

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 519.6

<http://dx.doi.org/10.30970/vam.2024.33.12540>ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ
3-ГО ТА 4-ГО ПОРЯДКУ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ПОШУКУ
КРАТНИХ КОРЕНІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

С. Шахно, О. Подвірний, Б. Голуб

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна
e-mail: stepan.shakhno@lnu.edu.ua,
oleg.podvirnyy@lnu.edu.ua, bohdan.holub@lnu.edu.ua

Проведено аналіз ефективності методів третього та четвертого порядків збіжності для пошуку кратних коренів нелінійних рівнянь. Подано результати чисельних експериментів, які охоплюють порівняння кількості ітерацій, часу виконання та використання пам'яті. На підставі отриманих даних визначено переваги та недоліки кожного методу, а також надано практичні рекомендації щодо їх використання. Підтверджено, що методи третього порядку є ефективними для задач із обмеженими обчислювальними ресурсами, тоді як методи четвертого порядку забезпечують високу точність і швидкість збіжності, що робить їх придатними для задач із підвищеними вимогами до точності.

Ключові слова: кратні корені, нелінійні функції, чисельні методи, методи високого порядку збіжності.

1. ВСТУП

Актуальність задачі пошуку кратних коренів нелінійних рівнянь зумовлена їхнім широким застосуванням у різних галузях науки та техніки. Такі рівняння виникають, зокрема, у задачах моделювання фізичних процесів, інженерних розрахунках, обробці сигналів, оптимізації, а також у численних прикладних задачах з високою обчислювальною складністю.

Перші чисельні методи для розв'язання нелінійних рівнянь, такі як метод Ньютона (метод другого порядку), заклали основу для сучасних досліджень. Метод Ньютона демонструє квадратичну збіжність, однак його ефективність значно знижується у випадку кратних коренів, оскільки швидкість збіжності падає до лінійної. Цю проблему було частково вирішено в працях, зокрема шляхом модифікації методу Ньютона для врахування кратності коренів. Подальший розвиток методів привів до появи алгоритмів високого порядку збіжності, які ґрунтуються на розширенні базової схеми за допомогою похідних вищих порядків або корекційних схем.

Розглянемо задачу розв'язання нелінійного рівняння

$$f(x) = 0, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

де $f(x)$ – нелінійна функція, неперервна та диференційована достатню кількість разів. Особливий інтерес становлять випадки, коли рівняння має кратний корінь x^* , тобто корінь із кратністю $m > 1$, для якого виконується

$$f(x^*) = 0, \quad f'(x^*) = 0, \quad \dots, \quad f^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Методи високого порядку збіжності, зокрема методи третього та четвертого порядків, становлять перспективний напрям для швидшого та точнішого розв'язання рівнянь із кратними коренями. Такі методи базуються на використанні додаткової інформації про похідні функції і спеціальних корекційних схем, що дає змогу досягти вищої точності за меншої кількості ітерацій. Це особливо важливо у задачах, де ефективність і стійкість алгоритму мають критичне значення, наприклад, у задачах оптимізації або чисельного аналізу динамічних систем.

Мета нашої праці – детальний аналіз ефективності методів третього та четвертого порядків збіжності для пошуку кратних коренів нелінійних рівнянь. У межах дослідження проведено порівняння різних підходів за ключовими критеріями, такими як кількість ітерацій, обчислювальна складність і точність отриманих результатів. Це допомагає оцінити переваги та недоліки методів і надати практичні рекомендації щодо вибору оптимального підходу залежно від характеру задачі та наявних обчислювальних ресурсів.

2. МЕТОДИ 3-ГО ПОРЯДКУ

Методи 3-го порядку збіжності є чисельними ітераційними алгоритмами, що забезпечують кубічну залежність точності від кількості ітерацій. Вони базуються на трикроковій схемі корекцій, яка значно прискорює збіжність порівняно з методами 2-го порядку. Основною перевагою таких методів є їхня здатність ефективно знаходити корені нелінійних рівнянь навіть у випадках, коли класичні методи демонструють нестабільність або повільну збіжність.

Загальна структура методів 3-го порядку передбачає послідовне обчислення проміжних наближень із використанням значень функції та її похідних у різних точках. Це дає змогу зменшити кількість ітерацій для досягнення заданої точності та підвищити стабільність розв'язання.

Далі будуть розглянуті основні методи 3-го порядку, включно з їх формулами та особливостями реалізації.

Нехай $f(x)$ – це нелінійна функція, $f'(x)$ – її перша похідна, а $f''(x)$ – друга похідна, m – кратність кореня, x_n – поточне наближення кореня.

– Метод Донга (а) (1982) [1]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \sqrt{m} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^{1-m} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{cases} \quad (2)$$

– Метод Донга (б) (1982) [1]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k + \frac{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} f(y_k)}{f(y_k) - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-1} f(x_k)}. \end{cases} \quad (3)$$

– Метод Вікторії та Нета [2]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{f(x_k) + A f(y_k)}{f(x_k) + B f(y_k)}, \end{cases} \quad (4)$$

де $A = \mu^{2m} - \mu^{m+1}$ і $B = -\frac{\mu^m(m-2)(m-1)+1}{(m-1)^2}$, $\mu = \frac{m}{m-1}$.

