УДК 519.6 http://dx.doi.org/10.30970/vam.2026.36.00000

АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДРОБОВОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИСПЕРСІЇ

В. Вербіцький, І. Шпінарева

*Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
вул. Змієнка Всеволода, 2, Одеса, 65082, Україна,
e-mail: v.verbitskyi@onu.edu.ua, iryna.shpinareva@onu.edu.ua*

Стаціонарне дробове рівняння адвекції-дисперсії містить похідні Рімана-Ліувілля дробового порядку. Таке рівняння виникає при моделюванні фізичних явищ з аномальною дифузією, яка погано моделюється класичним рівнянням адвекції-дисперсії з похідними цілого порядку. Метод скінченних елементів, який є універсальним інструментом розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь, для рівнянь з похідними дробового порядку використовується порівняно недавно. Тому різні аспекти застосування методу для дробових рівнянь вимагають подальшого вивчення.

У роботі запропоновано надійний та ефективний апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі для одновимірного дробового стаціонарного рівняння адвекції-дисперсії. Апостеріорний оцінювач побудовано з використанням техніки усереднення, яка зводиться до знаходження проекції похідної скінченно-елементного розв'язку на скінченно-елементний простір. Обчислення такої проекції у випадку крайових задач з похідними цілого порядку є настільки ж затратним, як і знаходження скінченно-елементного розв'язку вихідної крайової задачі. Тому, зазвичай, для обчислення скалярного добутку при обчислені проекції використовують різні апроксимації. Однак, у випадку дробових похідних обчислення проекції є набагато менш затратним, порівняно зі знаходженням скінченно-елементного розв'язку, тому є сенс будувати апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку, використовуючи проекцію похідної скінченно-елементного розв'язку. Аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту дає змогу зробити висновок, що зі зменшенням кроку скінченно-елементної сітки ефективність та надійність запропонованого апостеріорного оцінювача суттєво зростають.

Ключові слова: дробове стаціонарне рівняння адвекції-дисперсії, варіаційне формулювання дробової крайової задачі, ефективний та надійний апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'зку, техніка усереднення побудови апостеріорного оцінювача.

1. Вступ

Стаціонарне дробове рівняння адвекції-дисперсії має вигляд [3]:

$$-Da\left(pD_{0,x}^{-\beta}+qD_{x,1}^{-\beta}\right)Du+b(x)Du+c(x)u=f, \tag{1}$$

де D – похідна першого порядку, $D_{0,x}^{-\beta}$, $D_{x,1}^{-\beta}$ – лівий та правий дробові інтегральні оператори [4, 5] порядка β, $0\le\beta\le 1$, $0\le p,q\le 1$ та $p+q=1$.

Рівняння (1) виникає при моделюванні фізичних явищ, що демонструють аномальну дифузію, тобто дифузію, яка не точно моделюється звичайним рівнянням адвекції.

Метод скінченних елементів(МСЕ) є універсальним інструментом для розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 6].

Протягом останніх років велика увага приділяється адаптивним алгоритмам МСЕ. Такі алгоритми реалізуються з використанням локальних апостеріорних оцінок похибок скінченно-елементного розв'язку [7].

Аналіз збіжності МСЕ для дробового рівняння (1) виконано в роботі [3].

Нами побудонано апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі для дробового рівняння (1) з використанням техніки усереднення [2].

2. Варіаційне формулювання крайової задачі

Лівий дробовий інтеграл (або лівий інтеграл Рімана-Ліувілля) та правий дробовий інтеграл (або правий інтеграл Рімана-Ліувілля) порядка $\alpha > 0$ від функції $f(t)$, $t \in (a, b)$ визначаються так [5]

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

та

$$D_{t,b}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

відповідно, де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Ліві та праві похідні Рімана-Ліувілля порядка $\alpha > 0$ від функції $f(t)$, $t \in (a, b)$ визначаються так [5]

$$D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{a,t}^{-(m-\alpha)} f(t) \right],$$

та

$$D_{t,b}^{\alpha} f(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{t,b}^{-(m-\alpha)} f(t) \right],$$

відповідно, де m – додатне ціле число, що задовольняє умові $m - 1 \leq \alpha < m$.

