

ПРО ЛІЧИЛЬНІ ФУНКЦІЇ a -ТОЧОК
МЕРОМОРФНИХ В КРУЗІ ФУНКЦІЙМ. Заболоцький¹, Т. Заболоцький¹, М. Мостова²¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79007, Україна,
e-mail: mykola.zabolotskyi@lnu.edu.ua,
taras.zabolotskyi@lnu.edu.ua,²Львівський державний університет
фізичної культури імені Івана Боберського,
вул. Костюшка, 11, Львів, 79007, Україна,
e-mail: mariana.mostova@gmail.com

Нехай f – мероморфна в $K_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, функція, $n(r, c, f)$ та $N(r, c, f)$, відповідно, лічильна й усереднено лічильна функція c -точок в замкненому крузі K_r , де $0 < r < R$. Добре відомо, що $N(r, a, f) \sim N(r, b, f)$, при r прямуючому до $+\infty$, для всіх a та b з розширеної комплексної площини, за винятком щонайбільше множини нульової щільності. Якщо $N(r, a, f)$, $N(r, b, f)$ замінити “непроінтегрованими” функціями $n(r, a, f)$, $n(r, b, f)$, то жодного аналогу наведеного вище твердження в загальному випадку зазначити не можна.

Основним результатом дослідження є побудова прикладу мероморфної в K_r функції, яка б дала відповідь на питання П.Ердеша, сформульоване в В.Хеймана “Нові проблеми. Матеріали симпозіуму з комплексного аналізу, Кентербері, 1973” (задача 1.25).

У 1976 році С.Топпіла побудував приклад мероморфної в комплексній площині функції f ($R = +\infty$) такої, що для довільних a та b з розширеної комплексної площини існує послідовність додатних зростаючих до $+\infty$ чисел (r_k) і $n(r_k, a, f)/n(r_k, b, f)$ прямує до $+\infty$ при k прямуючому до $+\infty$.

Побудовано у вигляді нескінченного добутку приклад мероморфної функції f , для якої виконується аналогічне наведеному вище співвідношення для лічильних функцій a -точок та b -точок на послідовності додатних чисел (r_k) , r_k прямує до $1 - 0$ при k прямуючому до $+\infty$, причому неванліннова характеристика f є обмеженою.

Ключові слова: мероморфна функція, лічильна функція, a -точки, неванліннова лічильна функція.

1. ВСТУП

Нехай f – трансцендентна мероморфна (надалі мероморфна) в $\mathbb{C}$ функція, зокрема ціла. Позначимо через $n(r, a, f)$ кількість a -точок f , враховуючи їхню кратність, в замкненому крузі $\bar{K}(0, r) = \{z : |z| \leq r\}$, $a \in \mathbb{C}$. Величину

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r$$

називають усередненою або неванліннвою лічильною функцією a -точок f . Добре відомо (див., наприклад, [1, с. 196]), що для всіх $a, b \in \mathbb{C}$, за винятком щонайбільше множини нульової щільності,

$$N(r, a, f) \sim N(r, b, f), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Виявляється, якщо $N(r, a, f)$, $N(r, b, f)$ замінити “непроінтегрованими” лічильними функціями $n(r, a, f)$, $n(r, b, f)$, то жодного аналога наведеного вище твердження в загальному випадку зазначити не можна.

У 1978 році А.А. Гольдберг побудував приклад цілої функції f , зокрема такої, що $(R = +\infty)$

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, a \neq b : \overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{n(r, a, f)}{n(r, b, f)} = +\infty. \quad (\text{A})$$

О.Е. Єременко цей результат посилив і переніс на випадок $R < \infty$. Метод, використаний в цих працях, дає підстави будувати мероморфні функції з властивістю (A).

Незалежно від А.А. Гольдберга і майже одночасно з ним С. Топшіла в [2] побудував приклад мероморфної в $\mathbb{C}$ функції з властивістю (A'), яка відрізняється від (A) тим, що $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$. В 1983 році А.А. Гольдберг та М.В. Заболоцький з допомогою теорії ріманових поверхонь довели існування мероморфних в крузі $K(0, R)$ функцій, які володіють, зокрема, властивістю (A') і дають повну відповідь на питання П. Ердеша [3, задача 1.25].

