

АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДЕКОМПОЗИЦІЄЮ ОПЕРАТОРА

Г. Ярмола

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна
e-mail: halyna.yarmola@lnu.edu.ua*

Складні явища та процеси часто описуються нелінійними рівняннями, обчислити точний розв'язок яких є досить складно або неможливо. Тому чисельне розв'язування нелінійних операторних рівнянь залишається актуальною проблемою обчислювальної математики. Універсальних методів наближеного розв'язування таких задач не існує. Дуже часто потрібно враховувати специфіку кожної нелінійної задачі, яку розв'язують, зокрема можливість обчислення похідних певного порядку. В цій роботі проведено дослідження методів для розв'язування нелінійних рівнянь з декомпозицією оператора. Оператор таких задач можна подати як суму диференційовного та неперервного операторів. Відомо, що неперервний оператор є недиференційовним в деяких точках області визначення. За таких умов класичний метод Ньютона незастосовний для чисельного розв'язування цих задач. Однак можна застосувати різницеві методи, які замість похідної використовують поділені різниці. Ефективнішим підходом є диференціально-різницеві методи, ітераційні формули яких містять похідну від диференційовної частини та поділену різницю від неперервної частини нелінійного оператора. В роботі досліджено збіжність одно та двокрокового двопараметричних методів. Частковими випадками цих методів є відомі ітераційні процеси. Аналіз локальної збіжності здійснено за слабких ω -умов. Отримано оцінки похибок та рівняння для визначення радіусів областей збіжності методів. На тестових прикладах проведено чисельні експерименти та підтверджено теоретичні результати.

Ключові слова: нелінійне операторне рівняння, локальна збіжність, диференціально-різницевий метод.

1. ВСТУП

Розглянемо задачу знаходження наближеного розв'язку x^* нелінійного операторного рівняння [2]

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \quad (1)$$

де F – диференційовний за Фреше оператор, визначений у відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y , G – неперервний оператор з тією ж областю визначення та значень. Оскільки, в загальному випадку, оператор H може бути недиференційовним, то для розв'язування (1) класичний метод Ньютона не застосовують. Для чисельного розв'язування такого класу задач можна застосувати методи з поділеними різницями. Також хорошим підходом є диференціально-різницеві ітераційні процеси (методи з декомпозицією оператора). Формули цих методів містять похідну від диференційовної частини та поділену різницю від неперервної частини.

Нехай $x_{-1}, x_0 \in D$. Для знаходження наближеного розв'язку x^* задачі (1) часто застосовують однокроковий двоточковий метод [1, 2, 5]

$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} H(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тут A_k – лінійний оператор, який можна визначити різними способами. Розглянемо варіанти, які найчастіше застосовуються на практиці:

1. $A_k = F'(x_k)$ (метод типу Ньютона [1, 2, 5]);
2. $A_k = H(x_{k-1}; x_k)$ (метод хорд [7]);
3. $A_k = H(\lambda x_k + (1 - \lambda)x_{k-1}; x_k)$, $\lambda \in [0, 1]$ (однопараметричний метод типу хорд [6]);
4. $A_k = F'(x_k) + G(x_{k-1}; x_k)$ (комбінований метод Ньютона і хорд [1, 4, 5]);
5. $A_k = F'(x_k) + G(2x_k - x_{k-1}; x_{k-1})$ (комбінований метод Ньютона і Курчатова [8]);
6. $A_k = F'(x_k) + G(x_k; x_{k-1}) + G(x_{k-2}; x_k) - G(x_{k-2}; x_{k-1})$ (комбінований метод Ньютона і Потра [3]).

Також у праці [9] було досліджено двокроковий метод

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left(F' \left(\frac{x_k + y_k}{2} \right) + G(x_k; y_k) \right)^{-1} H(x_k), \\ y_{k+1} &= x_{k+1} - \left(F' \left(\frac{x_k + y_k}{2} \right) + G(x_k; y_k) \right)^{-1} H(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тут $G(x; y)$ – це поділена різниця першого порядку оператора G за точками x та y . Відповідно до означення [2, 5], цей оператор задовольняє умову

$$G(x; y)(x - y) = G(x) - G(y) \quad \forall x, y \in D, \quad x \neq y.$$

Якщо G є диференційовним оператором, то $G(x; x) = G'(x)$ і також справджується рівність

$$G(x; y) = \int_0^1 G'(y + \theta(x - y)) d\theta(x - y).$$

В цій статті проведено дослідження класу однокрокових

$$x_{k+1} = x_k - (F'(x_k) + G(u_k; v_k))^{-1} H(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