– Метод Донга (1987) [3]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m+1} f'(y_k) + \frac{m-m^2-1}{(m-1)^2} f'(x_k)}. \end{cases} \quad (5)$$

– Метод Осада [4]:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2} m(m+1) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{1}{2} (m-1)^2 \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}. \quad (6)$$

– Метод Чуна та інших [5]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{m[(2\theta-1)m+3-2\theta]}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ + \frac{\theta(m-1)^2}{2} \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} - \frac{(1-\theta)m^2}{2} \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\theta = \frac{1}{2}, -1$, у розрахунках ми використовуємо значення $\theta = -1$.

– Метод Хомейєра [6]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{m}{m+1} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - m^2 \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m-1} \frac{f(x_k)}{f'(y_k)} + m(m-1) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases} \quad (8)$$

– Метод Хейдарі та інших [7]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \theta \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{\frac{m(\mu\theta-\theta+\mu)}{\theta(\mu-1)} f(x_k) - \frac{m\mu^{1-m}}{\theta(\mu-1)} f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad (9)$$

де $\mu = \frac{m-\theta}{m}$ і $\theta = \frac{2m}{m+2}$.

– Метод Чжоу та інших [8]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k + m(m-2) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - m(m-1) \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{cases} \quad (10)$$

– Метод Феррари [9]:

$$\begin{cases} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{\theta f(x_k)}{\theta f(x_k) - f(y_k)} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad (11)$$

де $\theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$.

3. МЕТОДИ 4-ГО ПОРЯДКУ

Методи 4-го порядку збіжності представляють подальший розвиток ітераційних чисельних алгоритмів, що забезпечують вищу точність і швидкість збіжності порівняно з методами 3-го порядку. Вони базуються на багатоточкових схемах, які залучають інформацію про значення функції та її похідних у кількох точках. Це дає змогу ефективно зменшити кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданого рівня точності, а також забезпечити стабільність навіть для задач із підвищеною складністю.

Головною особливістю методів 4-го порядку є використання додаткових корекційних членів, які враховують вплив похідних вищих порядків. Це дає змогу не лише досягти високої точності розв'язання, а й підвищити стійкість алгоритмів до невеликих змін у початкових умовах або властивостях функції. Завдяки цим перевагам методи 4-го порядку є універсальними й адаптивними, що робить їх придатними для широкого спектра задач у чисельному моделюванні, оптимізації та прикладній математиці.

Далі у цьому розділі детально розглянемо основні методи 4-го порядку, їхні формули та ключові аспекти реалізації, що допомагають зрозуміти їхню ефективність у різних умовах.

Нехай $f(x)$ – нелінійна функція, для якої шукається корінь, $f'(x)$ – її перша похідна, m – кратність кореня, x_n – поточне наближення кореня.

– Метод за Кунгом-Траубом [10]:

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} \left[\frac{m(m-2)\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n) - m^2 f'(x_n)}{f'(x_n) - \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n)} \right]. \end{cases} \quad (12)$$

– Метод Джарратта за Шармою [11]:

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{m}{8} \left\{ \left(m^3 - 4m + 8 \right) - (m+2)^2 \left(\frac{m}{m+2} \right)^m \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(2(m-1) - (m+2) \left(\frac{m}{m+2} \right)^m \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} \right) \right\} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases} \quad (13)$$

– Багатоточкові методи, запропоновані Лі у 2010 році.

Перший метод, запропонований Лі, виглядає так:

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \alpha_1 \frac{f(x_n)}{f'(y_n)} - \frac{f(x_n)}{\alpha_2 f'(x_n) + \alpha_3 f'(y_n)}, \end{cases} \quad (14)$$

де параметри α_1 , α_2 і α_3 обчислюють за формулами:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m}{m+2}\right)^m m (m^4 + 4m^3 - 16m - 16)}{m^3 - 4m + 8}, \\ \alpha_2 &= -\frac{(m^3 - 4m + 8)^2}{m (m^4 + 4m^3 - 4m^2 - 16m + 16) (m^2 + 2m - 4)}, \\ \alpha_3 &= \frac{m^2 (m^3 - 4m + 8)}{\left(\frac{m}{m+2}\right)^m (m^4 + 4m^3 - 4m^2 - 16m + 16) (m^2 + 2m - 4)}.\end{aligned}$$

Другий метод Лі виглядає так:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \alpha_4 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)}{\alpha_5 f'(x_n) + \alpha_6 f'(y_n)}, \end{cases} \quad (15)$$

де параметри α_4 , α_5 і α_6 визначають так:

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2}m^2 + m, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{m}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{m \left(\frac{m}{m+2}\right)^m}.$$

Методи Лі є вдосконаленням класичних методів другого і третього порядків та дають підстави зменшити кількість ітерацій, необхідних для досягнення необхідної точності, зберігаючи високу ефективність [12].