Означення 1. *Нехай $\mu > 0$ і $\Omega = (a, b)$. Визначимо напівнорму*

$$|u|_{J_L^\mu(\Omega)} = ||D_{a,x}^\mu u(x)||_{L^2(\Omega)}$$

і норму

$$||u||_{J_L^\mu(\Omega)} = \left(||u(x)||^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{J_L^\mu(\Omega)} \right)^{1/2}$$

і позначимо через $J_L^\mu(\Omega)$ ($J_{L,0}^\mu(\Omega)$) замикання $C^\infty(\Omega)$ ($C_0^\infty(\Omega)$)) за нормою $||\cdot||_{J_L^\mu(\Omega)}$, де $C_0^\infty(\Omega)$ – простір гладких функцій з компактним носієм у Ω.

Означення 2. *Нехай $\mu > 0$ і $\Omega = (a, b)$. Визначимо напівнорму*

$$|u|_{J_R^\mu(\Omega)} = ||D_{x,b}^\mu u(x)||_{L^2(\Omega)}$$

і норму

$$||u||_{J_R^\mu(\Omega)} = \left(||u(x)||^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{J_R^\mu(\Omega)} \right)^{1/2}$$

і позначимо через $J_R^\mu(\Omega)$ ($J_{R,0}^\mu(\Omega)$) замикання $C^\infty(\Omega)$ ($C_0^\infty(\Omega)$)) за нормою $||\cdot||_{J_R^\mu(\Omega)}$, де $C_0^\infty(\Omega)$ – простір гладких функцій з компактним носієм у Ω.

Означення 3. *Нехай $\mu > 0$, $\mu \neq n - 1/2$, $n \in N$ і $\Omega = (a, b)$. Визначимо напівнорму*

$$|u|_{J^\mu_S(\Omega)} = |(D^\mu_{a,x}u(x), D^\mu_{x,b}u(x))|^{\frac{1}{2}}$$

і норму

$$||u||_{J^\mu_S(\Omega)} = \left(||u(x)||^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{J^\mu_S(\Omega)}\right)^{1/2}$$

і позначимо через $J^\mu_S(\Omega)$ ($J^\mu_{S,0}(\Omega)$) замикання $C^\infty(\Omega)$ ($C^\infty_0(\Omega)$)) за нормою $||\cdot||_{J^\mu_S(\Omega)}$, де $C^\infty_0(\Omega)$ – простір гладких функцій з компактним носієм у Ω.

Лема 1 (*[3]*)**.** *Нехай $\mu > 0$. Тоді простори $J^\mu_{L,0}(\Omega)$, $J^\mu_{R,0}(\Omega)$ і $H^\mu_0(\Omega)$ співпадають. Також, якщо $\mu \neq n-1/2$, $n \in N$, то простори $J^\mu_{L,0}(\Omega)$, $J^\mu_{R,0}(\Omega)$, $J^\mu_{S,0}(\Omega)$ і $H^\mu_0(\Omega)$ мають еквівалентні напівнорми та норми.*

Розглянемо крайову для дробового рівняння (1). Нехай $\Omega = (0, 1)$. Для заданої функції $f : \overline{\Omega} \to R$ треба знайти таку функцію $u : \overline{\Omega} \to R$, що

$$-Da(pD^{-\beta}_{0,x} + qD^{-\beta}_{x,1})Du + b(x)Du + c(x)u = f, \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{3}$$

де $0 \leq \beta < 1$, $a > 0$, $b(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $c(x) \in C(\overline{\Omega})$ та $c - \frac{1}{2}Db \geq 0$, $p + q = 1$, $0 \leq p, q \leq 1$.

Щоб сформулювати крайову задачу (2)-(3) у варіаційній формі припустимо, що u – достатньо гладкий розв'язок задачі (2)-(3). Помноживши рівняння (2) на довільну функцію $v \in C^\infty_0(\Omega)$ та проінтегрувавши, маємо

$$\int_\Omega \left(-Da(pD^{-\beta}_{0,x} + qD^{-\beta}_{x,1})Du + b(x)Du + c(x)u\right) vdx = \int_\Omega fvdx.$$

Інтегруючи частинами і враховуючи, що $v = 0$ на $\partial\Omega$, отримуємо

$$\int_\Omega \left[a(pD^{-\beta}_{0,x} + qD^{-\beta}_{x,1})DuDv + b(x)Duv + c(x)uv\right] dx = \int_\Omega fvdx.$$

Для зручності, будемо використовувати позначення: $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$, $||\cdot|| = ||\cdot||_{L^2(\Omega)}$, $|\cdot|_r = |\cdot|_{H^r(\Omega)}$ і $||\cdot||_r = ||\cdot||_{H^r(\Omega)}$.

