

ІТЕРАЦІЙНИЙ ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

П. Сеньо, А. Заяць

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79007, Україна,
e-mail: petro.senio@lnu.edu.ua, artur.zaiats@lnu.edu.ua*

Розглядається задача побудови гарантованих двосторонніх наближень розв'язків деяких класів інтегральних рівнянь з відомою диференційовною функцією та інтегровним ядром у заданій області. Розв'язок будується у формі функціонального інтервалу, що забезпечує гарантоване двостороннє оцінювання шуканого розв'язку.

Класичні методи побудови двосторонніх наближень – метод С.А. Чаплигіна, інтервальні методи Мура, алгоритм Лонера та програмний комплекс VNODE-LP – мають суттєві обмеження: необхідність аналітичного знаходження початкових наближень, вимогу опуклості правої частини рівняння, потребу в автоматичному диференціюванні високих порядків, катастрофічне накопичення надрозривків на великих часових проміжках. Запропонований підхід на основі математики функціональних інтервалів не має зазначених обмежень і може бути застосований до інтегральних рівнянь.

Сформульовано та доведено теорему, яка визначає еквівалентність інтегрального рівняння та початкової задачі для похідної на кожному інтервалі. Продemonстровано, що квадратичні параболи утворюють параболічний паралелограм, який обмежує розв'язок знизу та зверху, а максимальна ширина досягається в середній точці інтервалу із квадратичною збіжністю. У точках, де верхня та нижня обмежувальні функції збігаються, отримуємо значення розв'язку з заданою точністю.

На цій підставі розроблено алгоритм побудови параболічних функціональних інтервалів з адаптивним вибором кроку, що дає змогу будувати гарантовані двосторонні наближення із заданою точністю. Алгоритм охоплює: побудову початкового лінійного функціонального інтервалу, визначення інтервалу виконання обмежень на першу похідну, побудову параболічних обмежників та ітераційне звуження інтервалу.

Працездатність методу підтверджено двома числовими експериментами з інтегральними рівняннями, аналітичні розв'язки яких відомі. Усі обчислення виконано в арифметиці довільної точності (16 значущих цифр). Результати підтвердили гарантоване покриття точного розв'язку двосторонніми параболічними оцінками з заданою точністю.

Ключові слова: функціональні інтервали, інтегральні рівняння, двосторонні методи, параболічний паралелограм, адаптивний крок.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай потрібно на основі математики функціональних інтервалів на проміжку $[a, b]$ знайти гарантовані двосторонні апроксимації розв'язку $y(x)$ інтегральних рівнянь такого вигляду:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s, y(s)) ds, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

де $f(x)$ – відома диференційовна функція, ядро $K(x, s, y)$ – інтегровне у відповідній області, і для функції-розв'язку $y(x)$ існує його лінійний функціональний інтервал [1].

Отже, необхідно побудувати розв'язок рівняння (1) у вигляді функціонального інтервалу

$$\{[a, b], L(x), U(x)\}, \quad L(x) \leq y(x) \leq U(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

де $L(x)$ та $U(x)$ – нижня та верхня обмежувальні функції цього функціонального інтервалу.

2. АКТУАЛЬНІСТЬ ПРОБЛЕМИ

Задача побудови гарантованих двосторонніх апроксимацій розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь є одною з центральних у чисельному аналізі. Класичні методи зазвичай дають лише точкові наближення без строгих оцінок похибки, тоді як для задач із невизначеністю параметрів або початкових умов принципово важливо отримати верхню та нижню межі, між якими гарантовано міститься шуканий розв'язок.

Одним із перших систематичних підходів до побудови таких двосторонніх наближень є метод С. А. Чаплигіна. Метод базується на теорії диференціальних нерівностей. Для задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ будуються дві монотонні послідовності функцій $\{u_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$, що обмежують розв'язок, відповідно, знизу та зверху. За умови опуклості (або увігнутості) правої частини $f(x, y)$ стосовно y метод будує монотонно збіжні послідовності верхніх і нижніх наближень. Проте практичне застосування методу Чаплигіна пов'язане зі значними труднощами. Зокрема, необхідно аналітично знайти початкові верхнє та нижнє наближення $u_0(x)$ і $v_0(x)$, що задовольняють відповідні диференціальні нерівності, а це є нетривіальною задачею. Кожна ітерація потребує розв'язування лінеаризованого диференціального рівняння, що ускладнює реалізацію.