– Метод, запропонований Чжоу

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - Q\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases} \quad (16)$$

де $Q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ – вагова функція, яка залежить від співвідношення похідних у точках y_n і x_n [13].

Існує кілька можливих реалізацій вагових коефіцієнтів $Q(\cdot)$, що можуть бути використані для поліпшення збіжності методу Чжоу.

1. *Лінійна вагова функція*: $Q(z) = 1 + z$.

2. *Квадратична вагова функція*: $Q(z) = 1 + z + z^2$.

3. *Експоненціальна вагова функція*: $Q(z) = e^z$.

– Метод, запропонований Шаріфом:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n + \left(\frac{m(m^2+2m-4)}{4} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{m(m+2)^2}{4} \left(\frac{m}{m+2}\right)^m \frac{f(x_n)}{f'(y_n)} \right) \\ \cdot \left[G\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right) + H\left(\frac{f(x_n)}{f'(y_n)}\right) \right], \end{cases} \quad (17)$$

де G і H – допоміжні функції [14].

Варіанти функції G :

1. *Лінійна*: $G(z) = 1 + z$.

2. Експоненціальна: $G(z) = e^z$.

Варіанти функції H :

1. Обернена: $H(w) = \frac{1}{1+w}$.

2. Гіперболічна: $H(w) = \tanh(w)$.

– Об'єднання методів Чебишева та Шредера:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_n)((5m+2)b_1 f'(x_n) - (m+2)b_2 f'(y_n))}{4m\{f'(x_n)\}^2} + \right. \\ \left. + \frac{2mb_3 f(x_n)}{(m-2)f'(x_n)b_4 + (m+2)f'(y_n)} \right], \end{cases} \quad (18)$$

де b_1, b_2, b_3 і b_4 – вільні параметри [15].

Теорема 1 [15]. Нехай $x = r_m$ – нуль кратності m достатньо гладкої функції $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, визначеної на відкритому інтервалі D , що охоплює r_m . Тоді сім'я ітераційних методів, визначена (18), має збіжність четвертого порядку, якщо

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{m^2((m-2)^2 m^3 b_4^2 + 3\mu(m-2)m^2(m+2)^2 b_4 + 2\mu^2(m+2)^2(m^3 + 3m^2 + 2m - 4))}{\mu^2(m+2)^2(5m+2)}, \\ b_2 = -\frac{m^5((m-2)b_4 + \mu(m+2))}{\mu^2(m+2)^2}, \\ b_3 = \frac{((m^2 - 2m)b_4 + \mu(m+2)^2)^3}{8(\mu(m+2))^2}, \end{cases} \quad (19)$$

де b_4 є вільним параметром, відмінним від $\frac{\mu(m+2)^2}{m(2-m)}$.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Для оцінки ефективності методів 3-го та 4-го порядків збіжності було проведено серію чисельних експериментів. Програму для виконання експериментів реалізували мовою Python, що забезпечило зручність роботи з чисельними методами та можливість автоматизації обчислень. Усі розрахунки виконували з великою точністю, що допомогло уникнути помилок округлення у критичних обчисленнях.

Для отримання надійних результатів кожен експеримент виконували тричі, а час виконання та використання пам'яті обчислювали як середні значення з трьох запусків. Для забезпечення порівняності результатів встановили однакові параметри точності ($\epsilon = 10^{-12}$) та максимальної кількості ітерацій ($\text{max_iter} = 300$). Використовувані функції, кратність коренів m і початкові наближення x_0 наведені у табл. 1. Графічна інтерпретація функцій зображена на рис. 1. Це дає змогу об'єктивно оцінити ефективність методів у різних умовах.

Результати чисельних експериментів подано у двох таблицях, які відображають характеристики методів 3-го та 4-го порядків збіжності. Аналіз проводили за трьома основними критеріями:

- *кількість ітерацій* – середня кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності;
- *час виконання* – середній час, витрачений на ітераційний процес, виміряний у мікросекундах;
- *використання пам'яті* – обсяг пам'яті (у кБ), необхідний для реалізації методу.

