СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 531.8 *http://dx.doi.org/10.30970/vam.2024.32.12435*

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДВОЛАНКОВОЮ МАНІПУЛЯЦІЙНОЮ СИСТЕМОЮ

М. Демидюк[1,2], В. Демидюк[2], П. Сеньо[2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3-Б, Львів, 79060, Україна*
e-mail: m_demydyuk@ukr.net,
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79000, Україна*
e-mail: petrosny@ukr.net

Досліджуємо задачу оптимального керування дволанковою маніпуляційною системою, що виконує транспортну операцію в горизонтальній площині. Система під дією керувань (моментів сил у шарнірах) переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве положення. Тривалість операції є заданою величиною, обмеження на керування та узагальнені координати системи не задаються. Якість процесу керування оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Побудовано розв'язок задачі, який ґрунтується на принципі максимуму Понтрягіна. Вихідну задачу оптимального керування зводимо до відповідної крайової задачі для системи восьми нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яку розв'язуємо методом стрільби в поєднанні з алгоритмами числового інтегрування та нелінійного програмування.

Ключові слова: дволанкова маніпуляційна система, оптимального керування, принцип максимуму Понтрягіна, метод стрільби, нелінійне програмування.

1. Вступ

Маніпуляційний робот – це складна мехатронна система, призначена для виконання різних технологічних операцій. Основними складниками таких роботів є маніпуляційна система (маніпулятор) і блок керування з функцією перепрограмування, що дає змогу оперативно налаштувати систему на виконання іншої операції. Водночас система не потребує змін у конструктивній схемі, змінюється тільки закон (режим) керування приводами [17]. Схематично маніпуляційна система є послідовністю ланок, головно розімкнутої кінематичної структури, зв'язаних між собою відповідними шарнірами (кінематичними парами). Перша ланка шарнірно зв'язана з нерухомою базою робота, на кінці останньої ланки розміщено робочий орган (захоплювач).

Рух маніпуляційної системи відбувається під дією активних приводів, які реалізують для кожного ступеня вільності відповідні закони керування. Тому вибір раціонального керування тут можна формалізувати у вигляді задачі оптимального керування з відповідним критерієм якості руху системи. Серед таких критеріїв найпоширенішим є продуктивність (час виконання операцій – швидкодія), точність виконання операцій (точність позиціювання), потужності приводів, витрати енергії на переміщення тощо.

© Демидюк М., Демидюк В., Сеньо П., 2024

Серед маніпуляційних систем чільне місце посідають дволанкові системи. Окрім свого самостійного значення (див., наприклад, маніпуляційні роботи типу SCARA [18, 25, 31], реальний прототип такого робота зображено на рис. 1 [23]) дволанкові системи є складовими частинами конструкцій багатьох роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок. Саме ці дві ланки виконують основний обсяг руху маніпуляційної системи під час операції. Тому дволанкові маніпуляційні системи вже тривалий час привертають увагу дослідників.

Рис. 1. Маніпуляційний робот типу SCARA
SCARA type manipulation robot

Задачі динаміки та оптимізації дволанкових маніпуляційних систем у різних формулюваннях досліджували, зокрема, у працях [1, 5, 6, 7, 18, 20, 21, 22, 24, 26]. У монографії [18] розглянули низку задача оптимального (за швидкодією) керування дволанковим маніпулятором. Аналогічну задачу про найшвидший поворот дволанкового маніпулятора дослідили також у [22]. У [1] розв'язали задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором із комбінованим функціоналом, у якому інтегральна частина (квадрати моментів сил у шарнірах) оцінює енерговитрати системи, термінальна частина – тривалість руху системи. Розв'язок побудували за умови, що центр маси другої ланки розміщений на осі другого шарніра, що спрощує рівняння руху маніпулятора.

У працях [5, 6, 20] для розв'язання задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором застосували метод параметричної оптимізації, в основі якого є параметризація узагальнених координат маніпулятора скінченним рядом за системою заданих функцій (класичних ортогональних поліномів, тригонометричних функцій), що зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Аналогічний параметричний підхід використали в [7] для розв'язання задачі сукупної оптимізації конструктивних параметрів і законів руху дволанкового маніпулятора з активними та пасивними (пружинно-демпферними) приводами. Багато задач оптимізації геометричних параметрів дволанкового маніпулятора розглянуто в [27]. Також тут запропоновано підхід, який полягає в заміщенні активних приводів маніпулятора пасивними та напівпасивними приводами, чисельно досліджено енергетичну ефективність такої заміни. Окремі алгоритми керування дволанковим маніпулятором із використанням ПІД-регуляторів описано в працях [21, 24]. Огляд низки публікацій з використання методики нечітких множин у задачах оптимального керування дволанковим маніпулятором наведено в [26].

