

## ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

<http://dx.doi.org/10.30970/vam.2024.34.00000>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ  
МАТРИЧНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

М. Недашковський, А. Недашковська,

*Львівський національний університет імені Івана Франка,**вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна**e-mail: [mykola.nedashkovskyi@lnu.edu.ua](mailto:mykola.nedashkovskyi@lnu.edu.ua),**[anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua](mailto:anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua)*

Ланцюгові дроби вже тривалий час відомі як надзвичайно гнучкий і потужний інструмент у математичному моделюванні, теорії чисел та чисельних методах. Вони відіграють важливу роль у розвитку як фундаментальної, так і прикладної математики. Їх використання можна простежити в різноманітних галузях науки та техніки: від побудови календарних систем і розробки методів апроксимації до складних обчислювальних алгоритмів. Зокрема, ланцюгові дроби застосовуються при створенні сонячного календаря, у доведенні ірраціональності чисел (так, саме завдяки ним було показано ірраціональність деяких значень зет-функції Рімана  $\zeta$  та числа  $\pi$ ), в алгоритмі Ланцоша, який сьогодні активно використовується для знаходження власних значень великих розріджених матриць, а також у певних алгоритмах факторизації й криптографічних застосуваннях. Крім того, їх властивості часто виявляються корисними при побудові ефективних методів апроксимації, інтерполяції та при аналізі збіжності рядів.

Особливої уваги заслуговує використання ланцюгових дробів у розв'язуванні систем рівнянь. Завдяки своїй структурі вони виявляють себе як ефективний і надійний інструмент чисельного аналізу, що поєднує простоту реалізації з високою точністю результатів. У даній роботі розглядаються системи нелінійних рівнянь, для яких застосовується відносно проста схема, запропонована раніше. Розв'язок формується у вигляді матричного ланцюгового дроби, що дозволяє узагальнити підхід на більш складні задачі та робить метод придатним для чисельної реалізації. Додатково формулюється достатня умова збіжності цього методу, що є ключовим для його практичного застосування. Ще однією перевагою даних обчислювальних схем є те, що вони використовують другий та третій елемент ряду Тейлора для  $N$  змінних і дають розв'язок системи в матричний ланцюговий дріб.

Наведені результати обчислювальних експериментів із тестовими задачами підтверджують як збіжність, так і ефективність запропонованого підходу. Більше того, отримані дані свідчать про можливість подальшого розширення застосування методу на ширші класи нелінійних систем. Таким чином, стаття робить внесок і у розвиток теоретичної бази використання ланцюгових дробів, і у вдосконалення методів прикладного чисельного аналізу.

**Ключові слова:** Ітераційний метод, системи нелінійних рівнянь, ланцюгові дроби, матричні рівняння.

## 1. ВСТУП

Важливість розробки методів розв'язування нелінійних систем обумовлена їх широким практичним застосуванням [4], [5], [6]. Серед найпомітніших галузей — балістика ракетних двигунів та їх утилізація, а також сучасні дослідження у сфері вірусології та імунології. У даній роботі розглядаються системи нелінійних рівнянь, для яких застосовується відносно проста схема, запропонована раніше в [2].

Перед тим як перейти до опису алгоритму зупинимося на базовому апараті [3], який буде використано у формулі Тейлора для функцій із багатьма змінними.

**Теорема 1.** Якщо функція  $n$  змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  визначена і неперервна разом з усіма своїми частинними похідними до порядку  $m, m \geq 1$ , включно в деякому  $\delta$ -околі точки  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ , то справедлива формула

$$\begin{aligned} \Delta y &= f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} \cdot f\left(x^{(0)}\right) + r_{m-1}(\Delta x), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} r_{m-1}(\Delta x) &= \frac{1}{m!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m)} f\left(x_1^{(0)} + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \theta \Delta x_n\right), \\ 0 < \theta < 1, \Delta x &= (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \end{aligned}$$

а також формула

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} \cdot f\left(x^{(0)}\right) + r_m(\Delta x),$$

де  $r_m(\Delta x)$  можна записати кожним із наступних способів

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(\Delta x) \Delta x_1^{m_1} \dots \Delta x_n^{m_n},$$

$$\text{де } \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(\Delta x) = 0, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}, \text{ або}$$

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x) \rho^m, \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

тобто

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \rho \rightarrow 0.$$

Нарешті, через диференціали формулу можна записати у вигляді

$$\Delta y = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f\left(x^{(0)}\right) + r_m(\Delta x).$$