Інший напрям розвитку двосторонніх методів пов'язаний з інтервальним аналізом. Класичні інтервальні методи для звичайних диференціальних рівнянь, зокрема метод Мура, алгоритм Лонера та програмний комплекс VNODE-LP, використовують інтервальні ряди Тейлора за часовою змінною для отримання гарантованих включень розв'язку. Однак ці методи працюють у два етапи: спочатку перевіряють існування та єдиність розв'язку на проміжку $[a, b]$, а потім обчислюють лише тісніші включення. Основним обмеженням класичних інтервальних підходів є катастрофічне накопичення надоцінки на великих часових проміжках, зокрема спричинене перемноженням інтервальних матриць. Крім того, ці методи потребують автоматичного диференціювання високих порядків, що суттєво ускладнює їхню реалізацію.

Ці проблеми опрацьовані, наприклад, в [6–8].

Запропонований у цій роботі метод поєднує ідею двосторонніх наближень із математичним апаратом функціональних інтервалів [1, 3, 4]. На відміну від методу Чаплигіна, він не потребує ані аналітичного знаходження початкових наближень, ані опуклості (увігнутості) правої частини рівняння, та безпосередньо застосовний до інтегральних рівнянь. На відміну від інтервальних методів Тейлора та VSPODE [6], метод не потребує автоматичного диференціювання. Адаптивний вибір довжини кроку автоматично реагує на ступінь нелінійності задачі, а квадратична збіжність ширини параболічного паралелограма ($\omega_a \sim O(h^2)$) забезпечує ефективне звуження невизначеності до розв'язку рівняння (1) на кожній ітерації.

3. СХЕМА ТА АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

На основі обмежень на першу похідну будуємо параболічний паралелограм [2].

На цій підставі запропоновано схему розв'язання рівняння (1) у [4], що полягає у послідовному розв'язуванні задач того самого типу на підінтервалах $[b_i, b_{i+1}]$, де b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), права межа інтервалу виконання відповідних обмежень на першу похідну розв'язку, зокрема $b_0 = a$, $b_n = b$. На кожному з них будується інтегральне рівняння

$$y(x) = f(x) + y(b_i) - f(b_i) + \lambda \int_{b_i}^x K(x, s, y(s)) ds, \quad x \in [b_i, b_{i+1}].$$

Тоді з теорем 1, 2 [4] і висновків з них маємо такі теореми.

Теорема 1. Нехай:

1) функція $f(x)$ один раз неперервно диференційована на $[a, b]$ і ядро $K(x, s, y)$ інтегровне у відповідній області;

2) на кожному підінтервалі $[b_i, b_{i+1}] \subset [a, b]$ існують лінійні функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k}x + \underline{m}, \quad \bar{g}(x) = \bar{k}x + \bar{m}$$

такі, що

$$\underline{g}(x) \leq y'(x) \leq \bar{g}(x). \quad (2)$$

Тоді:

1) рівняння (1) на кожному підінтервалі $[b_i, b_{i+1}]$ для всіх $x \in [b_i, b_{i+1}]$ еквівалентна загальній початковій задачі

$$y'(x) = f'(x) + \lambda K(x, x, y(x)), \quad (3)$$

за початкової умови

$$y(b_i) = f(b_i) + y(b_{i-1}) - f(b_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

де $y(b_0) = f(a)$;

2) квадратні параболы

$$\bar{p}_a(x) = y(b_i) + (\bar{k}/2)(x^2 - b_i^2) + \bar{m}(x - b_i), \quad (5)$$

$$\underline{p}_a(x) = y(b_i) + (\underline{k}/2)(x^2 - b_i^2) + \underline{m}(x - b_i); \quad (6)$$

такі, що

$$\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x), \quad \forall x \in [b_i, b_{i+1}].$$

3) максимальна ширина ω_{max} [9] так побудованого функціонального інтервалу досягається в точці $s_i = (b_i + b_{i+1})/2$, причому

$$\omega_{max} = (\bar{k} - \underline{k})(b_{i+1} - b_i)(3b_i + b_{i+1})/8 + (\bar{m} - \underline{m})(b_{i+1} - b_i)/2.$$

Доведення. Пункт 1). З інтегровності ядра $K(x, s, y(s))$ випливає існування інтеграла $\int_a^x K(x, s, y(s)) ds$ як функції верхньої межі. Оскільки за умовою 1) функція $f(x)$ диференційовна, а $y(x)$ – розв'язок рівняння (1), то (1) є тотожністю, тому існує похідна правої частини (1). Отже, існує і похідна лівої частини (1), тобто функція $y(x)$ – розв'язок рівняння (1) – диференційовна функція.