У цій праці, використовуючи деякі ідеї С. Топшіли [2], ми будемо у вигляді нескінченного добутку мероморфну в одиничному крузі функцію з властивістю (A'), причому з обмеженою неванлінновою характеристикою.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай (q_n) – послідовність всіх раціональних чисел з відрізка $[0, 2\pi]$, послідовності (t_n) і (r_n) , $t_n \in \mathbb{N}$, $r_n > 1$, зростаючі і такі, що $(n \rightarrow +\infty) t_n/t_{n-1} \rightarrow \infty$, $t_n^2 n^2 = o(r_n)$, $r_n = o(r_{n+1})$. Позначимо через $\varepsilon_n(z)$ довільну функцію, рівномірно прямує до 0 для $z \in \overline{K}(0, 1)$ при $n \rightarrow +\infty$, різну в різних місцях. Нехай $\tau_n = 1 - 1/r_n$, $\alpha_{n,k} = k/(n^2 t_n r_n)$, $k = 1, 2, \dots, t_n$. Прийемо

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = \prod_{k=1}^{t_n} \frac{(1 - r_n^{-1}) e^{i\alpha_{n,k}} - z}{(1 - (r_n + \delta_n)^{-1}) e^{i\alpha_{n,k}} - z}, \quad (1)$$

$$\text{де } |\delta_n| = 1, \arg \delta_n = \arg A_n - q_n, A_n = \prod_{\nu=1}^{n-1} f_{\nu}(1).$$

Введемо позначення $L_{n,k}(z) = \tau_n \exp(i\alpha_{n,k}) - z$, $l_{n,k} = \delta_n r_n^{-1} (r_n + \delta_n)^{-1} \exp(i\alpha_{n,k})$, $C_{n,k} = \{z : |z - \tau_n \exp(i\alpha_{n,k})| \leq 1/r_n^{5/2}\}$, $k = 1, 2, \dots, t_n$. Враховуючи, що в крузі $\{z : |z| \leq R\}$, $R < 1$, для $n \geq n_0(R)$

$$\left| \frac{L_{n,k}(z)}{L_{n,k}(z) + l_{n,k}} - 1 \right| \leq \frac{|l_{n,k}|}{\tau_n - |z| - |l_{n,k}|} \leq \frac{2r_n^{-1}}{1 - R - 2r_n^{-1}},$$

отримуємо, що добутки в (1) збігаються абсолютно і рівномірно на компактах в крузі $\{z : |z| \leq R < 1\}$. Отже, f – мероморфна в $\mathbb{C}$ функція.

Нехай $|1 - z| > \delta$, $\delta > 0$. Тоді $(n \geq n_0(\delta))$

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_{n,k}(z)}{L_{n,k}(z) + l_{n,k}} - 1 \right| &\leq \frac{2r_n^{-1}}{|1 - z| - \left| \left(1 - \frac{1}{r_n + \delta_n}\right) e^{i\alpha_{n,k}} - 1 \right|} \leq \\ &\leq \frac{2r_n^{-2}}{\delta - ((r_n - 1)^{-1} + (n^2 r_n)^{-1})}, \end{aligned}$$

так, що функція f аналітична на околі $\{z : |z| = 1\}$ за винятком точки $z = 1$.

Теорема 1. Для мероморфної в крузі $K(0, 1)$ функції f заданої (1) виконується

$$\forall a, b \in \overline{\mathbb{C}}, a \neq b : \lim_{r \rightarrow 1} \frac{n(r, a, f)}{n(r, b, f)} = +\infty, \quad (2)$$

$$T(r, f) = O(1), \quad r \rightarrow 1. \quad (3)$$

Для доведення теореми ми будемо використовувати такі дві властивості функції f , які сформулюємо у вигляді лем.

3. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Лема 2. Якщо $z \in C_{n,k}$, $n \geq 2$, $k = 1, 2, \dots, t_n$, то

$$f(z) = L_{n,k}(z) A_n \frac{r_n^3}{\delta_n} (1 + \varepsilon_n(z)), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Доведення. Нехай $z \in C_{n,k}$. Тоді

$$\frac{L_{n,k}(z)}{L_{n,k}(z) + l_{n,k}} = \frac{L_{n,k}(z)}{\delta_n r_n^{-2} (1 + O(r_n^{-1/2}))}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Для $j \neq k$, враховуючи, що

$$\begin{aligned} |L_{n,j}(z)| &\geq |\tau_n e^{i\alpha_{n,j}} - \tau_n e^{i\alpha_{n,k}}| - |z - \tau_n e^{i\alpha_{n,k}}| \geq \frac{\tau_n}{n^2 t_n r_n} (1 + o(1)) - \frac{1}{r_n^{5/2}} = \\ &= \frac{1}{n^2 t_n r_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{r_n}\right)\right), \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

отримуємо $|l_{n,j}/L_{n,j}(z)| = (1 + O(1/r_n)) n^2 t_n r_n^{-1} \rightarrow 0$,

$$\frac{L_{n,j}(z)}{L_{n,j}(z) + l_{n,j}} = \left(1 + \frac{l_{n,j}}{L_{n,j}(z)}\right)^{-1} = 1 + \varepsilon_n(z), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Звідси, враховуючи, що $1 - z = r_n^{-1} (1 + o(1))$, $n \rightarrow +\infty$, отримуємо

$$\frac{f_n(z)}{1 - z} = L_{n,k}(z) \frac{r_n^3}{\delta_n} (1 + \varepsilon_n(z)), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Для $\nu > n$ маємо $|L_{\nu,k}(z)| \geq \tau_\nu - |z| = r_n^{-1} (1 + O(r_n/r_\nu))$, $\nu \rightarrow \infty$, звідки

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \prod_{k=1}^{t_\nu} \left\{1 + \frac{l_{\nu,k}}{L_{\nu,k}(z)}\right\}^{-1} = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \{1 + \varphi_\nu(z)\} = 1 + \varepsilon_n(z), \quad (6)$$

де $\varphi_\nu(z) = O(t_\nu/r_\nu)$, $\nu \rightarrow \infty$.

Розглянемо ($\nu < n$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + l_{\nu,k}/L_{\nu,k}(1)}{1 + l_{\nu,k}/L_{\nu,k}(z)} - 1 \right| &= \frac{|l_{\nu,k}| |z - 1|}{|L_{\nu,k}(1)| |L_{\nu,k}(z) + l_{\nu,k}|} \leq \\ &\leq \frac{2r_\nu^{-2} r_n^{-1}}{r_\nu^{-1} \{|z| - (1 - (r_\nu + 1)^{-1})\}} = O\left(\frac{1}{r_n}\right), \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тоді

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} f_{\nu}(z) = A_n \prod_{\nu=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{t_{\nu}} \left\{ \frac{1 + l_{\nu,k}/L_{\nu,k}(1)}{1 + l_{\nu,k}/L_{\nu,k}(z)} \right\} = A_n (1 + \varepsilon_n(z)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

З (5)–(7) випливає (4). Лему 2 доведено. $\square$

Зауваження 1. Існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \neq 0. \quad (8)$$

Справді, враховуючи, що $|L_{\nu,k}(1)| \geq r_{\nu}^{-1}$, матимемо

$$A_n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{t_{\nu}} \left(1 + \frac{l_{\nu,k}}{L_{\nu,k}(1)} \right)^{-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 + \eta_{\nu}),$$

де $\eta_{\nu} = O(t_{\nu}/r_{\nu})$, $\nu \rightarrow \infty$. Звідси випливає (8).