Для випадку функції двох змінних формула (1) може бути записана наступним чином

$$\begin{aligned} \Delta z &= f\left(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2\right) - f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = \frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2} h_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial^2 x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial^2 x_2^2} h_2^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{(3)} f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{(m-1)} f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) + r_{m-1}(h_1, h_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо систему  $n$  нелінійних рівнянь з  $n$  невідомими:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (3)$$

де  $f_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) є функціями від дійсних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Нехай функції  $n$  змінних,  $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) визначені та неперервні разом з усіма їхніми частковими похідними до другого порядку включно в деякому  $\delta$ -околі точки  $x^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

Припустимо, що  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) є наближеними розв'язками системи рівнянь (3). І нехай для кроку  $k$ , тобто для наближень  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ , рівняння системи (3) не виконується. Тоді будемо шукати поправки  $h_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), при яких в результаті підстановки  $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + h_j$  рівняння будуть виконуватися:

$$f_i(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2, \dots, x_n^{(k)} + h_n) = 0, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Запишемо тепер формулу Тейлора для функції змінних  $n$ :

$$\begin{aligned} f_i(x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2, \dots, x_n^{(k)} + h_n) &= f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_j^{(k)}} h_j + \frac{1}{2!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_j^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_q \right) \\ &+ o(h^3), \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді на основі системи (3) та формули Тейлора (5) для визначення поправок  $h_1, h_2, \dots, h_n$  з точністю до  $o(h^3)$  можна записати наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_j^{(k)}} h_j + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_j^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_q \right) + o(h^3) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, задача розв'язання системи (4) зводиться до розв'язування систем алгебричних рівнянь другого порядку з багатьма невідомими.

## 2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ФУНКЦІЙ $n$ ЗМІННИХ

Ідея запропонованого методу полягає у використанні періодичних матричних ланцюгових дробів для обчислення розв'язків вихідної системи після певних елементарних перетворень, які приводять до застосування рекурентних співвідношень.

Застосуємо цей підхід до (4).

Система (4) може бути представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2} h_1 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_n + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)}} \right) h_1 + \dots + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_n^{(k)} \right)^2} h_n + \right. \\ & \left. \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_n^{(k)} \partial x_1^{(k)}} h_1 + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_n^{(k)}} \right) h_n = \\ & = -f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7)$$

У матричній формі (5) може бути записана так

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) \\ \vdots \\ -f_n \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2} h_1 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_n + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)}}, \\ & \dots \\ a_{in} &= \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_n^{(k)} \right)^2} h_n + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_n^{(k)} \partial x_1^{(k)}} h_1 + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_n^{(k)}}, \\ & i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду такі позначення:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1 \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1 \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_2^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_2^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \end{pmatrix}, \\
&\dots \\
A_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_{n-1}^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_{n-1}^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \end{pmatrix}, \\
A_h &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1^{(k)}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n^{(k)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_1^{(k)}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x_n^{(k)}} \end{pmatrix}, \\
b &= \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Тоді (6) можна записати так:

$$(A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + A_h) (h_1 \dots h_n)^T = b \tag{10}$$

Якщо записати як  $(A_1 \dots A_n) \circ (h_1 \dots h_n)^T$  суму  $\sum_{i=1}^n A_i h_i$ , то (10) можна представити так:

$$\left( (A_1 \dots A_n) \circ (h_1 \dots h_n)^T + A_h \right) (h_1 \dots h_n)^T = b. \tag{11}$$

Припустимо тепер, що  $\left( (A_1 \dots A_n) \circ (h_1 \dots h_n)^T + A_h \right)$  не є виродженою матрицею. З відношення (8) одержуємо:

$$(h_1 \dots h_n)^T = \left( (A_1 \dots A_n) \circ (h_1 \dots h_n)^T + A_h \right)^{-1} b. \tag{12}$$

Крім того, можна на основі (12) записати для  $(h_1 \dots h_n)^T$  розвинення у матричний ланцюговий дріб

$$(h_1 \dots h_n)^T = \frac{b}{A_h + (A_1 \dots A_n) \circ \frac{b}{A_h + (A_1 \dots A_n) \circ \frac{b}{A_h + \dots}}}.$$

або у формі запису Роджерса

$$(h_1 \dots h_n)^T = \frac{b}{A_h} + (A_1 \dots A_n) \circ \frac{b}{A_h} + (A_1 \dots A_n) \circ \frac{b}{A_h} + \dots \quad (13)$$