Отже,

$$y'(x) = f'(x) + \lambda K(x, x, y(x)),$$

тобто виконується (3).

З (1) при $x = a$ маємо $y(a) = f(a)$, тобто при $i = 0$ виконується початкова умова (4).

Для $i > 0$ з адитивності інтеграла отримуємо

$$\int_a^{b_i} K(x, s, y(s)) ds = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{b_j}^{b_{j+1}} K(x, s, y(s)) ds.$$

Тому

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} \int_{b_j}^{b_{j+1}} K(x, s, y(s)) ds, \quad x \in [b_i, b_{i+1}].$$

Отже, при $x = b_i$ маємо

$$\lambda \int_a^{b_i} K(b_i, s, y(s)) ds = y(b_i) - f(b_i).$$

Тобто задача (3)–(4) є новою початковою задачею.

Пункт 2). Цей висновок отримуємо цілком аналогічно, як в [4].

Пункт 3). Віднімаючи (6) від (5)

$$\omega_a(x) = \bar{p}_a(x) - \underline{p}_a(x) = (\bar{k} - \underline{k})/2 \cdot (x^2 - b_i^2) + (\bar{m} - \underline{m})(x - b_i) \geq 0.$$

Підставляючи $x = (b_i + b_{i+1})/2$, маємо $x - b_i = (b_{i+1} - b_i)/2$ та $x^2 - b_i^2 = (b_{i+1} - b_i)(3b_i + b_{i+1})/4$, звідки

$$\omega_{max} = (\bar{k} - \underline{k})(b_{i+1} - b_i)(3b_i + b_{i+1})/8 + (\bar{m} - \underline{m})(b_{i+1} - b_i)/2.$$

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Якщо $\bar{k} = \underline{k} = 0$, тобто

$$\underline{C} \leq y'(x) \leq \bar{C}, \tag{7}$$

де $\underline{C}$, $\bar{C}$ – деякі константи, то

$$\underline{C}(x - a) + y(a) \leq y(x) \leq \bar{C}(x - a) + y(a). \tag{8}$$

І навпаки, якщо виконується подвійна нерівність (8), то виконується і (7).

Отже, на підставі описаної вище схеми пропонуємо такий алгоритм розв'язання сформульованої задачі.

Алгоритм

1. Реалізуючи висновок леми 1, вибираємо початковий лінійний функціональний інтервал розв'язку рівняння (1)

$$y(x) = \{[a, b], \underline{k}x + \underline{m}, \bar{k}x + \bar{m}\} \tag{9}$$

таким, що містить дотичну $y(x) = y'(a)(x - a) + y(a)$ до шуканого розв'язку рівняння (1) у точці $x = a$, та реалізуючи принцип, запропонований в [4], де

$$\bar{k} = y'(a) + \delta, \quad \underline{k} = y'(a) - \delta, \quad \bar{m} = y(a) - \bar{k}a, \quad \underline{m} = y(a) - \underline{k}a, \tag{10}$$

де $\delta > 0$.

2. Визначаємо в інтервалі $[a, b]$ точку b_i , до якої, включно з нею, виконується подвійна нерівність (2). Для цього:

2.1. Підставляємо ЛФІ (9) в ядро $K(\cdot)$ рівняння (1) і, виконавши всі необхідні операції, відповідно до аналітичного вигляду ядра, отримуємо лінійний функціональний інтервал похідної шуканого розв'язку у вигляді таких списків значень:

- $\{x_j\}$ – список точок розбиття інтервалу $[a, b]$ характерними точками [1] ядра рівняння (1);
- $\{\bar{y}_j\}, \{\underline{y}_j\}$ – списки значень, відповідно, верхніх і нижніх кусково-лінійних обмежувальних функцій цього ЛФІ в точках розбиття інтервалу $[a, b]$;
- $\{\bar{k}_j\}, \{\underline{k}_j\}$ – списки кутових коефіцієнтів, відповідно, верхніх і нижніх кусково-лінійних обмежувальних функцій цього ЛФІ в точках розбиття інтервалу $[a, b]$;
- $\{\bar{m}_j\}, \{\underline{m}_j\}$ – списки коефіцієнтів зміщення верхніх та нижніх кусково-лінійних обмежувальних функцій цього ЛФІ в точках розбиття інтервалу $[a, b]$.