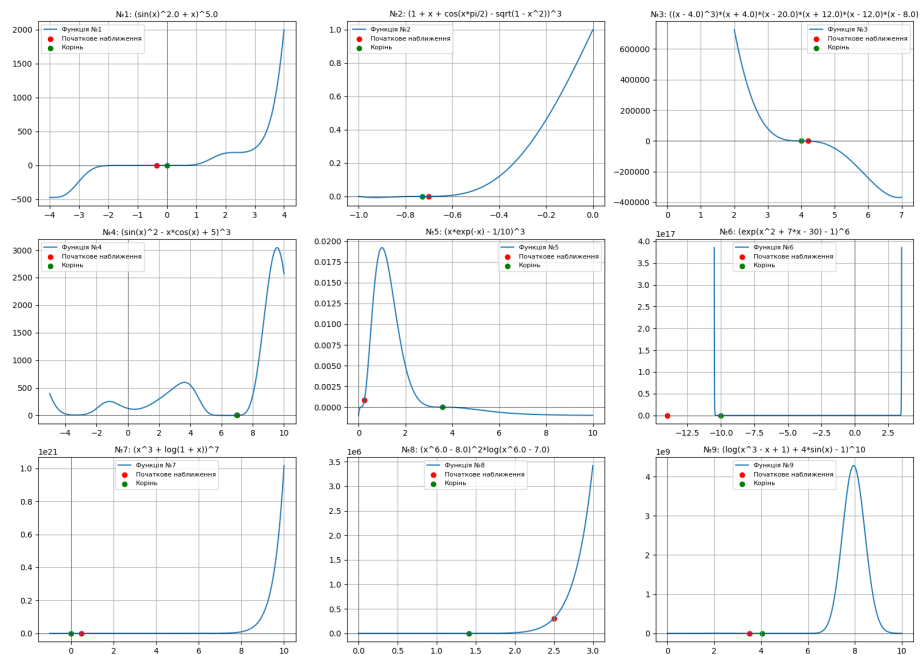


Рис. 1. Графічна інтерпретація функцій та їхніх параметрів для експериментів
Graphical interpretation of functions and their parameters for experiments

Таблиця 1

Функції та їх параметри для експериментів
Functions and their parameters for experiments

№	Функції $f(x)$	Кратність m	Початкове наближення x_0	Корінь x^*
1	$(\sin^2(x) + x)^5$	5	-0.34	0.0
2	$(1 + x + \cos(\frac{x\pi}{2}) - \sqrt{1 - x^2})^3$	3	-0.7	-0.7285840464448
3	$(x - 4)^3(x + 4)(x - 20)(x + 12) \cdot (x - 12)(x - 8)$	3	4.2	4.0
4	$(\sin^2(x) - x \cos(x) + 5)^3$	3	7.0	6.967322220401
5	$(x \exp(-x) - \frac{1}{10})^3$	3	0.25	3.57715206395
6	$(e^{x^2+7x-30} - 1)^6$	6	-14.0	-10.0
7	$(x^3 + \ln(1 + x))^7$	7	0.5	0.0
8	$(x^6 - 8)^2 \ln(x^6 - 7)$	2	2.5	1.414213562373
9	$(\ln(x^3 - x + 1) + 4 \sin x - 1)^{10}$	10	3.5	4.047094146319

У табл. 2 наведено результати чисельних експериментів для методів 3-го порядку, таких як методи Донга (2), (3), (4), Хомейера (8), Чуна (7) та ін. Дані свідчать, що ці методи забезпечують стабільну збіжність за невеликої кількості ітерацій (3-4 для більшості рівнянь) та є ефективними для задач із помірними вимогами до ресурсів.