Отже, ми можемо записати рекурентну формулу для обчислення наближеного розв'язку системи (3) з використанням матричних продовжень дробів:

$$\begin{pmatrix} h_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ h_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \left( (A_1, A_2, \dots, A_n) \circ \begin{pmatrix} h_1^{(k)} \\ \vdots \\ h_n^{(k)} \end{pmatrix} + A_h \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$k = 1, 2, \dots$

Таким чином, для знаходження розв'язку системи рівнянь (3) можна побудувати наступний алгоритм на основі (4):

1. Задаємо похибку  $\varepsilon > 0$ ;
2. Покладаємо початкове наближення,  $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \in \mathbb{R}$ ,  $h_1^{(0)}, \dots, h_n^{(0)} \in \mathbb{R}$ ;
3. Визначаємо лічильник  $k = 1$ ;
4. Знаходимо наступну поправку за формулою (14):

$$\begin{pmatrix} h_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ h_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \left( A_1, \dots, A_n \circ \begin{pmatrix} h_1^{(k)} \\ \vdots \\ h_n^{(k)} \end{pmatrix} + A_h \right)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{pmatrix},$$

$k = 1, 2, \dots$

5. Обчислюємо нове наближення  $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + h_1^{(k)}$ ,  $\dots$ ,  $x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + h_n^{(k)}$ ;
6. Проводимо перевірку умову  $\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Якщо умова не виконується, встановлюємо лічильник  $k = k + 1$ , присвоюємо значення  $x_i^{(k+1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) елементам  $x_i^{(k)}$  і переходимо до кроку 4, інакше повертаємо  $x_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

3. СХЕМА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ФУНКЦІЙ  $n$  ЗМІННИХ

Формулу Тейлора для функцій  $n$ -х змінних з точністю до  $O(h^3)$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} f_i \left( x_1^{(k)} + h_1, x_2^{(k)} + h_2, \dots, x_n^{(k)} + h_n \right) &= f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) + \\ &\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)}} h_j + \frac{1}{2!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_q \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_p^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_p h_q \right) \\ &+ o(h^4), \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Тоді на основі системи (4) за формулою Тейлора для визначення  $h_1, h_2, \dots, h_n$  із точністю до  $o(h^3)$  можемо записати наступну систему рівнянь

$$\begin{aligned} f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)}} h_j + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_q \right) + \\ &\frac{1}{3!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_p^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_p h_q \right) = 0 \\ &+ o(h^4), \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

Звідки

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)}} h_j &+ \frac{1}{2!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_q \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_j^{(k)} \partial x_p^{(k)} \partial x_q^{(k)}} h_j h_p h_q \right) = -f_1 \left( x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) \\ &+ o(h^4), \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким чином, у даному випадку задача розв'язання системи (4) зводиться до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь третього порядку з багатьма невідомими.

Схема методу знову полягає у використанні періодичних матричних ланцюгових дробів для обчислення розв'язків вихідної системи після певних елементарних перетворень, які приводять до застосування рекурентних співвідношень. Застосуємо цей підхід до (4).

Система (17) може бути у такому випадку представлена у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} h_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial x_2^{(k)}} h_1 h_2 + \right. \\
 & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial x_3^{(k)}} h_1 h_3 + \dots + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_{n-1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial x_{n-1}^{(k)}} h_1 h_{n-1} + \\
 & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial \left( x_n^{(k)} \right)^2} h_n^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2} h_1 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_n + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)}} \Big) h_1 + \\
 & + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} h_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial \left( x_2^{(k)} \right)^2} h_1 h_2 + \dots + \right. \\
 & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^2 \partial x_3^{(k)}} h_2 h_3 + \dots + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_2^{(k)}, x_{n-1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^2 \partial x_{n-1}^{(k)}} h_2 h_{n-1} + \\
 & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_2^{(k)} \partial \left( x_n^{(k)} \right)^2} h_n^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_2^{(k)}} h_1 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_2^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_n + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_2^{(k)}} \Big) h_2 + \dots \\
 & + \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial x_n^{(k)}} h_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_n^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_2^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_1 h_2 \right. \\
 & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_3^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_1 h_3 + \dots + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i \left( x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_{n-1}^{(k)} \left( \partial x_n^{(k)} \right)^2} h_{n-1} h_n + \\
 & + \dots + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_n^{(k)} \right)^3} h_n^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_n^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_{n-1}^{(k)} \partial x_n^{(k)}} h_{n-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( (x_n^{(k)})^2 \right)} h_n + \\
& + \frac{\partial f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial x_n^{(k)}} \Big) h_n = -f_i \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Якщо тепер ввести позначення