де $u_k = x_k + a_k(x_{k-1} - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(x_{k-1} - x_k)$, $a_k \in [-1, 1]$, $b_k \in [0, 1]$, $a_k \neq b_k$, $x_{-1}, x_0 \in D$ та двокрокових методів

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left(F' \left(\frac{x_k + y_k}{2} \right) + G(u_k; v_k) \right)^{-1} H(x_k), \\ y_{k+1} &= x_{k+1} - \left(F' \left(\frac{x_k + y_k}{2} \right) + G(u_k; v_k) \right)^{-1} H(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

де $u_k = x_k + a_k(y_k - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(y_k - x_k)$, $a_k \in [-1, 1]$, $b_k \in [0, 1]$, $a_k \neq b_k$, $y_0, x_0 \in D$. Зауважимо, що частковими випадками методу (3) є метод Ньютона-хорд, якщо $a_k = 1$ і $b_k = 0$, та Ньютона-Курчатова, якщо $a_k = -1$ і $b_k = 1$. Поклавши $a_k = 0$ і $b_k = 1$ в (4), отримаємо двокроковий метод [9].

2. ЛОКАЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДІВ

Аналіз локальної збіжності проведено за ω -умов та фіксованих параметрів, тобто, $a_k = a$ та $b_k = b$. Також будемо вважати, що оператор H є диференційовним в точці розв'язку x^* . Через $B(x^*, r)$ позначимо відкриту кулю з центром в точці x^* та радіусом r .

Оскільки поділена різниця першого порядку визначена в області $D \times D$ і для всіх $x_{k-1}, x_k \in B(x^*, r)$, де r – радіус області збіжності однокрокового методу (3), виконується

$$\begin{aligned}\|u_k - x^*\| &= \|x_k + a(x_{k-1} - x_k) - x^*\| \leq (1 - a)\|x_k - x^*\| + |a|\|x_{k-1} - x^*\| \\ &< (1 - a + |a|)r,\end{aligned}$$

$$\|v_k - x^*\| = \|x_k + b(x_{k-1} - x_k) - x^*\| \leq (1 - b)\|x_k - x^*\| + b\|x_{k-1} - x^*\| < r,$$

то куля $B(x^*, (1 - a + |a|)r)$ також повинна міститися в області D . Аналогічно для всіх $y_k, x_k \in B(x^*, r)$, де r – радіус області збіжності двокрокового методу (4), маємо

$$\begin{aligned}\|u_k - x^*\| &= \|x_k + a(y_k - x_k) - x^*\| \leq (1 - a)\|x_k - x^*\| + |a|\|y_k - x^*\| \\ &< (1 - a + |a|)r,\end{aligned}$$

$$\|v_k - x^*\| = \|x_k + b(y_k - x_k) - x^*\| \leq (1 - b)\|x_k - x^*\| + |b|\|y_k - x^*\| < r.$$

Сформулюємо теорему про локальну збіжність однокрокового методу (3).

Теорема 1. Нехай H – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y , причому $H \equiv F + G$, де F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор. Припустимо, що виконуються такі умови:

- 1) рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$, існує похідна Фреше $H'(x^*)$ і вона оборотна;
- 2) в D похідна F' задовольняє умову

$$\|H'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| \leq \omega_1(\|x - y\|) \quad \forall x, y \in D, \quad (5)$$

де $\omega_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – додатна, неспадна та інтегровна функція;

- 3) в $D \times D$ оператор G має поділені різниці першого порядку $G(x; y)$, які задовольняють умову

$$\|H'(x^*)^{-1}[G(x; y) - G(u; v)]\| \leq \omega_2(\|x - u\|, \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D, \quad (6)$$

де $\omega_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – додатна та неспадна функція за обома аргументами.