Класичний підхід до розв'язання задач оптимального керування маніпуляційними системами – це використання алгоритмів, що ґрунтуються на принципі максимуму Понтрягіна [11]. Відомо, що застосування цього принципу зводить задачу оптимального керування до розв'язання двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Здебільшого такі крайові задачі є нелінійними, що зумовлено нелінійністю рівнянь руху маніпуляційної системи та взаємним впливом різних ступенів вільності. Тому для розв'язання отриманої крайової задачі використовують відповідні чисельні методи, зокрема метод стрільби [16, 30]. Монографія [29] присвячена різним методам розв'язання крайових задач, й основний наголос тут зроблено на метод стрільби та його модифікації.

Нижче досліджуємо задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором, який під дією активних керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію в горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве положення. Граничні (на початку й у кінці руху) положення вантажу задаємо значеннями кутових координат маніпулятора, якість руху системи оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Побудовано розв'язок задачі, в основі якого є принцип максимуму Понтрягіна. Вихідну задачу оптимального керування зводимо до відповідної крайової задачі для системи восьми нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку (чотири рівняння для основних змінних і чотири рівняння для спряжених змінних) із заданими граничними умовами для основних змінних. Крайову задачу розв'язуємо методом стрільби: вводимо початкові значення спряжених змінних, які визначаємо за допомогою мінімізації відповідної квадратичної нев'язки, що оцінює відхилення розрахованих термінальних значень основних змінних від їхніх заданих значень. Для мінімізації нев'язки використовуємо ітераційні методи нелінійного програмування, для розв'язання отриманої задачі Коші – алгоритми чисельного інтегрування.

Актуальність запропонованого дослідження зумовлена постійною потребою в удосконаленні існуючих і розробленні нових (раціональних) режимів керування для маніпуляційних систем. Очевидно, що такі розробки передбачають наявність відповідного алгоритмічно-програмного забезпечення. Ефективним тут є використання засобів математичного моделювання, теорії оптимізації та сучасних інформаційних технологій.

2. Математична модель і формулювання задачі

Розглянемо дволанковий маніпулятор, який виконує плоскопаралельний рух у горизонтальній площині O_1XY. Механічна модель маніпулятора схематично зображена на рис. 2. Маніпулятор складається з двох твердих тіл (ланок) G_1 і G_2, з'єднаних між собою циліндричним шарніром O_2. Перша ланка G_1 за допомогою циліндричного шарніра O_1 зв'язана з нерухомою основою. Осі шарнірів O_1, O_2 ортогональні площині руху O_1XY. На кінці другої ланки G_2 розташовані захоплювач з вантажем. Усі шарніри системи вважаємо ідеальними. Також, з огляду на дослідження транспортних операцій маніпуляційної системи, де основний обсяг руху виконують ланки G_1 і G_2, лінійними розмірами захоплювача (з вантажем) знехтуємо, вважаючи, що їхня маса зосереджена в точці B [5, 6, 20].

Введемо узагальнені координати та керування маніпуляційної системи: $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – кути повороту ланок G_1 і G_2 стосовно осі O_1X; $u_1(t)$, $u_2(t)$ – моменти сил (прикладених до ланок G_1, G_2) стосовно осей шарнірів O_1, O_2, відповідно.

Тоді рівняння руху маніпулятора можна подати у вигляді такої системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} K_a\ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta}\cos(\alpha-\beta) + \dot{\beta}^2\sin(\alpha-\beta)] = u_1 - u_2, \\ K_b\ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\beta)] = u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

де позначено: $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |O_1O_2|$, $b = |O_2B|$ – довжини ланок G_1 і G_2, J_a, J_b – моменти інерції ланок G_1, G_2 стосовно осей шарнірів O_1, O_2, відповідно, m_b, r – маса ланки G_2 та відстань від її центра маси до шарніра O_2, m – маса захоплювача (з вантажем). Крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t. Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, які описують рух дволанкового маніпулятора під дією керувань u_1, u_2 [18].