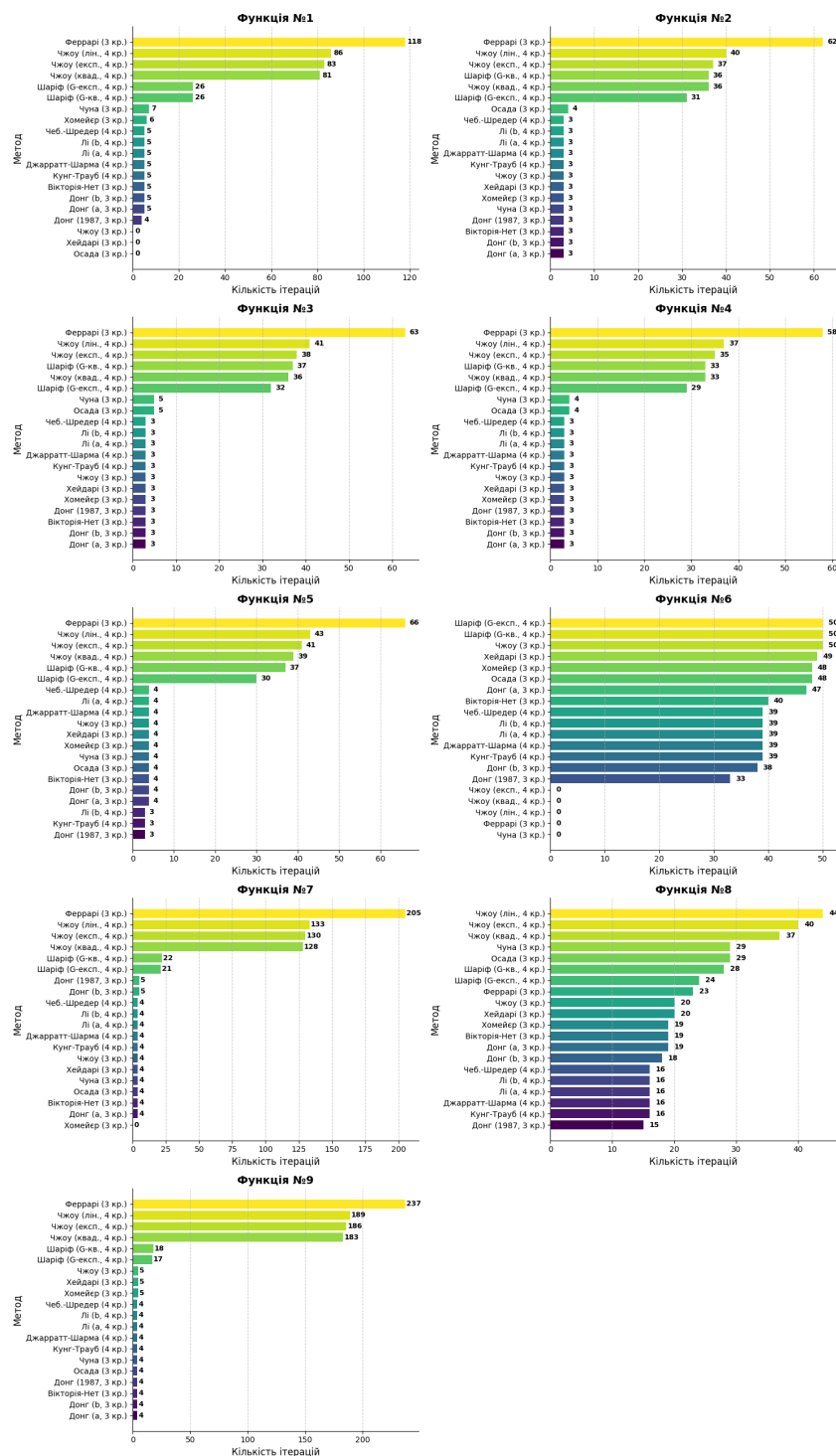


Рис. 2. Порівняння кількості ітерацій для 3-х і 4-х крокових методів на функ. з табл. 1
Comparison of the number of iterations for 3- and 4-step methods
on the function from the table 1

Таблиця 2

Результати порівняння методів 3-го порядку збіжності
Results of comparison of 3rd order convergence methods

Метод/Рівняння	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9
Кількість ітерацій									
Метод Донга (а) (1982) (2)	5	3	3	3	4	47	4	19	4
Метод Донга (б) (1982) (3)	5	3	3	3	4	38	5	18	4
Метод Вікторії та Нета (4)	5	3	3	3	4	40	4	19	4
Метод Донга (1987) (5)	4	3	3	3	3	33	5	15	4
Метод Осада (6)	-	4	5	4	4	48	4	29	4
Метод Чуна та ін. (7)	7	3	5	4	4	-	4	29	4
Метод Хомейера (8)	6	3	3	3	4	48	-	19	5
Метод Хейдарі та ін. (9)	-	3	3	3	4	49	4	20	5
Метод Чжоу та ін. (10)	-	3	3	3	4	50	4	20	5
Метод Феррари (11)	118	62	63	58	66	-	205	23	237
Час виконання (мс)									
Метод Донга (а) (1982) (2)	6.0088	4.8296	8.3806	5.4463	4.1876	69.5020	4.2701	26.9596	6.9834
Метод Донга (б) (1982) (3)	4.4910	4.0990	0.0395	4.0007	2.6363	45.0982	3.6610	20.7514	4.9233
Метод Вікторії та Нета (4)	5.9612	3.9994	0.0402	4.3206	3.3826	51.6782	2.8608	23.9763	5.0779
Метод Донга (1987) (5)	3.4990	4.1652	0.0428	3.6768	2.0352	33.9512	2.8668	35.8956	4.0471
Метод Осада (6)	-	8.6160	0.0971	8.6917	4.7514	90.6265	3.1297	45.2643	6.8759
Метод Чуна та ін. (7)	18.3377	8.5288	0.1343	12.7813	6.7977	-	4.4904	72.8524	10.2544
Метод Хомейера (8)	6.4359	4.4088	0.0538	5.2757	3.9961	80.2457	-	26.1065	6.7692
Метод Хейдарі та ін. (9)	-	4.3892	0.0539	5.1610	3.5044	75.7369	2.9738	26.2779	6.7878
Метод Чжоу та ін. (10)	-	5.3832	0.0953	6.0192	4.3493	92.9841	3.1978	29.8114	7.7914
Метод Феррари (11)	142.5822	110.0354	1.1501	122.0582	66.3913	-	180.9428	38.5284	390.0548
Макс. пам'ять (кБ)									
Метод Донга (а) (1982) (2)	19.1563	19.8516	13.4883	18.5156	16.3359	19.9863	22.1328	24.9766	25.6445
Метод Донга (б) (1982) (3)	2.8906	2.0273	0.1094	1.7891	1.9141	6.8887	3.7109	8.5850	3.5313
Метод Вікторії та Нета (4)	2.8438	2.3398	0.6250	2.1758	2.0859	3.3955	2.3750	7.6602	2.2070
Метод Донга (1987) (5)	3.5361	2.5146	0.6016	2.0391	1.9922	2.4746	2.3867	32.4414	2.5459
Метод Осада (6)	-	4.2041	0.9922	3.3867	3.3203	2.5430	2.6631	6.1191	2.8008
Метод Чуна та ін. (7)	126.1885	2.8330	0.6172	2.6494	2.5674	-	2.3594	9.4121	4.2471
Метод Хомейера (8)	1.2930	2.5547	0.6094	2.2891	1.9141	4.8652	-	4.0586	2.9961
Метод Хейдарі та ін. (9)	-	3.4053	0.6250	2.1855	2.1133	2.1699	2.0547	3.9980	3.3604
Метод Чжоу та ін. (10)	-	2.3486	0.6016	2.0430	2.0234	2.0010	1.9141	2.2148	4.8125
Метод Феррари (11)	28.7617	7.3623	18.6465	122.0449	7.1484	-	11.7393	3.7070	200.2529