Тоді послідовність $\{x_k\}_{k \geq 0}$, отримана однокроковим методом (3), є коректно визначена, міститься в кулі $B(x^*, r)$ і збігається до x^* для всіх початкових наближень $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$. Крім цього, справджується оцінка похибки

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq g_1(r)\|x_k - x^*\|, \quad k \geq 0, \quad (7)$$

де

$$g_1(r) = \frac{\int_0^1 \omega_1((1 - \theta)r) d\theta + \omega_2(2|a|r, r)}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1 - a + |a|)r, r)}$$

і радіус r є найменшим додатним коренем рівняння

$$g_1(r) = 1,$$

причому $\omega_1(r) + \omega_2((1 - a + |a|)r, r) < 1$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $x_{k-1}, x_k \in B(x^*, r)$, тоді

$$\|u_k - x_k\| = \|x_k + a(x_{k-1} - x_k) - x_k\| \leq |a|(\|x_k - x^*\| + \|x_{k-1} - x^*\|) < 2|a|r.$$

Позначимо $A_k = F'(x_k) + G(u_k; v_k)$. Врахувавши умови (5) і (6), отримаємо

$$\begin{aligned} \|I - H'(x^*)^{-1}A_k\| &= \|H'(x^*)^{-1}[H'(x^*) - A_k]\| \leq \|H'(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x_k)]\| \\ &\quad + \|H'(x^*)^{-1}[G(x^*; x^*) - G(u_k; v_k)]\| \\ &\leq \omega_1(\|x_k - x^*\|) + \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|) \\ &\leq \omega_1(r) + \omega_2((1 - a + |a|)r, r) < 1. \end{aligned}$$

За теоремою Банаха про обернений оператор [2], маємо, що A_k оборотний і

$$\begin{aligned} \|A_k^{-1}H'(x^*)\| &\leq \frac{1}{1 - \omega_1(\|x_k - x^*\|) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \\ &\leq \frac{1}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1 - a + |a|)r, r)}. \end{aligned}$$

Врахувавши формулу методу (3), означення поділеної різниці і те, що $H(x^*) = 0$, можна записати

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - A_k^{-1}H(x_k) = A_k^{-1}H'(x^*) \\ &\quad \times H'(x^*)^{-1} \left[A_k - \int_0^1 F'(x^* + \theta(x_k - x^*))d\theta - G(x_k; x^*) \right] (x_k - x^*). \end{aligned}$$

Врахувавши останню рівність, а також умови (5) і (6), отримаємо оцінку (7)

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \frac{\int_0^1 \omega_1((1 - \theta)\|x_k - x^*\|)d\theta}{1 - \omega_1(\|x_k - x^*\|) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \|x_k - x^*\| \\ &\quad + \frac{\omega_2(|a|(\|x_k - x^*\| + \|x_{k-1} - x^*\|), (1 - b)\|x_k - x^*\| + b\|x_{k-1} - x^*\|)}{1 - \omega_1(\|x_k - x^*\|) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \|x_k - x^*\| \\ &\leq \frac{\int_0^1 \omega_1((1 - \theta)r)d\theta + \omega_2(2|a|r, r)}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1 - a + |a|)r, r)} \|x_k - x^*\| = g_1(r)\|x_k - x^*\|. \end{aligned}$$

Оскільки виконується оцінка (7), то

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \|x_k - x^*\| < r.$$

Отже, $x_{k+1} \in B(x^*, r)$. $\square$

Тепер сформулюємо теорему про локальну збіжність двокрокового методу (4).

Теорема 2. Нехай H – нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y , причому $H \equiv F + G$, де F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор. Припустимо, що виконуються такі умови:

- 1) рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$, існує похідна Фреше $H'(x^*)$ і вона оборотна;
- 2) в D похідна F' задовольняє умову

$$\|H'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| \leq \omega_1(\|x - y\|) \quad \forall x, y \in D, \quad (8)$$

де $\omega_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – додатна, неспадна та інтегровна функція;

- 3) в $D \times D$ оператор G має поділені різниці першого порядку $G(x; y)$, які задовольняють умову

$$\|H'(x^*)^{-1}[G(x; y) - G(u; v)]\| \leq \omega_2(\|x - u\|, \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D, \quad (9)$$

де $\omega_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – додатна та неспадна функція за обома аргументами.