Лема 3. Якщо $z \notin \bigcup_{n,k} C_{n,k}$, то

$$f(z) \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow 1. \quad (9)$$

Доведення. Нехай

$$G_{n+1} = \left\{ z : (2r_{n+1})^{-1} \leq |1 - z| \leq (2r_n)^{-1}, z \notin \bigcup_k C_{n+1,k} \right\}.$$

Враховуючи, що $|L_{\nu,k}(z)| \geq |z| - \tau_{\nu} = r_{\nu}^{-1} (1 + o(1))$, $\nu < n$, $\nu \rightarrow \infty$, отримуємо

$$\left| \prod_{\nu=1}^{n-1} f_{\nu}(z) \right| \geq \prod_{\nu=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{t_{\nu}} \left\{ 1 + \left| \frac{l_{\nu,k}}{L_{\nu,k}(z)} \right| \right\}^{-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 + \varphi_{\nu}(z)) \geq C_1 > 0,$$

де $C_1 = \text{const}$, $\varphi_{\nu}(z) = O(t_{\nu}r_{\nu}^{-1})$, $\nu \rightarrow \infty$. Оскільки для $\nu > n + 1$ маємо

$$|L_{\nu,k}(z)| \geq |1 - z| - |\tau_{\nu}e^{i\alpha_{n,k}} - 1| \geq \frac{1}{2r_{n+1}} - \left(\frac{1}{r_{\nu}} + \frac{1}{\nu^2 r_{\nu}} \right) = \frac{1}{2r_{n+1}} \left(1 + O\left(\frac{r_{n+1}}{r_{\nu}} \right) \right),$$

$\nu \rightarrow \infty$, то

$$\left| \prod_{\nu=n+2}^{\infty} f_{\nu}(z) \right| \geq \prod_{\nu=n+2}^{\infty} \prod_{k=1}^{t_{\nu}} \left\{ 1 + \left| \frac{l_{\nu,k}}{L_{\nu,k}(z)} \right| \right\}^{-1} = \prod_{\nu=n+2}^{\infty} (1 + \varphi_{\nu}(z)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

де $\varphi_{\nu}(z) = O(t_{\nu}/r_{\nu})$, $\nu \rightarrow \infty$. Враховуючи, що $|L_{n,k}(z)| \geq |z| - \tau_n \geq 1 - (2r_n)^{-1} - (1 - r_n^{-1}) = (2r_n)^{-1}$, отримуємо ($n \rightarrow \infty$)

$$|f_n(z)| \geq \prod_{k=1}^{t_n} \left\{ 1 + \left| \frac{l_{n,k}}{L_{n,k}(z)} \right| \right\}^{-1} = 1 + \varepsilon_n(z), \quad \varepsilon_n(z) = O\left(\frac{t_n}{r_n} \right).$$

Нехай

$$G'_{n+1} = \left\{ z : (2r_{n+1})^{-1} \leq |1 - z| \leq 2r_{n+1}^{-1}, z \notin \bigcup_k C_{n+1,k} \right\}.$$

Припустимо, що $z \in G'_{n+1}$ і що існує k , $1 \leq k \leq t_n$, $k \in \mathbb{N}$, таке, що

$$\frac{k-0,5}{(n+1)^2 t_{n+1} r_{n+1}} \leq \arg z \leq \frac{k+0,5}{(n+1)^2 t_{n+1} r_{n+1}}.$$

Тоді, враховуючи, що $|L_{n+1,j}(z)| \geq C_2 (t_{n+1}^{-1} (n+1)^{-2} r_{n+1}^{-1})$, $n \rightarrow \infty$, $j \neq k$, $C_2 = \text{const} > 0$, отримуємо

$$|f_{n+1}(z)| \geq \left\{ 1 + \left| \frac{l_{n+1,k}}{L_{n+1,k}(z)} \right| \right\}^{-1} \prod_{j \neq k} \left\{ 1 + \left| \frac{l_{n+1,j}}{L_{n+1,j}(z)} \right| \right\}^{-1} \geq \frac{C_3}{\sqrt{r_{n+1}}} (1 + \varepsilon_{n+1}(z)),$$