Найшвидшими серед них є методи Донга (1987) (4) та Донга (б) (3), які демонструють найменший час виконання (3-6 мс для більшості рівнянь). Методи Чуна (7) та Осада (6), хоча й мають стабільну збіжність, фіксують значно більший час виконання, що обмежує їх використання в задачах із жорсткими вимогами до швидкості. Використання пам'яті для методів 3-го порядку залишається помірним (1-20 кБ), що робить їх придатними для обчислень із обмеженими ресурсами.

У табл. 3 подано результати для методів 4-го порядку, таких як методи Кунга-Трауба (12), Джарратта (13), Чжоу (16), Шаріфа (17) та ін. Ці методи забезпечують вищу точність і швидкість збіжності порівняно з методами 3-го порядку. Однак час виконання для більшості методів помітно більший (6-10 мс у середньому, до 231 мс для методів Чжоу (7)), а пам'ять, використана в обчисленнях, вища. Наприклад, метод Кунга-Трауба (12) надзвичайно ресурсоемним (до 14232 кБ). Водночас методи Джарратта (13) та Лі (14), (15) демонструють прийнятний баланс між швидкістю, точністю та пам'яттю, що робить їх оптимальними для задач із високими вимогами до точності та стабільності.

Можна порівняти графічно кількість ітерацій, необхідних для отримання розв'язку з заданою точністю, для методів 3-го і 4-го порядку. Як показано на графіках (рис. 2), методи 3-го порядку зазвичай потребують менше ітерацій для

Таблиця 3

Результати порівняння методів 4-го порядку збіжності
Results of comparison of 4th order convergence methods

Метод/Рівняння	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9
Кількість ітерацій									
Метод Кунг-Трауб (12)	5	3	3	3	3	39	4	16	4
Метод Джарратт-Шарма (13)	5	3	3	3	4	39	4	16	4
Метод Лі (а) (14)	5	3	3	3	4	39	4	16	4
Метод Лі (б) (15)	5	3	3	3	3	39	4	16	4
Метод Чжоу (лінійна вага) (16)	86	40	41	37	43	-	133	44	189
Метод Чжоу (квадратична вага) (16)	81	36	36	33	39	-	128	37	183
Метод Чжоу (експоненц. вага) (16)	83	37	38	35	41	-	130	40	186
Метод Шаріф (G-квадрат., H-логар.) (17)	26	36	37	33	37	50	22	28	18
Метод Шаріф (G-експон., H-гіпербол.) (17)	26	31	32	29	30	50	21	24	17
Метод Чебишев-Шредер (18)	5	3	3	3	4	39	4	16	4
Час виконання (мс)									
Метод Кунг-Трауб (12)	7.2767	6.8892	0.1031	7.9306	4.5639	82.6814	4.3383	27.3274	6.8187
Метод Джарратт-Шарма (13)	7.7274	5.6480	0.0960	7.2063	5.4503	82.6813	3.6638	28.3477	7.1914
Метод Лі (а) (14)	5.4871	4.4155	0.0760	5.4823	3.9999	67.0070	3.5696	20.9432	5.6012
Метод Лі (б) (15)	5.1958	4.2121	0.0760	5.5998	3.1266	65.1316	2.9633	20.5510	5.4837
Метод Чжоу (лінійна вага) (16)	92.7846	54.4267	0.7325	56.2857	33.6334	-	88.9495	53.9698	226.8782
Метод Чжоу (квадратична вага) (16)	93.5100	48.1643	1.0501	51.2464	30.4553	-	84.2358	47.3896	216.0078
Метод Чжоу (експоненц. вага) (16)	86.3507	49.6545	124.6928	53.0723	32.3282	-	84.0939	55.4760	222.8367
Метод Шаріф (G-квадрат., H-логар.) (17)	43.1191	76.2472	194.0541	76.6901	50.9849	115.8843	25.4963	137.3458	36.9278
Метод Шаріф (G-експон., H-гіпербол.) (17)	40.8858	64.3632	158.0896	64.6063	39.8114	112.7079	25.1973	114.8132	32.9687
Метод Чебишев-Шредер (18)	7.6432	6.1656	0.1493	7.1356	5.6181	80.0299	4.2818	29.8747	7.4803
Макс. пам'ять (кБ)									
Метод Кунг-Трауб (12)	1.2969	1.5195	0.1094	1.3828	4.4453	14232.0879	1.3789	2.3320	1.3828
Метод Джарратт-Шарма (13)	1.2969	2.0352	0.6172	1.8906	1.3672	1.2578	1.3867	2.7148	1.3906
Метод Лі (а) (14)	1.3008	1.5156	0.1641	1.3828	1.8828	1.7695	1.9063	2.2725	1.9023
Метод Лі (б) (15)	1.2969	2.0313	0.6797	1.9023	1.8789	1.7695	1.8672	1.6758	1.9023
Метод Чжоу (лінійна вага) (16)	1.2227	1.4521	0.1094	1.2813	1.2617	-	1.4893	7.6758	4.5742
Метод Чжоу (квадратична вага) (16)	1.2227	1.4180	0.1641	1.2773	1.2617	-	1.2891	3.0957	4.2539
Метод Чжоу (експоненц. вага) (16)	1.7500	1.4141	2.2246	1.8008	1.2617	-	1.3047	3.7852	3.0586
Метод Шаріф (G-квадрат., H-логар.) (17)	28.9375	16.5439	12.1836	15.5225	14.3320	8.8301	2.8486	5.9844	44.9844
Метод Шаріф (G-експон., H-гіпербол.) (17)	2.1133	2.8828	2.4492	2.0977	3.7344	3.6367	3.8516	10.6602	1.5469
Метод Чебишев-Шредер (18)	2.8477	2.7852	1.4844	2.7891	2.6406	2.6211	2.7969	3.9453	2.3281