Тоді послідовності $\{x_k\}_{k \geq 0}$ і $\{y_k\}_{k \geq 0}$, отримані двокроковим методом (4), є коректно визначені, містяться в кулі $B(x^*, r)$ і збігаються до x^* для всіх початкових наближень $y_0, x_0 \in B(x^*, r)$. Крім того, справджуються оцінки похибок

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq g_1(r)\|x_k - x^*\|, \quad k \geq 0, \quad (10)$$

$$\|y_{k+1} - x^*\| \leq g_2(r)\|x_{k+1} - x^*\|, \quad k \geq 0, \quad (11)$$

де

$$g_1(r) = \frac{\int_0^1 \omega_1((1-\theta)r) d\theta + \omega_2(2|a|r, r)}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1-a+|a|)r, r)},$$

$$g_2(r) = \frac{\int_0^1 \omega_1(r + \theta g_1(r)r) d\theta + \omega_2(g_1(r)r + (1-a+|a|)r, r)}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1-a+|a|)r, r)}$$

і радіус r є найменшим додатним коренем рівнянь

$$g_1(r) = 1, \quad g_2(r)g_1(r) = 1,$$

причому $\omega_1(r) + \omega_2((1-a+|a|)r, r) < 1$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

Нехай $x_k, y_k \in B(x^*, r)$, тоді

$$\begin{aligned} \|u_k - x_k\| &= \|x_k + a(y_k - x_k) - x_k\| \leq |a|(\|x_k - x^*\| + \|y_k - x^*\|) < 2|a|r, \\ \|u_k - x_{k+1}\| &= \|x_k + a(y_k - x_k) - x_{k+1}\| \leq \|x_{k+1} - x^*\| + (1-a)\|x_k - x^*\| \\ &\quad + |a|\|y_k - x^*\| < (g_1(r) + 1 - a + |a|)r. \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_k = F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) + G(u_k; v_k).$$

Враховавши умови (8) і (9), отримаємо

$$\begin{aligned} \|I - H'(x^*)^{-1}A_k\| &= \|H'(x^*)^{-1}[H'(x^*) - A_k]\| \\ &\leq \left\| H'(x^*)^{-1} \left[F'(x^*) - F'\left(\frac{x_k + y_k}{2}\right) \right] \right\| \\ &+ \|H'(x^*)^{-1}[G(x^*; x^*) - G(u_k; v_k)]\| \\ &\leq \omega_1\left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2}\right) + \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|) \\ &\leq \omega_1(r) + \omega_2((1 - a + |a|)r, r) < 1. \end{aligned}$$

За теоремою Банаха про обернений оператор [2], маємо, що A_k оборотний і

$$\begin{aligned} \|A_k^{-1}H'(x^*)\| &\leq \left[1 - \omega_1\left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2}\right) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|) \right]^{-1} \\ &\leq \frac{1}{1 - \omega_1(r) - \omega_2((1 - a + |a|)r, r)}. \end{aligned}$$

Враховавши формулу методу (4), означення поділеної різниці і те, що $H(x^*) = 0$, можна записати

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - A_k^{-1}H(x_k) = A_k^{-1}H'(x^*) \\ &\times H'(x^*)^{-1} \left[A_k - \int_0^1 F'(x^* + \theta(x_k - x^*))d\theta - G(x_k; x^*) \right] (x_k - x^*), \\ y_{k+1} - x^* &= x_{k+1} - x^* - A_k^{-1}H(x_{k+1}) = A_k^{-1}H'(x^*) \\ &\times H'(x^*)^{-1} \left[A_k - \int_0^1 F'(x^* + \theta(x_{k+1} - x^*))d\theta - G(x_{k+1}; x^*) \right] (x_{k+1} - x^*). \end{aligned}$$

Враховавши останні рівності, а також умови (8) і (9), отримаємо оцінки (10) і (11)