$$A_{h_1^2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_1^2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^3} & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_2^{(k)} \right)} & \dots & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_2^2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right) \partial \left( x_2^{(k)} \right)^2} & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^3} & \dots & \frac{\partial^3 f_1 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right) \partial \left( x_2^{(k)} \right)^2} & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^3} & \dots & \frac{\partial^3 f_2 \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_1^{(k)} \right) \partial \left( x_2^{(k)} \right)^2} & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^3} & \dots & \frac{\partial^3 f_n \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right)}{\partial \left( x_2^{(k)} \right)^2 \partial \left( x_n^{(k)} \right)} \end{pmatrix},$$

.....

$$A_{h_n^2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_n^{(k)})^3} \\ \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_n^{(k)})^3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_n^{(k)})^3} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_1 h_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_2^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \\ \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_2^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_2^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_1 h_3} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_3^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_3^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_3^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \\ \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_3^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_3^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_3^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)})^2 \partial(x_3^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_2^{(k)}) \partial(x_3^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_3^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} \end{pmatrix},$$

.....

$$A_{h_{n-1} h_n} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} \\ \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_1^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_2^{(k)}) \partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})} & \dots & \frac{\partial^3 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial(x_{n-1}^{(k)}) \partial(x_n^{(k)})^2} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \\ \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})^2} & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})^2} & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \end{pmatrix},$$

$$A_{h_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})^2} \dots & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \\ \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})^2} \dots & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_2^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})^2} \dots & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \end{pmatrix},$$

.....

$$A_{h_n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})^2} \\ \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)}) \partial (x_n^{(k)})} \dots & \frac{\partial^2 f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})^2} \end{pmatrix},$$

$$A_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})} & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})} & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_1^{(k)})} & \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_2^{(k)})} \dots & \frac{\partial f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial (x_n^{(k)})} \end{pmatrix},$$

$$b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ -f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ -f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{pmatrix},$$

то систему рівнянь (17) можна записати у матричному вигляді

$$\begin{aligned} & (A_{h_1^2} h_1^2 + A_{h_2^2} h_2^2 + \dots + A_{h_n^2} h_n^2 + A_{h_1 h_2} h_1 h_2 + A_{h_1 h_3} h_1 h_3 + \dots + \\ & + A_{h_{n-1} h_n} h_{n-1} h_n + A_{h_1} h_1 + A_{h_2} h_2 + A_{h_n} h_n + A_h) \circ (h_1 h_2 \dots h_n)^T = b. \end{aligned}$$

Перегрупуємо доданки і отримаємо

$$\begin{aligned} & \left( \left( \sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_1 h_i + A_{h_1} h_1 \right) + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_2 h_i} k_i h_2 h_i + A_{h_2} h_2 \right) + \dots + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_n h_i + A_{h_n} h_n \right) + A_h \right) \circ (h_1 h_2 \dots h_n)^T = b, \end{aligned} \quad (19)$$

де  $k_j = 1$  якщо  $i = j$  та  $k_j = \frac{1}{n-1}$  в іншому випадку. Далі, для визначення вектора  $(h_1 h_2 \dots h_n)^T$  одержуємо

$$\begin{aligned} (h_1 h_2 \dots h_n)^T &= \left( \left( \sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_1 h_i + A_{h_1} h_1 \right) + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_2 h_i} k_i h_2 h_i + A_{h_2} h_2 \right) + \right. \\ & \left. + \dots + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_n h_i + A_{h_n} h_n \right) + A_h \right)^{-1} \circ b. \end{aligned} \quad (20)$$

Або

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_h \end{pmatrix} = \frac{E}{\left( \sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_1 h_i + A_{h_1} h_1 \right) + \dots + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_n h_i + A_{h_n} h_n \right) + A_h} \cdot b \quad (21)$$

Звідки

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_h \end{pmatrix} = \frac{E}{\left( \sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_i + A_{h_1} \right) h_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_i + A_{h_n} \right) h_n + A_h} \cdot b \quad (22)$$