більшості тестових прикладів (3-5 ітерацій), що свідчить про їх високу ефективність у задачах із помірними вимогами до точності. Для методів 4-го порядку, хоча й спостерігається швидший ріст точності, кількість ітерацій часто вища, особливо для

методів, таких як Чжоу, що потребують значно більше обчислень на кожному етапі, щоб досягти оптимального результату. Це особливо помітно на прикладі методів, що використовують експоненційні та квадратичні вагові функції, де кількість ітерацій може збільшуватись до 40–50. Це накладає додаткові вимоги на ресурси обчислень.

Отримані результати підтверджують важливість правильного вибору методу залежно від специфіки задачі:

- Методи 3-го порядку (зокрема, методи Донга (6) (3) та Вікторії та Нета (4)) доцільно застосовувати для задач із обмеженими обчислювальними ресурсами та невисокими вимогами до точності.
- Методи 4-го порядку, такі як методи Джарратта (13) та Лі (6) (15), ефективніші для задач із високими вимогами до точності, де ресурси пам'яті та часу не є критичним фактором. Методи Шаріфа (17) та Чжоу (16) демонструють значну кількість ітерацій для збіжності, що пов'язано з використанням вагових функцій. Основною проблемою цих методів є складність вибору відповідних вагових функцій, які суттєво впливають на швидкість збіжності.
- Методів, які споживають значні обчислювальні ресурси (наприклад, метод Кунга-Трауба (12)), варто уникати у задачах із обмеженими ресурсами.

Отже, вибір оптимального методу залежить від характеристик задачі та доступних ресурсів, що підтверджує важливість гнучкого підходу до вибору чисельних методів для задач із нелінійними рівняннями.

5. ВИСНОВКИ

Було проведено чисельний аналіз ефективності методів 3-го та 4-го порядків збіжності для розв'язання нелінійних рівнянь. Основні висновки ґрунтуються на аналізі кількості ітерацій, часу виконання та використання пам'яті.

Методи 3-го порядку:

- методи 3-го порядку демонструють високу ефективність для задач із помірними вимогами до точності та обчислювальних ресурсів. Вони стабільно збігаються за 3–4 ітерації для більшості рівнянь;
- час виконання методів варіюється в межах від 3 до 6 мс, з найшвидшими методами Донга (1987) (5) та Донга (6) (3), що забезпечують найменший час виконання для більшості задач;
- використання пам'яті є економічним (1–20 кБ), що робить ці методи придатними для задач із обмеженими ресурсами.

Методи 4-го порядку:

- методи 4-го порядку забезпечують вищу точність, однак потребують більше часу й обчислювальних ресурсів порівняно з методами 3-го порядку. Наприклад, методи Кунга-Трауба (12) та Джарратта (13) витрачають 6–10 мс на виконання, а методи Чжоу (16) можуть потребувати до 231 мс.;
- пам'ять, використана методами 4-го порядку, варіюється від помірної (1–10 кБ) до значної. Зокрема, метод Кунга-Трауба (12) надзвичайно ресурсоємний, використовуючи до 14232 кБ пам'яті;
- ці методи особливо ефективні для задач із високими вимогами до точності та стабільності, але мають високе споживання ресурсів.