2.2. Реалізуючи зауваження 1 та запропоновану вище методику побудови ЛФІ похідної розв'язку, зі списків $\{\bar{k}_j\}, \{\underline{k}_j\}, \{\bar{m}_j\}, \{\underline{m}_j\}$ вибираємо, відповідно, елементи $\bar{k}_1, \underline{k}_1, \bar{m}_1, \underline{m}_1$ та будуємо прямі

$$y_w(x) = \bar{k}_1 x + \bar{m}_1, \quad y_n(x) = \underline{k}_1 x + \underline{m}_1. \quad (11)$$

Тоді точка b_i є меншою з двох точок перетину цих прямих з горизонтальними прямими $\bar{k}$ та $\underline{k}$, відповідно, за умови, що прямі повністю охоплюють всі значення списків елементів $\{\bar{y}_j\}, \{\underline{y}_j\}$ в інтервалі $[a, b]$.

3. На основі так отриманих прямих (11) за Теоремою 1 будуємо параболічний функціональний інтервал. Отримуємо параболі

$$\bar{p}_a(x) = y(a) + (\bar{k}_1/2)(x^2 - a^2) + \bar{m}_1(x - a), \quad (12)$$

$$\underline{p}_a(x) = y(a) + (\underline{k}_1/2)(x^2 - a^2) + \underline{m}_1(x - a) \quad (13)$$

такі, що $\underline{p}_a(x) \leq y(x) \leq \bar{p}_a(x)$ для всіх $x \in [a, b_i]$.

4. Знаходимо значення $\bar{p}_a(b_i)$ і $\underline{p}_a(b_i)$ парабол (12), (13) у середній точці $s = (a + b_i)/2$.
5. Будуємо параболі $\bar{p}_s(x)$ та $\underline{p}_s(x)$, які проходять, відповідно, через точки $(s, \bar{p}_a(s))$ та $(s, \underline{p}_a(s))$

$$\bar{p}_s(x) = \bar{p}_a(s) + (\bar{k}_1/2)(x^2 - s^2) + \bar{m}_1(x - s), \quad (14)$$

$$\underline{p}_s(x) = \underline{p}_a(s) + (\underline{k}_1/2)(x^2 - s^2) + \underline{m}_1(x - s). \quad (15)$$

6. Обчислюємо значення парабол (14), (15) у точці $x = b_i$ та отримуємо інтервал $[\underline{p}_s(b_i), \bar{p}_s(b_i)]$.
7. Якщо ширина цього інтервалу $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i) < \varepsilon$, де ε – бажана гарантована, задана нами, точність, двосторонньої апроксимації розв'язку рівняння (1), у точці b_i , тоді вже маємо таку початкову задачу (3)–(4) де, згідно з [5],

$$y(b_i) = (\bar{p}_s(b_i) + \underline{p}_s(b_i))/2.$$

Якщо $b_i = b$, то кінець алгоритму. Інакше переходимо до Кроку 1 для нового інтервалу $[b_i, b]$. Якщо ж $\omega \geq \varepsilon$, виконуємо такі наступні кроки алгоритму.

8. Обчислюємо кутові коефіцієнти прямих, які проходять через точки $(a, y(a))$ та $(s, \bar{p}_a(s))$ і $(a, y(a))$ та $(s, \underline{p}_a(s))$, відповідно,

$$\begin{aligned}\tilde{\bar{k}} &= (\bar{p}_a(s) - y(a))/(s - a), \\ \tilde{\underline{k}} &= (\underline{p}_a(s) - y(a))/(s - a),\end{aligned}$$

обчислюємо відхилення від дотичної

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \tilde{\bar{k}} - y'(a), \\ \underline{\delta} &= \tilde{\underline{k}} - y'(a).\end{aligned}$$

Вводимо нове відхилення

$$\tilde{\delta} = \max(|\bar{\delta}|, |\underline{\delta}|). \quad (16)$$

9. Обчислюємо нові значення обмежників ЛФІ розв'язку, замінюючи δ на $\tilde{\delta}$ (16)

$$\begin{aligned}\bar{k}_{new} &= y'(a) + \tilde{\delta}, \quad \bar{m}_{new} = y(a) - \bar{k}_{new} a, \\ \underline{k}_{new} &= y'(a) - \tilde{\delta}, \quad \underline{m}_{new} = y(a) - \underline{k}_{new} a.\end{aligned}$$

Переходимо до Кроку 2.

4. ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для перевірки запропонованого методу розглянуто дві тестові задачі – інтегральні рівняння вигляду (1). Розв'язки кожного інтегрального рівняння побудовано у вигляді параболічних паралелограмів на всьому проміжку інтегрування та виконано порівняння так отриманих двосторонніх апроксимацій з точним розв'язком.

Усі обчислення виконано в арифметиці довільної точності (BigDecimal, 16 значущих цифр). Параметр початкового відхилення в обох прикладах $\Delta = 1,5$.

