі зменшеним кроком.

Зазначимо, що запропоновані методи легко використовувати для ефективної організації контролю чисельного розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь.

5. Висновки

В цій праці:

1. Побудовано методи другого, третього та четвертого порядку точності для наближеного розв'язку початкової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

2. Наведено значення параметрів, при яких, не використовуючи додаткових звертань до правої частини інтегро-диференціального рівняння, одержано двосторонні розрахункові формули. Півсуму двосторонніх наближень до точного розв'язку приймаємо за наближений розв'язок, а абсолютна величина піврізниці визначає похибку отриманого результату.

3. Виписано явний вираз головного члена локальної похибки результату, який обчислюється з використанням раніше отриманих значень правої частини інтегро-диференціального рівняння.

4. Запропоновано m-стадійний метод ($m = \overline{1,4}$) p-го порядку точності ($p = \overline{1,4}$) з автоматичним вибором кроку інтегрування і порядку точності методу.

Модульний характер запропонованих алгоритмів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку початкової задачі. Співставлення цих наближень дає важливу інформацію для вибору кроку інтегрування та оцінки точності результату.

Прикладним аспектом використання отриманого наукового результату є можливість, використовуючи лише чотири звертання до правої частини рівняння, отримати методи відповідно першого, другого, третього та четвертого порядку точності. Це складає передумови для використання запропонованих обчислювальних алгоритмів при дослідженні прикладних задач.

Запропоновану методику знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь можна застосувати для побудови числових методів вищих порядків точності.

Список використаної літератури

1. Feldstein A. Numerical methods for nonlinear Volterra integrodifferential equations / A. Feldstein, J. R. Sopka // SIAM J. Numer. Anal. – 1974. – Vol. 11, № 4. – P. 826–846. – DOI: https://doi.org/10.1137/0711067.
2. Izadi M. Numerical approximations to the nonlinear fractional-order logistic population model with fractional-order Bessel and Legendre bases / M. Izadi, H. M. Srivastava // Chaos. Solitons & Fractals. – 2021. – Vol. 145. – 110779. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110779.
3. Yang X.-J. A new computational approach for solving nonlinear local fractional PDEs / X.-J. Yang, F. Gao, H.M. Srivastava // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 339. – P. 285–296. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.10.007.
4. Ordokhani Y. An application of Bessel function for solving nonlinear Fredholm-Volterra-Hammerstein integro-differential equations / Y. Ordokhani, H. Dehestani // J. Sci. Kharazmi University. – 2018. – Vol. 18, № 2. – P. 61–76. – DOI: https://doi.org/10.29252/jsci.18.2.61.
5. Rong Loh J. A new numerical scheme for solving system of Volterra integro-differential equations / J. Rong Loh, C. Phang // Alexandria Eng. J. – 2018. – Vol. 57, № 2. – P. 1117–1124. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.01.021.
6. Hadhoud A.R. Non-polynomial B-spline and shifted Jacobi spectral collocation techniques to solve time-fractional nonlinear coupled Burgers' equations / A.R. Hadhoud, H.M. Srivastava, A.A.M. Rageh // Adv. Differ. Equ. – 2021. – Article ID: 439. – DOI: https://doi.org/10.1186/s13662-021-03604-5.
7. Srivastava H.M. Some dynamical models involving fractional-order derivatives with the Mittag-Leffler type kernels and their applications based upon the Legendre spectral collocation method / H.M. Srivastava, A.K.N. Alomari, K.M. Saad, W.M. Hamanah // Fractal Fract. – 2021. – Vol. 5, № 3. – Article ID: 131. – DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract5030131.
8. Kumar S. A convergent collocation approach for generalized fractional integro-differential equations using Jacobi poly-fractonomials / S. Kumar, R.K. Pandey, H.M. Srivastava, G.N. Singh // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, № 9. – Article ID: 979. – DOI: https://doi.org/10.3390/math9090979.
9. Izadi M. A novel matrix technique for multi-order pantograph differential equations of fractional order / M. Izadi, H.M. Srivastava // Proc. R. Soc. A. – 2021. – Vol. 477.– Article ID: 20210321. – DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0321.
10. Singh H. Solution of multi-dimensional Fredholm equations using Legendre scaling functions / H. Singh, D. Baleanu, H.M. Srivastava, H. Dutta, N. Kumar-Jha // Appl. Numer. Math. – 2020. – Vol. 150. – P. 313–324. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.10.004.