$n \rightarrow \infty$, де $C_3 = \text{const} > 0$, $\varepsilon_{n+1}(z) = O((n+1)^2 t_{n+1}^2 r_{n+1}^{-1})$. Таким чином, при $z \in G'_{n+1}$ маємо ($C_4 = \text{const} > 0$)

$$|f(z)| \geq \frac{C_4}{|1-z|\sqrt{r_{n+1}}} \geq \frac{C_4}{2} \sqrt{r_{n+1}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

При $z \in (G_{n+1} \setminus G'_{n+1})$, враховуючи, що

$$|L_{n+1,k}(z)| \geq |1-z| - |\tau_{n+1} e^{i\alpha_{n+1,k}} - 1| \geq \frac{2}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_{n+1}} (1 + o(1)) = \frac{1}{r_{n+1}} (1 + o(1)),$$

$n \rightarrow \infty$, отримуємо

$$|f_{n+1}(z)| \geq \prod_{k=1}^{t_{n+1}} \left\{ 1 + \frac{l_{n+1,k}}{L_{n+1,k}(z)} \right\}^{-1} = 1 + \varepsilon_{n+1}(z).$$

Отже, при $z \in (G_{n+1} \setminus G'_{n+1})$, маємо ($C_5 = \text{const} > 0$)

$$|f(z)| \geq \frac{C_5}{|1-z|} \geq 2C_5 r_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

і (9) доведено. □

4. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ

Доведення. Прдемонструємо, що функція $f(z)$ задовольняє умову (2). Нехай $w \neq \infty$. Застосувавши теорему Руше, з (4) маємо, що за достатньо великих n функція f набуває значення w лише один раз в кожному $C_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, t_n$.

Розглянемо підпоследовність n_s таку, що $\arg \delta_{n_s} \rightarrow \pi$, $s \rightarrow \infty$. Для $s \geq s_0$ матимемо

$$n \left(1 - (r_{n_s} - 0,5)^{-1}, w, f \right) = O(1) + \sum_{k=1}^{n_s-1} t_k < 2t_{n_s-1},$$

$$n \left(1 - (r_{n_s} - 0,5)^{-1}, \infty, f \right) = \sum_{k=1}^{n_s} t_k > t_{n_s},$$

звідки $\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} n(r, \infty, f) / n(r, w, f) = +\infty$.

Якщо вибрати підпоследовність n_s так, щоб $\arg \delta_{n_s} \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, то для $s \geq s_0$ отримуємо

$$n \left(1 - (r_{n_s} + 0, 5)^{-1}, w, f \right) > t_{n_s}, \quad n \left(1 - (r_{n_s} + 0, 5)^{-1}, \infty, f \right) < 2t_{n_s-1}.$$

Звідси

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} n(r, w, f) / n(r, \infty, f) = +\infty.$$

Нехай a і b скінченні, $a \neq b$. Для достатньо великих n виберемо $a_{n,k} \in C_{n,k}$, $b_{n,k} \in C_{n,k}$ так, що $f(a_{n,k}) = a$, $f(b_{n,k}) = b$. З рівності (4) отримуємо

$$\tau_n e^{i\alpha_{n,k}} - z_{n,k} = \delta_n f(z_{n,k}) A^{-1} r_n^{-3} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty,$$

для $z_{n,k} = a_{n,k}, b_{n,k}$. Звідси

$$b_{n,k} - a_{n,k} = \delta_n (a - b) A^{-1} r_n^{-3} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Виберемо підпоследовність n_s так, щоб $q_{n_s} \rightarrow \arg(a - b)$, $s \rightarrow +\infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} \arg(b_{n_s,k} - a_{n_s,k}) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} (\arg \delta_{n_s} + \arg(a - b) - \arg A) = \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} (\arg A_{n_s} - \arg A) = 0. \end{aligned}$$

З (10) отримуємо

$$b_{n_s,k} = a_{n_s,k} + |a - b| |A|^{-1} r_{n_s}^{-3} (1 + o(1)), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Прийmemo $\rho_{n_s} = 0, 5 (|a_{n_s,1}| + |b_{n_s,1}|)$. Тоді можна переконатися, що ($s \rightarrow +\infty$)

$$n(\rho_{n_s}, a, f) > t_{n_s}, \quad n(\rho_{n_s}, b, f) < 2t_{n_s-1},$$

звідки випливає (2).