Для $0 \leq \beta < 1$ і $u = 0$ на $\partial\Omega$, маємо,

$$D^{-\beta}_{0,x}Du = D^{1-\beta}_{0,x}u, \quad DD^{-\beta}_{0,x}Du = D^{2-\beta}_{0,x}u,$$

$$D^{-\beta}_{x,1}Du = D^{1-\beta}_{x,1}u, \quad DD^{-\beta}_{x,1}Du = D^{2-\beta}_{x,1}u.$$

Нехай, $\alpha = 1 - \beta/2$. Тоді, $1/2 < \alpha \leq 1$. Враховуючи, що $u = 0$ на $\partial\Omega$, можна показати [3], що

$$(D^{-\beta}_{0,x}Du, Du) = (D^{-\beta/2}_{0,x}D^\alpha_{0,x}u, Du) = -(D^\alpha_{0,x}u, D^\alpha_{x,1}u),$$
$$(D^{-\beta}_{x,1}Du, Du) = -(D^\alpha_{x,1}u, D^\alpha_{0,x}u).$$

Визначимо білінійну форму $A : H^\alpha_0(\Omega) \times H^\alpha_0(\Omega) \to R$ наступним чином,

$$A(u, v) = ap(D^{-\beta}_{0,x}Du, Dv) + aq(D^{-\beta}_{x,1}Du, Dv) + (bDu, v) + (cu, v). \tag{4}$$

Для заданої функції $f \in H^{-\alpha}(\Omega)$ визначимо асоційований лінійний функціонал $F : H^\alpha_0(\Omega) \to R$ наступним чином,

$$F(v) = (f, v). \tag{5}$$

Очевидно, що відношення двоїстості в (5) коректно визначено для $u, v \in H_0^\alpha(\Omega)$. Таким чином, приходимо до варіаційної задачі. Знайти таке $u \in H_0^\alpha(\Omega)$, що

$$A(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^\alpha(\Omega). \tag{6}$$

Використовуючи теорему Лакса-Мільграма, можна показати [3], що варіаційна задача (6) має єдиний розв'язок $u \in H_0^\alpha(\Omega)$, для якого виконується оцінка

$$||u||_{H^\alpha(\Omega)} \leq C||f||_{H^{-\alpha}(\Omega)}.$$

3. Скінченно-елементний розв'язок крайової задачі

Позначимо через $P_r(\Omega)$ простір багаточленів, визначених на Ω, ступені яких не вище r, $r \in Z^+$. Нехай S_h – деяке розбиття області Ω,

$$x_L = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = x_R, \quad N \in Z^+.$$

Позначимо $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$ для $i = 1, 2, \cdots, N$. На сітці S_h визначимо простір скінченних елементів X_h^r як множину кусково-поліноміальних функцій, ступені поліномів яких не перевищують r $(r \geq 1)$,

$$X_h^r = \{v \ : \ v|_{\Omega_i} \in P_r(\Omega_i), \ v \in C(\Omega)\}.$$

Введемо оператор кускової інтерполяції,

$$I_h : C(\bar{\Omega}) \to X_h^r,$$

у вигляді

$$I_h u|_{\Omega_i} = \sum_{k=0}^{r} u(x_k^i) F_k^i(x), \quad u \in C(\bar{\Omega}),$$

де $F_k^i(x)$ – лагранжеві базисні функції, що визначаються формулою

$$F_k^i(x) = \prod_{l=0, l\neq k}^{r} \frac{x - x_l^i}{x_k^i - x_l^i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

де $\{x_k^i, \ k = 0, 1, \cdots, r\}$ – вузли інтерполяції на інтервалі Ω_i и $x_0^i = x_{i-1}$ и $x_r^i = x_i$.