В свою чергу для  $\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right) h_j$  після перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right) h_j = \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right) A_{h_j}^{-1} A_{h_j} h_j = \\
 & = \left(\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right)^{-1}\right)^{-1} A_{h_j}^{-1} A_{h_j} h_j = \left(A_{h_j} \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right)^{-1}\right)^{-1} A_{h_j} h_j = \\
 & = \left(\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j} - \sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i\right) \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right)^{-1}\right)^{-1} A_{h_j} h_j = \\
 & = \frac{E}{E - \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i\right) \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}}} \cdot A_{h_j} h_j = \\
 & = \frac{E}{E - \left(\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i\right)^{-1}\right)^{-1} \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}}} \cdot A_{h_j} h_j = \\
 & = \frac{E}{E - \frac{E}{\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right) \left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i\right)^{-1}}} \cdot A_{h_j} h_j = \frac{E}{E - \frac{E}{E + A_{h_j} \cdot \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i}}} \cdot A_{h_j} h_j.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Отже

$$\left(\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i + A_{h_j}\right) h_j = \frac{E}{E - \frac{E}{E + A_{h_j} \cdot \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_j h_i} k_i h_i}}} \cdot A_{h_j} h_j. \tag{24}$$

Із врахуванням (24) рівність (22) можна переписати так

$$\begin{aligned}
 & (h_1 h_2 \dots h_n)^T = \\
 & = \frac{E}{A_h + A_{h_1} h_1 \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_i}}} A_{h_1} + \dots + A_{h_n} h_n \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_i}}} A_{h_n}} \cdot b
 \end{aligned} \tag{25}$$

Одержана формула може бути використана для організації ітераційного процесу для розв'язання системи рівнянь (17)

$$\begin{aligned}
& (h_1^{(j+1)} h_2^{(j+1)} \dots h_n^{(j+1)})^T = \\
& = \frac{E}{A_h + A_{h_1} h_1^{(j)} \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_i^{(j)}} A_{h_1}}} + \dots + A_{h_n} h_n^{(j)} \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_n^{(j)}} A_{h_n}}} - b}
\end{aligned} \tag{26}$$

Таким чином, для знаходження розв'язку системи рівнянь (18) можна побудувати наступний алгоритм на основі (26):

1. Задаємо похибку  $\varepsilon > 0$ ;
2. Покладаємо початкове наближення,  $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \in \mathbb{R}$ ,  $h_1^{(0)}, \dots, h_n^{(0)} \in \mathbb{R}$ ;
3. Визначаємо лічильник  $j = 1$ ;
4. Знаходимо наступну поправку за формулою (26):

$$\begin{aligned}
& (h_1^{(j+1)} h_2^{(j+1)} \dots h_n^{(j+1)})^T = \\
& = \frac{E}{A_h + A_{h_1} h_1^{(j)} \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_1 h_i} k_i h_i^{(j)}} A_{h_1}}} + \dots + A_{h_n} h_n^{(j)} \frac{E}{E - \frac{E}{E + \frac{E}{\sum_{i=1}^n A_{h_n h_i} k_i h_n^{(j)}} A_{h_n}}} - b}
\end{aligned}$$

5. Обчислюємо нове наближення  $x_1^{(j+1)} = x_1^{(j)} + h_1^{(j)}$ ,  $\dots$ ,  $x_n^{(j+1)} = x_n^{(j)} + h_n^{(j)}$ ;
6. Проводимо перевірку умову  $\|x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}\| \leq \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Якщо умова не виконується, встановлюємо лічильник  $j = j + 1$ , присвоюємо значення  $x_i^{(j+1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) елементам  $x_i^{(j)}$  і переходимо до кроку 4, інакше повертаємо  $x_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

#### 4. ПРО ЗБІЖНІСТЬ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СХЕМ

Збіжність періодичного неперервного матричного дробу матриці (13) є необхідною умовою для збіжності наприклад ітераційного процесу (14).

Для вивчення проблеми збіжності до розв'язку подібних розвинень розглянемо далі загальний МГЛД неканонічної форми

$$D = b_0 + \overset{\infty}{\underset{k(s)=1}{\sum}} A_{k(s)} \cdot \frac{E}{B_{k(s)}} \cdot C_{k(s)}, \tag{27}$$

де матриці  $A_{k(s)}, B_{k(s)} \in R^{p \times p}$ , та встановимо їх властивості, які потрібні для отримання надійних критеріїв для ухвалення рішення про закінчення ітерацій та збіжності процесу саме до розв'язку конкретних рівнянь.

Припустимо тепер, що розв'язок одного із матричних рівнянь існує та належить до деякого скінченного інтервалу. А обчислюється він за відповідною ітераційною процедурою, яка дає розвинення виду (27). Установимо тепер, чи можна використати

умови збіжності матричного гіллястого дробу як критерій закінчення ітераційного процесу.