Продемонструємо, що функція f задовольняє умову (3). Візьmemo $r'_n = 1 - 2/r_n$. Маємо $t(r'_n, f^{-1}) = O(1)$, $r'_n \rightarrow 1$. Нехай $\{a_n\}$ – нулі f . Тоді

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |a_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r_n^{t_n}} < \infty,$$

а отже, $N(r, f^{-1}) = O(1)$, $r \rightarrow 1$. Отже $T(r'_n, f) = O(1)$ при $r'_n \rightarrow 1$, тобто виконується (3). Теорема доведена. $\square$

5. ВИСНОВКИ

Побудовано у вигляді нескінченного добутку приклад мероморфної в одиничному крузі функції такої, що для довільних $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$ існує послідовність додатних чисел (r_k) , $r_k \rightarrow 1 - 0$ і $n(r_k, a, f) / n(r_k, b, f) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Цей приклад дає відповідь на питання П. Ердеша, сформульоване в праці В. Хеймана “Нові проблеми. Матеріали симпозіуму з комплексного аналізу, Кентербері, 1973” (задача 1.25).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Landkof N.S. Foundations of modern potential theory / N.S. Landkof. – Berlin: Springer-Verlag, 1972.
2. Toppila S. On the counting function for the a -values of a meromorphic function / S. Toppila // Annales Fennici Mathematici. – 1976. – Vol. 2, № 1. – P. 565–572. – DOI: <https://doi.org/10.5186/aasfm.1976.0235>.
3. Hayman W.K. New problems / W.K. Hayman / Proc. Symposium on Complex Analysis. – Canterbury, 1973. – London, Cambridge, New-York: Cambridge University Press, 1974.

Стаття: надійшла до редколегії 18.02.2026

доопрацьована 04.03.2026

прийнята до друку 11.03.2026

ON THE COUNTING FUNCTIONS OF a -POINTS
OF MEROMORPHIC FUNCTIONS IN THE DISK

M. Zabolotsky¹, T. Zabolotsky¹, M. Mostova²

¹Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79007, Lviv, Ukraine,
e-mail: mykola.zabolotsky@lnu.edu.ua,
taras.zabolotsky@lnu.edu.ua,

²Ivan Boberskyi Lviv State University of Physical Culture,
11, Kostiushka str., 79007, Lviv, Ukraine,
e-mail: mariana.mostova@gmail.com

Let f be a meromorphic in $K_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, function, $n(r, c, f)$ and $N(r, c, f)$ the counting function and averaged counting function of c -points in a closed circle K_r , where $0 < r < R$ respectively. It is a well known fact that $N(r, a, f) \sim N(r, b, f)$ as r tends to $+\infty$, for all a, b from the extended complex plane, except at most a set of zero density. If $N(r, a, f)$, $N(r, b, f)$ are replaced by “non-integrated” functions $n(r, a, f)$, $n(r, b, f)$, then no analogue of the above statement can be given in the general case.

The main result of the research is the construction of an example of a meromorphic in K_r function that would answer the question of P. Erdős formulated in the work of W.K. Hayman “New problems. Proc. Symposium on Complex Analysis, Canterbury, 1973” (Problem 1.25).

In 1976, Toppila built an example of meromorphic function in complex plane f ($R = +\infty$) such that for all a, b from the extended complex plane there exists a sequence increasing to $+\infty$ of positive numbers (r_k) and $n(r_k, a, f)/n(r_k, b, f)$ tends to $+\infty$ as k tends to $+\infty$.

In the paper an example of a meromorphic function f is constructed in the form of an infinite product for which an analogue of the above statement for counting functions of a -points and b -points is fulfilled on a sequence of positive numbers (r_k) , r_k tends to $1 - 0$ as k tends to $+\infty$, moreover the Nevanlinna characteristic of f is bounded.

Key words: meromorphic function, counting function, a -points, nevanlinna counting function.