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \frac{\int_0^1 \omega_1\left((0.5 - \theta)\|x_k - x^*\| + 0.5\|y_k - x^*\|\right)d\theta}{1 - \omega_1\left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2}\right) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \|x_k - x^*\| \\ &+ \frac{\omega_2(|a|(\|x_k - x^*\| + \|y_k - x^*\|), (1 - b)\|x_k - x^*\| + b\|y_k - x^*\|)}{1 - \omega_1\left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2}\right) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \|x_k - x^*\| \\ &\leq g_1(r)\|x_k - x^*\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x^*\| &\leq \frac{\int_0^1 \omega_1 \left(0.5(\|x_k - x^*\| + \|y_k - x^*\|) + \theta \|x_{k+1} - x^*\| \right) d\theta}{1 - \omega_1 \left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2} \right) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \|x_{k+1} - x^*\| \\ &+ \frac{\omega_2(\|x_{k+1} - x^*\| + (1-a)\|x_k - x^*\| + |a|\|y_k - x^*\|, (1-b)\|x_k - x^*\| + b\|y_k - x^*\|)}{1 - \omega_1 \left(\frac{\|x_k - x^*\|}{2} + \frac{\|y_k - x^*\|}{2} \right) - \omega_2(\|u_k - x^*\|, \|v_k - x^*\|)} \\ &\times \|x_{k+1} - x^*\| \leq g_2(r) \|x_{k+1} - x^*\|. \end{aligned}$$

Оскільки виконуються оцінки (10) і (11), то

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|x_k - x^*\| < r, \\ \|y_{k+1} - x^*\| &\leq \|x_{k+1} - x^*\| < r. \end{aligned}$$

Отже, $x_{k+1}, y_{k+1} \in B(x^*, r)$.

□

Зауваження 1. Якщо функція ω_2 задовольняє умову

$$\omega_2(0, 0) = 0,$$

то G є диференційовним оператором і $G(x; x) = G'(x)$ [6].

Частковим випадком ω -умов є класичні умови Ліпшиця:

$$\omega_1(\|x - y\|) = L_1 \|x - y\|, \quad \omega_2(\|x - u\|, \|y - v\|) = L_2(\|x - u\| + \|y - v\|). \quad (12)$$

Крім того, замість диференційовності оператора H в точці розв'язку x^* можна припускати, що для всіх $x, y, z \in D$, $y \neq z$ існує оператор $[F'(x) + G(y; z)]^{-1}$ і $\|[F'(x) + G(y; z)]^{-1}\| \leq \alpha$.

3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

У цьому розділі наведемо результати застосовності теорем про збіжність методів (3) та (4). Для цього розглянемо систему нелінійних рівнянь. Нехай $x = (\xi_1; \dots; \xi_m)$,

$$\sum_{j=1}^m \xi_j + e^{\xi_i} - 1.2 + 0.2|\xi_i + 1| = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Тут $F_i(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j + e^{\xi_i} - 1.2$, $G_i(x) = 0.2|\xi_i + 1|$, $i = 1, \dots, m$, $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Точним розв'язком системи (13) є вектор $x^* = (0; \dots; 0)$. Бачимо, що вектор-функція H є диференційовною в точці x^* , а елементи головної діагоналі матриці поділених різниць належать відрізку $[-0.2; 0.2]$. Нехай $D = \{x \in \mathbb{R}^m : \xi_i \in (-1.5, 1)\}$. Оскільки

$$F'(x) = \begin{pmatrix} e^{\xi_1} + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\xi_2} + 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & e^{\xi_m} + 1 \end{pmatrix}, \quad H'(x^*) = \begin{pmatrix} 2.2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2.2 & \dots & 1 \\ \dots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 2.2 \end{pmatrix},$$

$$G(x; y) = 0.2 \text{diag} \left\{ \frac{|\xi_1 + 1| - |\eta_1 + 1|}{\xi_1 - \eta_1}, \dots, \frac{|\xi_m + 1| - |\eta_m + 1|}{\xi_m - \eta_m} \right\}, \quad y = (\eta_1; \dots; \eta_m),$$

то отримуємо, що

$$\omega_1(\|x - y\|) = A\|x - y\|, \quad \omega_2(\|x - u\|, \|y - v\|) = B,$$

де $A = e\|H'(x^*)^{-1}\|$, $B = 0.4\|H'(x^*)^{-1}\|$. Врахувавши це, одержимо таке рівняння для обчислення радіусу області збіжності однокрокового методу (3):

$$\frac{0.5Ar + B}{1 - Ar - B} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1 - 2B}{1.5A}, \quad r \neq \frac{1 - B}{A}.$$

Аналогічно для двокрокового методу (4) отримуємо такі рівняння:

$$g_1(r) = \frac{0.5Ar + B}{1 - Ar - B} = 1, \\ \frac{(0.5Ar + B)((1 + 0.5g_1(r))Ar + B)}{(1 - Ar - B)^2} = 1.$$

В таблиці 1 наведемо результати для різної кількості рівнянь m . Оскільки функція ω_2 є константою, то радіуси будуть однаковими для різних значень параметрів a_k і b_k . В обчисленнях використано норму $\|\cdot\|_\infty$.