У роботі [1] було узагальнено достатню умову для збіжності Ворпицького. Ця особливість може бути використана при аналізі збіжності матриці з неперервним дробом (10):

**Теорема 2.** Якщо для  $\|X\| \in (0, 2/3)$  існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння, то його розвинення за ітераційною процедурою у МГЛД з елементами, що задовольняють умови

$$\sum_{k_1=1}^n \frac{A_{k_1}}{E} + \sum_{k_2=1}^n \frac{A_{k_1 k_2}}{E} + \dots + \sum_{k_l=1}^n \frac{A_{k_1 k_2 \dots k_l}}{E} + \dots$$

виконується умова

$$\|A_{k_1 k_2 \dots k_l}^{-1}\| \geq \frac{1}{4n} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; k_l = 1, 2, \dots, n)$$

то він є абсолютно збіжним до цього розв'язку.

Застосуємо теорему (2) до неперервного дробу (13). Очевидно, що цей неперервний дріб буде абсолютно збіжним, якщо умова

$$\|(A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) \circ (A_h)^{-1} b\| \leq \frac{1}{4}. \quad (28)$$

виконується.

Підставляємо значення  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}, b$  у нерівність (12) і отримуємо достатню умову для збіжності періодичного ланцюгового дробу (10).

**Теорема 3.** Якщо для  $\|X\| \in (0, n)$  існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння, то його розвинення за ітераційною процедурою у МГЛД з елементами, що задовольняють умови

$$\|b_{k(s)}^{-1}\| < \frac{1}{\|A_{k(s)}\| \|C_{k(s)}\| + n} \quad (1 \leq k_s \leq n; s = 1, 2, 3, \dots), \quad (29)$$

збігається до цього розв'язку.

**Теорема 4.** Якщо для  $\|X\| \in (0, \sum_{k_1=1}^n \|A_{k_1}\| \|C_{k_1}\|)$  існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння, то розвинення його за ітераційною процедурою у МГЛД з елементами, що задовольняють умови

$$\|B_{k(s)}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \sum_{k_{s+1}=1}^n \|A_{k(s+1)}\| \|C_{k(s+1)}\|} \quad (s = 1, 2, 3, \dots), \quad (30)$$

збігається до цього розв'язку

Наведені ознаки збіжності вказують на можливість обчислювати  $X_m$  із заданою точністю  $\epsilon$  на основі перевірки нерівності

$$\|X_m - X_{m-1}\| \leq \epsilon,$$

якщо виконується одна із наведених достатніх ознак збіжності до розв'язку.

У цьому разі

$$\|X_m - X\| < \|X_m - X_{m-1}\|$$

а отже,  $X \subset (\|X_m - X_{m-1}\|)$ .

Слід зауважити, що на практиці ітераційні процеси обчислення  $X_k$  нерідко є збіжними за значно менш суворих умов. І наведені результати числових експериментів переконливо підтверджують цей факт.

## 5. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Запропонована схема була реалізована на мові *Python* за допомогою IDE *Py-Scripter*, що є зручним додатком з відкритим вихідним кодом. Для обчислення матриць  $A_h, A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_1 h_2}, A_{h_1 h_1} \cdot A_{h_2 h_2}$  в символьному виді використано бібліотеку *sympy*. Для числових обчислень застосовано засоби бібліотеки *numpy*. Вимірювання часу роботи проводилося елементами бібліотеки *time*. Щоб продемонструвати застосовність обчислювальної схеми та її ефективність, розглянемо наступні приклади:

**Приклад 1.** Розглянемо наступну систему поліноміальних рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y - 3x^2 - 4xy^2 + 3y^3 + 2xy - y^2 + 7x - 8y + 1 = 0; \\ 3x^4 - 4x^y + 3x^2 - 2xy^2 - 4y^3 + 3xy + 2y^2 - 9x + 6y + 2 = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Початкові наближення для системи (31) і у випадку схем 2-го і 3-го порядків, а також для методу Ньютона мають наступні значення:

- $x^{(0)} = -11.34$  and  $y^{(0)} = -2.47$ ;
- $h_x^{(0)} = 0.2$  and  $h_y^{(0)} = 0.2$ .

одержимо результати подані в таблиці 1.