Приклад 1. Побудувати гарантовані двосторонні апроксимації розв'язку такого інтегрального рівняння:

$$y(x) = 1 + \int_1^x 2\sqrt{y(s)} ds, \quad x \in [1, 2].$$

Ширина функціональних інтервалів розв'язку повинна бути $\varepsilon \leq 10^{-8}$.

Послідовно будуємо верхні та нижні обмежувальні параболи (14), (15) функціонального інтервалу розв'язку. Табл. 1 демонструє процес звуження початкового функціонального інтервалу на першому підінтервалі, Кроки 1–9 алгоритму. Табл. 2 містить значення парабол для перших та останніх підінтервалів.

Таблиця 1

Динаміка звуження функціонального інтервалу розв'язку
на першому підінтервалі цього рівняння

№	b_i	$\bar{k}$	$\bar{m}$	$\underline{k}$	$\underline{m}$	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$
1	1,371708	3,500001	–2,500001	0,500001	0,500001	1,933269	1,829389	$1,04 \cdot 10^{-1}$	1,881584
2	1,044784	2,325245	–1,325245	1,674755	–0,674755	1,091729	1,091388	$3,41 \cdot 10^{-4}$	1,091574
3	1,011196	2,026033	–1,026033	1,973966	–0,973966	1,022518	1,022516	$1,80 \cdot 10^{-6}$	1,022517
4	1,001398	2,005671	–1,005671	1,994329	–0,994329	1,002797	1,002797	$6,22 \cdot 10^{-9}$	1,002797

Тут b_i – права межа підінтервалу, до якої виконуються обмеження (2) (Крок 2); $y(b_i)$ – значення точного розв'язку в точці b_i ; $\bar{k}$, $\bar{m}$ – коефіцієнти верхньої обмежувальної прямої (10) ЛФІ першої похідної; $\underline{k}$, $\underline{m}$ – коефіцієнти нижньої обмежувальної прямої (10); $\bar{p}_s(b_i)$, $\underline{p}_s(b_i)$ – значення верхньої (14) та нижньої (15) обмежувальних парабол у точці b_i (Крок 6); $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ – ширина функціонального інтервалу розв'язку в точці b_i (Крок 7). Аналітичний розв'язок: $y(x) = x^2$.

Таблиця 2

Двосторонні параболічні апроксимації розв'язку на підінтервалах рівняння

№	a	s	b_i	$\bar{p}_a(s)$	$\underline{p}_a(s)$	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	N	$y(b_i)$
1	1,000000	1,000988	1,001398	1,001977	1,001977	1,002797	1,002797	$6,22 \cdot 10^{-9}$	4	1,002797
2	1,001398	1,001562	1,001630	1,003127	1,003127	1,003263	1,003263	$2,85 \cdot 10^{-11}$	4	1,003263
3	1,001630	1,002124	1,002329	1,004253	1,004253	1,004664	1,004664	$3,84 \cdot 10^{-10}$	5	1,004664
4	1,002329	1,003311	1,003718	1,006633	1,006633	1,007450	1,007450	$3,04 \cdot 10^{-9}$	4	1,007450
5	1,003718	1,003992	1,004106	1,008001	1,008001	1,008229	1,008229	$1,32 \cdot 10^{-10}$	4	1,008229
...										
$n-4$	1,999804	1,999822	1,999829	3,999286	3,999286	3,999315	3,999315	$2,24 \cdot 10^{-10}$	1	3,999316
$n-3$	1,999829	1,999844	1,999850	3,999376	3,999376	3,999401	3,999401	$1,72 \cdot 10^{-10}$	1	3,999401
$n-2$	1,999850	1,999863	1,999869	3,999454	3,999454	3,999476	3,999476	$1,31 \cdot 10^{-10}$	1	3,999476
$n-1$	1,999869	1,999880	1,999885	3,999522	3,999522	3,999541	3,999541	$1,01 \cdot 10^{-10}$	1	3,999541
n	1,999885	1,999966	2,000000	3,999865	3,999865	4,000000	4,000000	$4,93 \cdot 10^{-9}$	1	4,000000

Тут a – ліва межа підінтервалу; $s = (a+b_i)/2$ – середня точка підінтервалу (Крок 4); b_i – права межа підінтервалу; $y(b_i)$ – значення точного розв'язку в точці b_i ; $\bar{p}_a(s)$, $\underline{p}_a(s)$ – значення парабол (12), (13) у середній точці s (Крок 4); $\bar{p}_s(b_i)$, $\underline{p}_s(b_i)$ – значення парабол (14), (15) у точці b_i (Крок 6); $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ – ширина функціонального інтервалу (Крок 7); N – кількість ітерацій до досягнення ширини функціонального інтервалу; n – загальна кількість підінтервалів.