Таблиця 1

Радіуси областей збіжності

Метод	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$
метод (3)	0.3434	0.0415	0.0021
метод (4)	0.2756	0.0318	0.0016

В таблиці 2 показано значення похибок на кожній ітерації для $a_k = 0$ і $b_k = 1$. Результати отримано для $m = 3$. Початкові наближення $x_0 = (0.03; 0.03; 0.03)$, $x_{-1} = y_0 = (0.031; 0.031; 0.031)$. Ітераційний процес зупинявся за умови, що

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq 10^{-8}.$$

В таблиці 2 не вказано значення правої частини оцінки (7), оскільки вона дорівнює $\|x_k - x^*\|$, бо $g_1(r) = 1$.

Таблиця 2

Значення похибок

k	$\ x_{k+1} - x^*\ $	$\ x_{k+1} - x^*\ $	$g_1(r)\ x_k - x^*\ $	$\ y_{k+1} - x^*\ $	$g_2(r)\ x_{k+1} - x^*\ $
0	1.0852e-04	1.1216e-04	2.7537e-02	8.1953e-07	1.2220e-04
1	1.4021e-09	1.0930e-11	1.0295e-04	1.7058e-16	1.1907e-11
2	6.1175e-17	1.5973e-17	1.0032e-11	1.0832e-17	1.7402e-17

Тепер розглянемо нелінійне рівняння на інтервалі $(1, 3.5)$

$$5x^2 + x|x - 2.5| - 29.04 = 0. \quad (14)$$

Розв'язком рівняння (14) є $x^* = 2.4$. Функція H є диференційовною в цій точці і

$$F'(x) = 10x, \quad H'(x^*) = 19.2, \quad G(x; y) = \frac{x|x - 2.5| - y|y - 2.5|}{x - y}.$$

Для поділеної різниці виконується рівність

$$\begin{aligned} G(x; y) &= \frac{x|x - 2.5| \mp y|x - 2.5| - y|y - 2.5|}{x - y} = \\ &= |x - 2.5| + y \frac{|x - 2.5| - |y - 2.5|}{x - y}. \end{aligned}$$

Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} |G(x; y) - G(u; v)| &\leq \left| |x - 2.5| - |u - 2.5| \right| + \\ &+ \left| y \frac{|x - 2.5| - |y - 2.5|}{x - y} - v \frac{|u - 2.5| - |v - 2.5|}{u - v} \right| \\ &\leq |x - u| + |y - v| \left| \frac{|x - 2.5| - |y - 2.5|}{x - y} \right| + \\ &+ |v| \left| \frac{|x - 2.5| - |y - 2.5|}{x - y} - \frac{|u - 2.5| - |v - 2.5|}{u - v} \right| \\ &\leq |x - u| + |y - v| + 2|v|, \end{aligned}$$

оскільки

$$\frac{|x - 2.5| - |y - 2.5|}{x - y} \in [-1; 1] \quad \forall x, y \in (1, 3.5).$$

В результаті отримаємо, що

$$\omega_1(\|x - y\|) = A\|x - y\|,$$

$$\omega_2(\|x - u\|, \|y - v\|) = B\|x - u\| + C\|y - v\| + D,$$

де $A = 10\|H'(x^*)^{-1}\|$, $B = C = \|H'(x^*)^{-1}\|$, $D = 7\|H'(x^*)^{-1}\|$.

В таблиці 3 подано значення радіусів областей збіжності для різних значень параметрів a_k і b_k .

Таблиця 3

Радіуси областей збіжності

Метод	$a_k = 0, b_k = 1$	$a_k = -1, b_k = 1$	$a_k = 0.5, b_k = 0$
метод (3)	0.2889	0.2364	0.2737
метод (4)	0.2236	0.1901	0.2179

В таблиці 4 показано значення похибок на кожній ітерації для $a_k = -1$ і $b_k = 1$. Початкові наближення $x_0 = 2.5$, $x_{-1} = y_0 = 2.51$.