Таблиця 1

Початкові наближення для системи (31)

| Ітр | Норма нев'язки<br>схеми Ньютона | $t_c$   | Норма нев'язки<br>схеми 2-го п-ку | $t_c$  | Норма нев'язки<br>схеми 3-го п-ку | $t_c$ |
|-----|---------------------------------|---------|-----------------------------------|--------|-----------------------------------|-------|
| 6   | 172.8878                        | 0.394 c | 38.50                             | 0.391c | 3.7380                            | 0.51c |
| 8   | 19.0642                         | 0.521 c | 1.826221                          | 0.536c | 0.0467456                         | 0.77c |
| 10  | 1.93790                         | 0.667 c | 0.0020                            | 0.681c | 0.0000015                         | 1.02c |
| 12  | 0.001837                        | 0.841 c | $8.0701 \cdot 10^{-10}$           | 0.86c  | $2.51 \cdot 10^{-15}$             | 1.36c |
| 13  | $2.35419 \cdot 10^{-7}$         | 0.931 c | $1.7763 \cdot 10^{-15}$           | 0.954c |                                   |       |
| 14  | $3.66205 \cdot 10^{-15}$        | 1.025 c |                                   |        |                                   |       |

Обчислено розв'язок  $x = -0.249649623132121$ ;  $y = 1.72403290850136$

**Приклад 2.** Розглянемо таку систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} tg(x)x^3 + 2x^2y - 3x^2 - 4xy^2 + 3y^3 + 2xy - y^2 + 7x - 8y + \sin(y) = 0 \\ e^x 3x^3 - 4x^2y + 3x^2 - 2xe^2 - 4y^3 + 3xy + 2y^2 - 9x + 6y + \cos(x) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Початкові наближення для системи (32) і у випадку схем 2-го і 3-го порядків, а також для методу Ньютона мають наступні значення:

- $x^{(0)} = -11.34$  and  $y^{(0)} = -2.47$ ;
- $h_x^{(0)} = 0.2$  and  $h_y^{(0)} = 0.2$ .

одержимо результати подані в таблиці 2.

Таблиця 2

Початкові наближення для системи (31)

| Ітр | Норма нев'язки<br>схеми Ньютона | час     | Норма нев'язки<br>схеми 2-го п-ку | час    | Норма нев'язки<br>схеми 3-го п-ку | Час    |
|-----|---------------------------------|---------|-----------------------------------|--------|-----------------------------------|--------|
| 4   | 9461.93                         | 0.407 с | 1545.0451                         | 0.411с | 4.0664818                         | 0.458с |
| 6   | 1140.731                        | 0.544 с | 2.608940                          | 0.565с | 0.000167                          | 0.671с |
| 8   | 0.962697                        | 0.721 с | $1.87238 \cdot 10^{-7}$           | 0.740с | $1.25643 \cdot 10^{-12}$          | 1.02с  |
| 10  | $1.2051 \cdot 10^{-12}$         | 0.894 с | $1.33293 \cdot 10^{-12}$          | 0.927с |                                   |        |

Обчислено розв'язок  $x = -12.6930546287040$ ;  $y = 0.914037338956290$

**Приклад 3.** Розглянемо наступну систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} e^x x^{-3} + 2.0x^2 y - 3.0x^2 - 4xy^2 + 3y^3 + 2xy - y^2 + 7x - 8y = 0; \\ 3.03\sin(x)x^{-4} - 4x^2 y + 3x^2 - 2xy^2 - 4y^3 + 3.0xy + 2.0e^2 - 9x + 6y + 2 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Початкові наближення для системи (33) у випадку схем 2-го і 3-го порядків, а також для методу Ньютона мають наступні значення:

- $x^{(0)} = -11.34$  and  $y^{(0)} = -2.47$ ;
- $h_x^{(0)} = 0.2$  and  $h_y^{(0)} = 0.2$ .

одержимо результати подані в таблиці 3.

Таблиця 3

Початкові наближення для системи (33)

| Ітр | Норма нев'язки<br>схеми Ньютона | $t_c$   | Норма нев'язки<br>схеми 2-го п-ку | $t_c$ | Норма нев'язки<br>схеми 3-го п-ку | $t_c$ |
|-----|---------------------------------|---------|-----------------------------------|-------|-----------------------------------|-------|
| 6   | 17.1279                         | 0.54 с  | 11.70                             | 0.54с | 1.373259                          | 0.65с |
| 8   | 0.94910                         | 0.716 с | 0.027605                          | 0.71с | 0.063617                          | 0.93с |
| 10  | 0.001062                        | 0.89 с  | 0.000001225                       | 0.91с | $7.83029 \cdot 10^{-7}$           | 1.25с |
| 12  | $1.1580 \cdot 10^{-14}$         | 1.12 с  | $6.601860 \cdot 10^{-15}$         | 1.10с | $3.552713 \cdot 10^{-15}$         | 1.62с |
| 13  | $2.2204 \cdot 10^{-15}$         | 1.19 с  |                                   |       |                                   |       |

Обчислено розв'язок  $x = -0.657148248817474$ ;  $y = -0.896195298565902$

Наведені приклади ілюструють ефективність схем 2-го і 3-го порядків у порівнянні з класичним методом Ньютона. Особливо на старті обчислювального процесу.