11. Shirania D. Numerical solution of system of Fredholm-Volterra integro-differential equations using Legendre polynomials / D. Shirania, M. Tavassoli-Kajania, S. Salahshourb // Filomat. – 2022. – Vol. 36, № 5. – P. 1685–1697. – DOI: https://doi.org/10.2298/FIL2205685S.
12. Al-Shimmary A. A new approach to solve Burgers' equation using Runge-Kutta 6th order method based on Cole-Hopf transformation / A. Al-Shimmary, S. Kareem, A. Kassim // J. Engineering and Applied Sciences. – 2020. – Vol. 15. – P. 2362–2369. – DOI: https://doi.org/10.36478/jeasci.2020.2362.2369.
13. Rabiei F. Numerical solutions of Volterra integro-differential equations using general linear method / F. Rabiei, F.A. Hamid, Z.A. Majid, F. Ismail // Numerical Algebra, Control and Optimization. – 2019. – Vol. 9, № 4. – P. 433–444. – DOI: https://doi.org/10.3934/naco.2019042.
14. Baharum N.A. Solving Volterra integrodifferential equations via diagonally implicit multistep block method / N.A. Baharum, Z. Abdul Majid, N. Senu // Int. J. Math. Math. Sci. – 2018. – Article ID: 7392452. – DOI: https://doi.org/10.1155/2018/7392452.
15. Чаплыгин С.А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / С.А. Чаплыгин. – Москва–Ленинград: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 103 с.
16. Обшта А.Ф. Двосторонні інтегральні і диференціальні нерівності та їхнє застосування / А.Ф. Обшта, Б.А. Шувар. – Львів: Каменяр, 2011.
17. Сеньо П.С. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2017. – Вип. 25. – С. 18–37.
18. Gybkina N. Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional nonlinear heat conductivity equation / N. Gybkina, M. Sidorov, K. Vasylyshyn // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2021. – № 4. – С. 115–127. – DOI: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.4.09.
19. Горбунов А.Д. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков / А.Д. Горбунов, Ю.А. Шахов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 239–253.
20. Pelekh Ya.M. An approach to deducing approximate solutions to the Cauchy problem for nonlinear differential equations / Ya.M. Pelekh // Ukrainian Mathematical Journal. – 1992. – Vol. 44, № 12. – P. 1554–1560. – DOI: https://doi.org/10.1007/BF01061280.
21. Pelekh Ya.M. Numerical methods of solving nonlinear integral equations of Volterra type / Ya.M. Pelekh // Journal of Mathematical Sciences. – 1998. – Vol. 90, № 5. – P. 2431–2435. – DOI: https://doi.org/10.1007/BF02433979.
22. Pelekh Y. Determination of Magnetic Field Strength in a Layer of Electrotechnical Steel / Y. Pelekh, R. Stolyarchuk, A. Kunynets, B. Pakholok, S. Mentynskyi, B. Fil // Proc. Int. Sci. Techn. Conf. on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT-2021). – 2021. – Vol. 1. – P. 206–209. – DOI: https://doi.org/10.1109/CSIT52700.2021.9648711.
23. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J.C. Butcher. – 3 rd ed. – London: John Wiley & Sons, 2016. – DOI: https://doi.org/10.1002/9781119121534.

Стаття: надійшла до редколегії 02.02.2026
доопрацьована 04.03.2026
прийнята до друку 16.03.2026

VARIABLE-ORDER ACCURACY METHOD FOR SOLVING SECOND-ORDER VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Y. Pelekh[1], B. Fil[2], B. Pakholok[1]

[1]*Lviv Polytechnic National University,*
12, Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine,
e-mail: yaroslav.m.pelekh@lpnu.ua, bohdan.b.pakholok@lpnu.ua,
[2]*Ivan Franko National University of Lviv,*
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine,
e-mail: bohdan.fil@lnu.edu.ua

When calculating modern applied problems, there is a need to find not only approximate solutions to the mathematical models under study, but also to obtain a guaranteed estimate of the error of the result. In this work, explicit Runge-Kutta-type calculation formulas for solving the initial problem for nonlinear Volterra integro-differential equations (IDEs) of the second kind are derived. A set of parameters is found for which two-sided approximations of the exact solution are obtained without using additional calculations of the right-hand side of the integro-differential equation. A pair of formulas corresponding to two values of the two-sidedness parameter, which differ only in sign, constitute the calculation formulas of the two-sided method. One of them gives an upper approximation, and the other a lower approximation to the exact solution of the Cauchy problem for the integro-differential equation. We take the half-sum of the two-sided approximations as the approximate solution, and the modulus of the half-difference gives the error of the calculation result. An explicit expression of the main (leading) term of the local error of the result is written, which is calculated using the previously obtained values of the right-hand side of the integro-differential equation.

The values of the parameters at which numerical methods of the first, second, third and fourth order of accuracy were obtained are found. For the m-stage ($m = \overline{1,4}$) method of the Runge-Kutta type a method is proposed for finding the approximation error value at each nodal point, choosing the integration step and changing the order of accuracy of the approximate method.

The modular nature of the proposed algorithms makes it possible to obtain several approximations to the exact solution of the initial problem for the integro-differential equation at each integration point. Comparison of these approximations provides important information for choosing the integration step and assessing the accuracy of the result.

Key words: Cauchy problem, Initial Value Problem – IVP, Integro-differential equation, Numerical methods, Approximate methods, Order of accuracy, Local truncation error.