З отриманих результатів бачимо, що область збіжності однокрокових методів є ширша за область збіжності двокрокових методів.

Таблиця 4

Значення похибок

k	$\ x_{k+1} - x^*\ $	$\ x_{k+1} - x^*\ $	$g_1(r)\ x_k - x^*\ $	$\ y_{k+1} - x^*\ $	$g_2(r)\ x_{k+1} - x^*\ $
0	1.1635e-02	1.1812e-02	8.9322e-02	1.5614e-03	1.3224e-02
1	2.4848e-05	2.1754e-06	1.0550e-02	4.3272e-09	2.4355e-06
2	1.1381e-10	2.1583e-13	1.9431e-06	0	2.4163e-13
3	0	0	1.9278e-13	0	0

4. ВИСНОВКИ

В цій статті досліджено локальну збіжність двопараметричних диференціально-різницьових методів за слабких ω -умов для розв'язування нелінійних рівнянь з декомпозицією оператора. Проведені чисельні експерименти демонструють застосовність отриманих теоретичних результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Argyros I.K. A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / I.K. Argyros // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 298. – P. 374–397.
2. Argyros I.K. Convergence and applications of Newton's-type iterations / I.K. Argyros. – New-York: Springer-Verlag, 2008. – 506 p.
3. Argyros I.K. Extended convergence analysis of the Newton-Potra method under weak conditions / I.K. Argyros, S. Shakhno, Y. Shunkin, H. Yarmola // Applicationes Mathematicae. – 2021. – Vol. 48(1). – P. 101–110.
4. Argyros I.K. Semilocal convergence of a Newton-secant solver for equations with a decomposition of operator / I.K. Argyros, S.M. Shakhno, H.P. Yarmola // Journal of Computational Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 29, № 2. – P. 279–289.
5. Cătinaș E. On some iterative methods for solving nonlinear equations / E. Cătinaș // Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. – 1994. – Vol. 23, № 1. – P. 47–53.
6. Hernández M.A. A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations / M.A. Hernández, M.J. Rubio // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 275. – P. 821–834.
7. Ren H. New sufficient convergence conditions of the secant method for nondifferentiable operators / H. Ren // Appl. Math. Comput. – 2006. – Vol. 182, Iss. 2. – P. 1255–1259.
8. Shakhno S.M. Convergence of the Newton-Kurchatov method under weak conditions / S.M. Shakhno, H.P. Yarmola // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 243, № 1. – P. 1–10.
9. Shakhno S.M. Two-step combined method for solving nonlinear operator equations / S.M. Shakhno, H.P. Yarmola // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 2(116). – P. 130–140.

Стаття: надійшла до редколегії 14.07.2025

доопрацьована 07.09.2025

прийнята до друку 17.09.2025

CONVERGENCE ANALYSIS OF METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS WITH OPERATOR DECOMPOSITION

H. Yarmola

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine,
e-mail: halyna.yarmola@lnu.edu.ua*

Complex phenomena and processes are often described by nonlinear equations, the exact solution of which is quite difficult or impossible to calculate. Therefore, the numerical solution of nonlinear operator equations remains an urgent problem of computational mathematics. There are no universal methods for the approximate solution of such problems. Very often, it is necessary to take into account the specifics of each nonlinear problem being solved, in particular, the possibility of calculating derivatives of a certain order. The paper studies methods for solving nonlinear equations with operator decomposition. The operator of such problems can be represented as the sum of a differential and a continuous operator, which is non-differentiable at some points in the domain of definition. Taking into account this feature, the classical Newton method is not applicable for numerically solving these problems. However, difference methods can be used, which use divided differences instead of the derivative. A more effective approach is differential-difference methods, the iteration formulas of which contain the derivative of the differential part and the divided difference of the continuous part of the nonlinear operator. In this paper, the convergence of the one- and two-step two-parametric methods are investigated. Partial cases of these methods are well-known iterative processes. The analysis of local convergence is carried out under weak ω -conditions. Error estimates and equations for determining the radii of the convergence regions of the methods are obtained. Numerical experiments are carried out on test examples and theoretical results are confirmed.

Key words: nonlinear operator equation, local convergence, differential-difference method.