## 6. ВИСНОВКИ

У даній роботі розглядаються системи нелінійних рівнянь над полем дійсних чисел. Запропоновано схему розв'язання цих систем та отримано рекурентні співвідношення для знаходження їх наближених розв'язків. Досліджено збіжність неперервних дробів, що використовуються в розрахунковій схемі. Були проведені численні експерименти, що підтверджують застосовність і ефективність запропонованого підходу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bodnar D.I. *Vetvyashchiyesya tsepnyye drobi* / D.I. Bodnar. — K.: Naukova dumka, 1986. — 176 p.
2. Nedashkovska A.M. Iteratsiyni metod rozv'iazuvannia systemy polinomialnykh rivnian drugoho stepenia / A.M. Nedashkovska // *Fizyko-matematychne modeliuвання ta informatsiini tekhnolohii*. - 2015. — Vol. 21. — P. 150–161.
3. Недашковський М. О. Обчислення з матричними ланцюговими дробами. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2024. — 223 с.
4. Kelley C.T. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations* // C.T. Kelley. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. — 198 p.
5. Dehghan M. Modified iterative methods for solving nonlinear systems with applications in applied sciences // M. Dehghan, M. Hajarian, R. Mansouri // *Numerical Algorithms*. — 2021. — Vol. 86. — P. 1127–1153.
6. Celis O.S. Numerical Continued Fraction Interpolation / O.S. Celis // *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*. — 2024. — Vol. 76, № 4. — P. 568–580.

*Стаття: надійшла до редколегії 04.08.2025*

*доопрацьована 03.09.2025*

*прийнята до друку 17.09.2025*

## SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS WITH MATRIX CONTINUED FRACTIONS

**M. Nedashkovsky, A. Nedashkovska**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine,  
e-mail: [mykola.nedashkovsky@lnu.edu.ua](mailto:mykola.nedashkovsky@lnu.edu.ua),  
[anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua](mailto:anastasiya.nedashkovska@lnu.edu.ua)*

Continued fractions have long been recognized as a highly flexible and powerful tool in mathematical modeling, number theory, and numerical methods. They play an important role in the development of both fundamental and applied mathematics. Their use can be traced across a wide range of scientific and technical fields: from the construction of calendar systems and the development of approximation methods to sophisticated computational algorithms. In particular, continued fractions are applied in the creation of solar calendars, in proving the irrationality of numbers (indeed, it was through their use that the irrationality of certain values of the Riemann zeta function  $\zeta$  and the number  $\pi$  was established), in the Lanczos algorithm—widely used today for computing eigenvalues of large sparse matrices—as well as in certain factorization algorithms and cryptographic applications. Moreover, their properties are often found to be useful in constructing efficient approximation and interpolation methods, as well as in analyzing the convergence of series.

Special attention should be given to the application of continued fractions in solving systems of equations. Owing to their structure, they prove to be an effective and reliable tool of numerical analysis, combining implementation simplicity with high accuracy of results. This work focuses on systems of nonlinear equations, for which a relatively simple scheme, proposed earlier, is applied. The solution is expressed in the form of a matrix continued fraction, which makes it possible to generalize the approach to more complex problems and ensures the method's suitability for numerical implementation. In addition, a sufficient condition for the convergence of this method is formulated, which is essential for its practical applicability. Another advantage of these computational schemes is that they employ the second and third terms of the Taylor series for  $N$  variables and provide an expansion of the solution of the system into a matrix continued fraction.

The results of computational experiments with test problems confirm both the convergence and the efficiency of the proposed approach. Furthermore, the obtained data indicate the potential for extending the method's applicability to broader classes of nonlinear systems. Thus, the paper contributes not only to the advancement of the theoretical foundations of continued fractions but also to the improvement of methods in applied numerical analysis.

*Key words:* Iterative method, systems of nonlinear equations, continued fractions, matrix equations.