Визначимо φ^i $(i = 0, 1, \cdots, N)$ и φ_k^i $(k = 1, 2, \cdots, r-1; \ i = 1, 2, \cdots, N)$ таким чином,

$$\varphi_k^i(x) = \begin{cases} F_k^i(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad k = 1, 2, \cdots, r-1, \ i = 1, \cdots, N, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$\varphi^i(x) = \begin{cases} F_r^i(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \cdots, N-1, \\ F_r^{i+1}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \cdots, N-1, \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} F_0^1(x), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{інакше}, \end{cases}$$

$$\varphi^N(x) = \begin{cases} F_r^N(x), & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Нехай $X_{h0}^r = X_h^r \cap H_0^1(\Omega)$. Простори X_{h0}^r і X_h^r визначаються так,

$$X_{h0}^r = \text{span}\left\{\varphi_k^i,\ k=1,2,\cdots,r-1,\ i=1,2,\cdots,N\right\} \cup \left\{\varphi^i,\ i=1,2,\cdots,N-1\right\},$$

$$X_h^r = \text{span}\left\{\varphi_k^i,\ k=1,2,\cdots,r-1,\ i=1,2,\cdots,N\right\} \cup \left\{\varphi^i,\ i=0,2,\cdots,N\right\}.$$

Позначимо

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \varphi_k^i(x), & j=(i-1)r+k,\ k=1,2,\cdots,r-1,\ i=1,2,\cdots,N, \\ \varphi^i(x), & j=ir,\ i=0,1,\cdots,N. \end{cases} \tag{7}$$

Тоді,

$$X_{h0}^r = \text{span}\left\{\phi_j, j=1,2,\cdots,Nr-1\right\},$$
$$X_h^r = \text{span}\left\{\phi_j, j=0,1,\cdots,Nr\right\}.$$

Скінченно-елементний розв'язок крайової задачі (2)-(3) є розв'язком наступної скінченно-вимірної варіаційної задачі. Знайти $u_h \in X_{h0}^r$ так, що

$$A(u_h, v) = F(v), \quad \forall v \in X_{h0}^r. \tag{8}$$

Має місце наступна теорема щодо збіжності скінченно-елементного розв'язку.

Теорема 2 (*[3]*). *Нехай $u \in H_0^\alpha(\Omega) \cap H^r(\Omega)$, $\alpha \le r$ та u_h – розв'язки варіаційних задач (6) та (8), відповідно. Тоді існує така, незалежна від h, константа $C > 0$, що*

$$||u - u_h||_{H^\alpha(\Omega)} \le Ch^{r-\alpha}||u||_{H^r(\Omega)}. \tag{9}$$

4. Апостеріорний оцінювач похибки

Для побудови апостеріорного оцінювача похибки скінченно-елементного розв'язку використана техніка усереднення, що базується на наступних ідеях [2]. Позначимо через u та u_h точні розв'язки задач (6) та (8), відповідно. Припустимо, що наближення Gu_h до Du_h можна легко обчислити, та при цьому виконується нерівність:

$$||Du - Gu_h|| \le \gamma ||Du - Du_h|| \tag{10}$$

з деякою константою $0 \le \gamma < 1$. Тоді маємо:

$$\frac{1}{1+\gamma}||Gu_h - Du_h|| \le ||Du - Du_h|| \le \frac{1}{1-\gamma}||Gu_h - Du_h|| \tag{11}$$

Отже, $||Gu_h - Du_h||$ є ефективним та надійним оцінювачем похибки.

Оскільки Du_h є кусково-поліноміальною функцією, поліномів ступеня не вище $r-1$, можна сподіватися, що L^2-проекція Du_h на простір X_h^r неперервних кусково-поліноміальних функцій задовольнить нерівність (10). Для знаходження такої L^2-проекції маємо задачу. Знайти таке $Gu_h \in X_h^r$, що

$$(Gu_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = (Du_h, v_h)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in X_h^r. \tag{12}$$

Обчислення такої проєкції у випадку крайових задач для диференціальних рівнянь з цілими похідними є настільки ж затратним, як і розв'язання задачі (8). Тому, зазвичай, для обчислення скалярного добутку $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ у задачі (12) використовують різні апроксимації, що приводить до простішої допоміжної задачі.