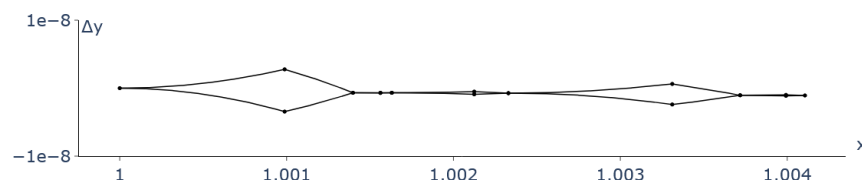


Рис. 1. Графіки відхилень $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$ параболічних обмежників від точного розв'язку для перших 5 підінтервалів рівняння

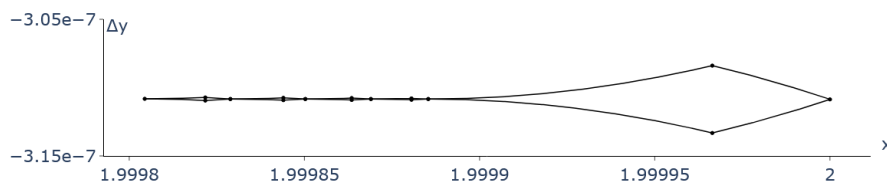


Рис. 2. Графіки відхилень $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$ параболічних обмежників від точного розв'язку для останніх 5 підінтервалів рівняння

На рисунках зображено відхилення $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$, де $p(x)$ – відповідна

обмежувальна парабола ($\bar{p}_a$ (12), $\underline{p}_a$ (13), $\bar{p}_s$ (14), $\underline{p}_s$ (15)), $y(x)$ – точний розв’язок.

Приклад 2. Побудувати гарантовані двосторонні апроксимації розв’язку такого інтегрального рівняння:

$$y(x) = x \cdot 2^x - \int_0^x 2^{x-s} y(s) ds, \quad x \in [0, 1].$$

Ширина функціональних інтервалів розв’язку повинна бути $\varepsilon \leq 10^{-8}$.

Послідовно будуємо верхні та нижні обмежувальні параболи (14), (15) функціонального інтервалу розв’язку. Табл. 3 демонструє процес звуження початкового функціонального інтервалу на першому підінтервалі. Табл. 4 містить значення парабол для перших та останніх підінтервалів.

Таблиця 3

Динаміка звуження функціонального інтервалу розв’язку
на першому підінтервалі даного рівняння

№	b_i	$\bar{k}$	$\bar{m}$	$\underline{k}$	$\underline{m}$	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	$y(b_i)$
1	1,000000	2,500001	0,000000	-0,500001	0,000000	0,941201	1,455739	$5,15 \cdot 10^{-1}$	1,264241
2	0,500001	1,356504	0,000000	0,643496	0,000000	0,533891	0,564081	$3,02 \cdot 10^{-2}$	0,556450
3	0,123402	1,079175	0,000000	0,920825	0,000000	0,126167	0,126563	$3,96 \cdot 10^{-4}$	0,126459
4	0,030753	1,013610	0,000000	0,986390	0,000000	0,030934	0,030938	$4,12 \cdot 10^{-6}$	0,030938
5	0,007682	1,003042	0,000000	0,996958	0,000000	0,007694	0,007694	$5,69 \cdot 10^{-8}$	0,007694
6	0,001920	1,000746	0,000000	0,999254	0,000000	0,001921	0,001921	$8,70 \cdot 10^{-10}$	0,001921

Тут b_i – права межа підінтервалу, до якої виконуються обмеження (2) (Крок 2); $y(b_i)$ – значення точного розв’язку в точці b_i ; $\bar{k}$, $\bar{m}$ – коефіцієнти верхньої обмежувальної прямої (10) ЛФІ першої похідної; $\underline{k}$, $\underline{m}$ – коефіцієнти нижньої обмежувальної прямої (10); $\bar{p}_s(b_i)$, $\underline{p}_s(b_i)$ – значення верхньої (14) та нижньої (15) обмежувальних парабол у точці b_i (Крок 6); $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ – ширина функціонального інтервалу розв’язку в точці b_i (Крок 7). Аналітичний розв’язок: $y(x) = 2^x(1 - e^{-x})$.