Рекомендації:

- для задач із обмеженими ресурсами та невисокими вимогами до точності рекомендується використовувати методи Донга (6) (3) або Вікторії та Нета (4) з 3-го порядку;
- для задач із високими вимогами до точності та стабільності найбільш оптимальними є методи Джарратта (13) та Лі (6) (15) з 4-го порядку;
- варто уникати методів із надмірним споживанням пам'яті (наприклад, метод Кунга-Трауба (12)) у задачах з обмеженими обчислювальними ресурсами.

Отримані результати підтверджують важливість правильного вибору методу залежно від специфіки задачі. У майбутніх дослідженнях доцільно розширити аналіз, включивши задачі з різною кратністю коренів, а також адаптувати методи до задач високої розмірності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Dong C. A basic theorem of constructing an iterative formula of the higher order for computing multiple roots of an equation / C. Dong // *Math. Numer. Sin.* – 1982. – Т. 11. – С. 445–450.
2. Victory H.D. A higher order method for multiple zeros of nonlinear functions / H.D. Victory, B. Neta // *Int. J. Comput. Math.* – 1983. – Т. 12. – С. 329–335.
3. Dong C. A family of multipoint iterative functions for finding multiple roots of equations / C. Dong // *Int. J. Comput. Math.* – 1987. – Т. 21. – С. 363–367.
4. Osada N. An optimal multiple root-finding method of order three / N. Osada // *J. Comput. Appl. Math.* – 1994. – Т. 51. – С. 131–133.
5. Chun C. A third-order modification of Newton's method for multiple roots / C. Chun, B. Neta // *Appl. Math. Comput.* – 2009. – Т. 211. – С. 474–479.
6. Homeier H.H.H. On Newton-type methods for multiple roots with cubic convergence / H.H.H. Homeier // *J. Comput. Appl. Math.* – 2009. – Т. 231. – С. 249–254.
7. Heydari M. Convergence of a family of third-order methods free from second derivatives for finding multiple roots of nonlinear equations / M. Heydari, S.M. Hosseini, G.B. Loghmani // *World Appl. Sci. J.* – 2010. – Т. 11. – С. 507–512.
8. Zhou X. Families of third and fourth order methods for multiple roots of nonlinear equations / X. Zhou, X. Chen, Y. Song // *Appl. Math. Comput.* – 2013. – Т. 219. – С. 6030–6038.
9. Ferrara M. Computing multiple zeros by using a parameter in Newton-Secant method / M. Ferrara, S. Sharifi, M. Salimi // *SeMA J.* – 2017. – Т. 74. – С. 361–369.
10. Li S. A new fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations / S. Li, X. Liao, L. Cheng // *Appl. Math. Comput.* – 2009. – Т. 215. – С. 1288–1292.
11. Sharma J.R. Modified Jarratt method for computing multiple roots / J.R. Sharma, R. Sharma // *Appl. Math. Comput.* – 2010. – Т. 217. – С. 878–881.
12. Li S.G. Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots / S.G. Li, L.Z. Cheng, B. Neta // *Comput. Math. Appl.* – 2010. – Т. 59. – С. 126–135.
13. Zhou X. Constructing higher-order methods for obtaining the multiple roots of nonlinear equations / X. Zhou, X. Chen, Y. Song // *J. Comput. Math. Appl.* – 2011. – Т. 235. – С. 4199–4206.
14. Sharifi M. Finding the solution of nonlinear equations by a class of optimal methods / M. Sharifi, D.K.R. Babajee, F. Soleymani // *Comput. Math. Appl.* – 2012. – Т. 63. – С. 764–774.

15. Behl R. An optimal fourth-order family of methods for multiple roots and its dynamics / R. Behl, A. Cordero, S.S. Motsa, J.R. Torregrosa, V. Kanwar // Numer. Algor. – 2016. – Т. 71. – С. 775–796. – doi: 10.1007/s11075-015-0023-5.

*Стаття: надійшла до редколегії 10.10.2024
доопрацьована 25.10.2024
прийнята до друку 14.11.2024*

INVESTIGATION OF THE EFFICIENCY OF 3RD AND 4TH CONVERGENCE ORDER METHODS FOR FINDING MULTIPLE ROOTS OF NONLINEAR EQUATIONS

S. Shakhno, O. Podvirnyi, B. Holub

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: stepan.shakhno@lnu.edu.ua,
oleg.podvirnyy@lnu.edu.ua, bohdan.holub@lnu.edu.ua*

This paper investigates the efficiency of third- and fourth-order convergence methods for finding multiple roots of nonlinear equations. A series of numerical experiments was conducted, analyzing the number of iterations, execution time, and memory usage. The study highlights the advantages and limitations of each method and provides practical recommendations for their use. The results demonstrate that third-order methods are optimal for tasks with limited computational resources, while fourth-order methods achieve superior accuracy and convergence speed, particularly in problems with strict precision requirements. The findings lay a foundation for further exploration of high-order methods in numerical analysis and optimization.

Key words: multiple roots, nonlinear equations, numerical methods, high-order convergence methods.