Проте, у випадку дробових похідних обчислення розв'язку задачі (12) є набагато менш затритним, ніж знаходження розв'язку задачі (8). Дійсно, завдяки тому, що дробова похідна не є локальною, матриця системи (8) є заповненою (у найкращому випадку верхньою або нижньою Хессенберговою). З іншого боку, матриця задачі (12) симетрична, додатно визначена та має стрічкову структуру.

Виходячи з вищесказаного, для оцінки похибки скінченно-елементного розв'язку u_h має сенс застосовувати локальний апостеріорний оцінювач

$$\eta_i = \|Gu_h - Du_h\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \tag{13}$$

та глобальний апостеріорний оцінювач

$$\eta^2 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \tag{14}$$

5. Обчислювальний експеримент

Розглянемо крайову задачу (2)-(3) де $u = x^5, p = 1, q = 0, \beta = 1/2, \alpha = 3/4, a = 1$ і $b = c = 0$, $\Omega = (0,1)$. Тоді u є точним розв'язком крайової задачі

$$\begin{gathered} -DD_{0,x}^{-1/2}Du = \frac{-\Gamma(6)x^{3.5}}{\Gamma(4.5)}, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Для крайової задачі (15) побудувано скінченно-елементні розв'язки $u_h \in X_h^1$ для рівномірних сіток з різними параметрами h. На рис. 1 для сітки з кроком $h = \frac{1}{8}$ зображені графіки похідної Du, похідної скінченно-елементного розв'язку Du_h та її L^2-проекції Gu_h.

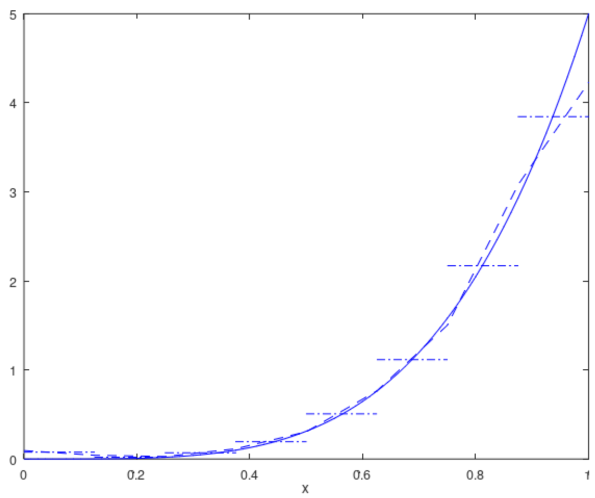

Рис. 1. Похідна Du (суцільна лінія), похідна скінченно-елементного розв'язку Du_h (штрихпунктирна лінія) та її L^2-проекція Gu_h (пунктирна лінія) ($h = \frac{1}{8}$)

У Табл. 1 для різних сіток приведено похибки скінченно-елементних розв'язків $\|Du - Du_h\|$, значення їх апостеріорних оцінювачів $\|Gu_h - Du_h\|$, та $||Du - Gu_h||$.

Таблиця 1

Реальна похибка $\|Du - Du_h\|$, її апостеріорний оцінювач $\|Gu_h - Du_h\|$, та значення $||Du - Gu_h||$

h	$\|\|Du - Gu_h\|\|$	$\|Du - Du_h\|$	$\|Gu_h - Du_h\|$	γ
$\frac{1}{4}$	0.368804	1.427510	0.372985	0.258355
$\frac{1}{8}$	0.136207	0.721200	0.233601	0.188862
$\frac{1}{16}$	0.0487236	0.360926	0.127131	0.134996
$\frac{1}{32}$	0.0172470	0.180448	0.0659549	0.0955787
$\frac{1}{64}$	0.00609026	0.0902163	0.0335471	0.0675073

Результати проведеного експерименту свідчать, що нерівність (10) виконується для всіх сіток. Більш того, якщо константу γ обчислити для кожної сітки, використовуючи нерівність (10), тобто,

$$\gamma = \frac{||Du - Gu_h||}{||Du - Du_h||},$$

то помітимо, що контанта γ зменшується зі зменшенням кроку сітки (див. останній стовпчик Табл. 1). Значить, згідно оцінкам (11) надійність та ефективність запропонованого апостеріорного оцінювача збільшуються.