Таблиця 4

Двосторонні параболічні апроксимації розв’язку на підінтервалах рівняння

№	a	s	b_i	$\bar{p}_a(s)$	$\underline{p}_a(s)$	$\bar{p}_s(b_i)$	$\underline{p}_s(b_i)$	ω	N	$y(b_i)$
1	0,000000	0,001358	0,001920	0,001358	0,001358	0,001921	0,001921	$8,70 \cdot 10^{-10}$	6	0,001921
2	0,001920	0,003207	0,003741	0,003209	0,003209	0,003743	0,003743	$7,43 \cdot 10^{-10}$	5	0,003743
3	0,003741	0,005093	0,005654	0,005098	0,005098	0,005660	0,005660	$8,64 \cdot 10^{-10}$	6	0,005660
4	0,005654	0,006937	0,007468	0,006946	0,006946	0,007479	0,007479	$7,38 \cdot 10^{-10}$	5	0,007479
5	0,007468	0,008749	0,009279	0,008763	0,008763	0,009296	0,009296	$7,35 \cdot 10^{-10}$	5	0,009296
⋮										
$n-4$	0,999991	0,999994	0,999996	1,264231	1,264231	1,264234	1,264234	$9,72 \cdot 10^{-12}$	1	1,264234
$n-3$	0,999996	0,999997	0,999998	1,264236	1,264236	1,264237	1,264237	$2,43 \cdot 10^{-12}$	1	1,264238
$n-2$	0,999998	0,999999	0,999999	1,264238	1,264238	1,264239	1,264239	$6,07 \cdot 10^{-13}$	1	1,264239
$n-1$	0,999999	0,999999	0,999999	1,264239	1,264239	1,264240	1,264240	$1,52 \cdot 10^{-13}$	1	1,264240
n	1,000000	1,000000	1,000000	1,264240	1,264240	1,264240	1,264240	$1,20 \cdot 10^{-15}$	1	1,264240

Тут a – ліва межа підінтервалу; $s = (a + b_i)/2$ – середня точка підінтервалу (Крок 4); b_i – права межа підінтервалу; $y(b_i)$ – значення точного розв’язку в точці b_i ; $\bar{p}_a(s)$, $\underline{p}_a(s)$ – значення парабол (12), (13) у середній точці s (Крок 4); $\bar{p}_s(b_i)$, $\underline{p}_s(b_i)$ – значення парабол (14), (15) у точці b_i (Крок 6); $\omega = \bar{p}_s(b_i) - \underline{p}_s(b_i)$ – ширина

функціонального інтервалу (Крок 7); N – кількість ітерацій до досягнення ширини функціонального інтервалу; n – загальна кількість підінтервалів.

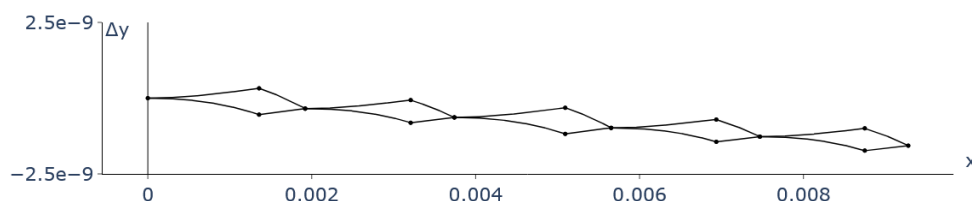


Рис. 3. Графіки відхилень $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$ параболічних обмежників від точного розв'язку для перших 5 підінтервалів рівняння

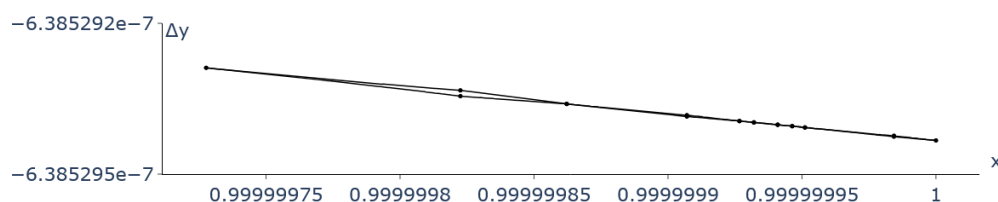


Рис. 4. Графіки відхилень $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$ параболічних обмежників від точного розв'язку для останніх 5 підінтервалів рівняння

На рисунках зображено відхилення $\Delta y(x) = p(x) - y(x)$, де $p(x)$ – відповідна обмежувальна парабола ($\bar{p}_a$ (12), $\underline{p}_a$ (13), $\bar{p}_s$ (14), $\underline{p}_s$ (15)), $y(x)$ – точний розв'язок.

В обох прикладах метод забезпечив гарантоване покриття точного розв'язку двосторонніми параболічними оцінками із заданою точністю. Кількість побудованих підінтервалів залежить від довжини проміжку інтегрування, ступеня нелінійності правої частини та заданої точності.

5. ВИСНОВКИ

Сформульовано і доведено теорему, яка обґрунтовує коректність запропонованого алгоритму розв'язування інтегрального рівняння зазначеного вигляду. Зазначена можлива максимальна ширина побудованого на кожному кроці відповідного функціонального інтервалу, який гарантовано містить шуканий розв'язок, а у вершинах кожного такого інтервалу маємо точне значення цього розв'язку. Результати числових експериментів підтверджують отримані теоретичні висновки та коректність запропонованого алгоритму розв'язування інтегральних рівнянь зазначеного вигляду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сеньо П.С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів // П.С. Сеньо // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 21. – С 38–57.

2. Сеньо П.С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П.С.Сеньо // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. 11. – С. 209–222.
3. Сеньо П.С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П.С.Сеньо // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – Вип. 13. – С. 182–193.
4. Сеньо П.С. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів / П.С.Сеньо // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2017. – Вип. 25. – С. 18–37.
5. Сеньо П.С. Методи локалізації функціональних невизначеностей для аналізу систем / П.С.Сеньо // автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.04. – Системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київ: Київ. нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2019. – 36 с.
6. Lin Y. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs / Y. Lin, M. A. Stadtherr // Applied Numerical Mathematics. – 2007. – Vol. 57, № 10. – P. 1145–1162. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2006.10.006>.
7. Duracz J. Function Interval Arithmetic / J. Duracz, A. Farjudian, M. Konečný, W. Taha // Mathematical Software. – ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, Korea. – Cham: Springer, 2014. – P. 677–684. – (Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 8592). – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-44199-2_101.
8. Gu D.-K. Functional interval observer for the linear systems with disturbances / D.-K. Gu, L.-W. Liu, G.-R. Duan // IET Control Theory & Applications. – 2018. – Vol. 12, № 18. – P. 2562–2568. – DOI: <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5113>.
9. Senio P.S. Matrix representation of Taylor's formula for mappings in finite dimensional spaces / P.S. Senio // Математичні Студії. – 2019. – Т. 51, № 1. – С. 92–106. – DOI: <https://doi.org/10.15330/ms.51.1.92-106>.

Стаття: надійшла до редколегії 28.01.2026

доопрацьована 25.02.2026

прийнята до друку 16.03.2026

ITERATIVE TWO-SIDED METHOD FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

P. Senio, A. Zayats

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79007, Lviv, Ukraine,
e-mail: petro.senio@lnu.edu.ua, artur.zaiats@lnu.edu.ua*

The problem of constructing guaranteed two-sided approximations to solutions of some classes of integral equations with a known differentiable function and an integrable kernel in a given domain is considered. The solution is constructed in the form of a functional interval, providing guaranteed two-sided bounds for the sought solution.

Classical methods for constructing two-sided approximations – the Chaplygin method, Moore's interval methods, the Lohner algorithm, and the VNODE-LP software package – have significant limitations: the need for analytical determination of initial approximations, the requirement of convexity of the right-hand side of the equation, the need for high-order automatic differentiation, and catastrophic overestimation on large time intervals. The proposed approach based on the mathematics of functional intervals does not have the above limitations and can be applied to integral equations.

A theorem is formulated and proved that establishes the equivalence of the integral equation and an initial value problem for the derivative on each interval. It is shown that quadratic parabolas form a parabolic parallelogram that bounds the solution from below and above, with the maximum width attained at the midpoint of the interval with quadratic

convergence. At the points where the upper and lower bounding functions coincide, the solution values are obtained with a prescribed accuracy.

On this basis, an algorithm for constructing parabolic functional intervals with adaptive step-size selection is developed, enabling the construction of guaranteed two-sided approximations with a prescribed accuracy. The algorithm includes: construction of the initial linear functional interval, determination of the interval satisfying derivative bounds, construction of parabolic bounds, and iterative narrowing of the interval.

The performance of the method is confirmed by two numerical experiments with integral equations whose analytical solutions are known. All computations are performed in arbitrary-precision arithmetic (16 significant digits). The results confirmed guaranteed coverage of the exact solution by two-sided parabolic bounds with a prescribed accuracy.

Key words: functional intervals, integral equations, two-sided methods, parabolic parallelogram, adaptive step size.