6. Висновки

Нами запропоновано апостеріорний оцінювач похибки розв'язку скінченно-елементної апроксимації крайової задачі стаціонарного дробового рівняння адвекції-дисперсії. Оцінювач побудовано з використанням техніки усереднення похідної скінченно-елементного розв'язку. За результатами обчислювального експерименту ефективність та надійність запропонованого оцінювача суттєво зростають зі зменшенням кроку сітки.

Список використаної літератури

1. Brenner S. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott. – Springer, 2008, 3ed. – 404 p. – ISBN 978-1-4757-3660-1. – ISBN 978-1-4757-3658-8 (eBook). – DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3658-8.
2. Carstensen C. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part1: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM / C. Carstensen, S. Bartels // Math. Comp. – 2002. – Vol 71, № 2. – P. 945–969. – DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01402-3.
3. Ervin V.J. Variational Formulation for the Stationary Fractional Advection Dispersion Equation / V.J. Ervin, J.P. Roop // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2006. – Vol. 22, Iss. 3. – P. 558–576. – DOI: https://doi.org/10.1002/num.20112.
4. Li Ch. Numerical Methods for Fractional Calculus / Ch. Li, F. Zeng. – New-York: Chapman and Hall/CRC, 2015. – 281 p. – DOI: https://doi.org/10.1201/b18503.
5. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. – New-York: Academic Press, 1999. – 340 p. – ISBN: 0-12-558840-2.
6. Szabó B. Finite element analysis: method, verification and validation / B. Szabó, I. Babuska. – John Wiley & Sons, Inc., 2021. Second edition. – 387 p. – ISBN: 9781119426424. – Online ISBN: 9781119426479. – DOI: https://doi.org/10.1002/9781119426479.

7. Verfürth R. A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods / R. Verfürth. – Oxford University Press, 2013. – 414 p. – Online ISBN: 9780191758485. – Print ISBN: 9780199679423. – DOI: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199679423.001.0001.

Стаття: надійшла до редколегії 02.02.2026
доопрацьована 23.02.2026
прийнята до друку 16.03.2026

A POSTERIOR ESTIMATOR OF THE FINITE ELEMENT SOLUTION OF THE FRACTIONAL ADVECTION-DISPERSION EQUATION

V. Verbitskyi, I. Shpinareva

Odesa I.I. Mechnikov University,
2, Zmienko Vsevolod str., 65082, Odesa, Ukraine,
e-mail: *v.verbitskyi@onu.edu.ua*, *iryna.shpinareva@onu.edu.ua*

The stationary fractional advection-dispersion equation contains fractional-order Riemann-Liouville derivatives. This equation arises when modeling physical phenomena with anomalous diffusion, which is poorly modeled by the classical advection-dispersion equation with integer-order derivatives. The finite element method, which is a universal tool for solving boundary value problems for differential equations, has been used for equations with fractional derivatives relatively recently. Therefore, various aspects of the application of the method to fractional equations require further study.

The paper proposes a reliable and efficient a posteriori estimator of the error of the finite element solution of the boundary value problem for the one-dimensional fractional stationary advection-dispersion equation. The a posteriori estimator is constructed using the averaging technique, which reduces to finding the projection of the derivative of the finite element solution onto the finite element space. Computing this projection in the case of boundary value problems with integer derivatives is as costly as finding a finite element solution to the original boundary value problem. Therefore, various approximations are usually used to calculate the scalar product when computing the projection. However, in the case of fractional derivatives, calculating the projection is much less expensive than finding the finite element solution, so it makes sense to build an a posteriori estimator of the finite element solution error using the projection of the finite element solution derivative. Analysis of the results of the computational experiment allows us to conclude that with a decrease in the finite element mesh step, the efficiency and reliability of the proposed a posteriori estimator increase significantly.

Key words: fractional stationary advection-dispersion equation, variational formulation of fractional boundary value problems, efficient and reliable a posteriori estimator of the finite element solution error, averaging technique for constructing the a posteriori estimator.