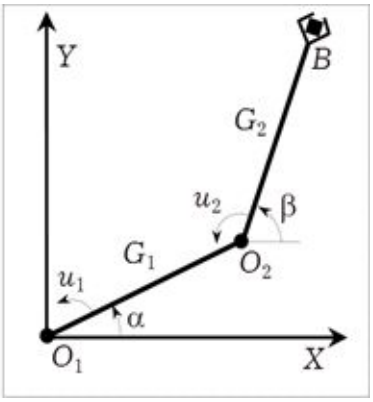

Рис. 2. Кінематична схема дволанкового маніпулятора
Kinematic diagram of a two-link manipulator

Серед технологічних операцій, що виконуються маніпуляційними роботами, поширеною є транспортна операція, яка полягає в перенесенні вантажу із заданого початкового положення в задане кінцеве положення [5, 6, 20]. Тривалість операції здебільшого задається заздалегідь, що регламентується умовами виробництва. Також швидкість вантажу в початковому та кінцевому положеннях зазвичай дорівнює нулю (стан спокою). В окремих випадках ця швидкість може бути відмінною від нуля, наприклад, коли вантаж захоплюється на рухомій стрічці конвеєра. Також для таких операцій закон руху вантажу головно не задається. Водночас на рух вантажу можуть накладатися додаткові вимогами, наприклад, енергоощадливе переміщення маніпуляційної системи.

Нехай задано транспортну операцію в термінах узагальнених координат досліджуваного маніпулятора

$$\begin{aligned} \alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0, \\ \alpha(0) = \alpha_T, \beta(0) = \beta_T, \dot{\alpha}(T) = \dot{\beta}(T) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

де α_0, α_T, β_0, β_T, T – задані сталі параметри транспортної операції. Тут вважаємо, що маніпуляційна система в граничні моменти часу $t = 0$, $t = T$ перебуває в стані спокою. Зауважимо, що положення вантажу (точки B) може задаватися значеннями

його лінійних координат в інерціальній системі відліку O_1XY та відповідними значеннями узагальнених координат маніпуляційної системи. У першому випадку для розрахунку узагальнених координат маніпулятора потрібно розв'язати пряму задачу кінематики, що може зумовити певні труднощі, особливо коли кінематична структура системи характеризується надлишковістю [18, 20]. У другому випадку лінійні координати вантажу знаходимо у вигляді розв'язку оберненої задачі кінематики.

Сформулюємо таку задачу оптимального керування [5, 20]. *Задача 1.* Знайти керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0,\ T]$, які забезпечать виконання маніпулятором транспортної операції (2) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)]dt. \tag{3}$$

Квадратичний функціонал вигляду (3) часто використовують у задачах оптимального керування маніпуляційними системами [1, 5, 6, 17, 18, 20]. Мінімізація цього функціонала дає змогу знизити пороговий рівень керувань, зменшивши енерговитрати на переміщення системи. У разі, коли керування маніпулятором відбувається за допомогою електроприводів, функціонал (3) виражає (за певних припущень) сумарну кількість тепла, що виділяється в обмотках електродвигунів. І відповідно, доречним є пошук таких керувань, за яких втрати тепла будуть мінімальними.

Зауважимо, що у сформульованій задачі обмеження на керування не накладали. Це частково пояснюється бажанням коректно порівняти оптимальний динамічний процес, побудований нижче, із субоптимальним процесом, отриманим для дволанкового маніпулятора методом параметричної оптимізації [20]. Також за відсутності зазначених обмежень суттєво спрощується алгоритм побудови розв'язку *задачі 1.*

3. Алгоритм розв'язання задачі оптимального керування

Побудуємо розв'язок сформульованої задачі, використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [11]. Для цього зробимо перетворення системи рівнянь (1), ввівши нові змінні $x_1 = \alpha(t)$, $x_2 = \dot{\alpha}(t)$, $x_3 = \beta(t)$, $x_4 = \dot{\beta}(t)$. Тоді в нових змінних рівняння руху дволанкового маніпулятора можна записати у вигляді такої системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = \frac{1}{g}[K_b u_1 - (K_b + Kf_1)u_2 - KK_b f_2 x_4^2 - K^2 f_1 f_2 x_2^2], \\
\dot{x}_3 = x_4, \\
\dot{x}_4 = -\frac{1}{g}[Kf_1 u_1 - (K_a + Kf_1)u_2 - KK_b f_2 x_2^2 - K^2 f_1 f_2 x_4^2],
\end{gathered} \tag{4}$$

де $f_1 = \cos(x_1 - x_3)$, $f_2 = \sin(x_1 - x_3)$, $f_3 = f_1^2 - f_2^2$, $g = K_a K_b - K^2 f_1^2$.

Граничні умови транспортної операції (2) у нових змінних набудуть вигляду

$$x_1(0) = \alpha_0, x_2(0) = 0, x_3(0) = \beta_0, x_4(0) = 0, \tag{5}$$

$$x_1(T) = \alpha_T, x_2(T) = 0, x_3(T) = \beta_T, x_4(T) = 0. \tag{6}$$

Відповідно до процедури принципу максимуму запишемо функцію Гамільтона

$$\begin{aligned} H = &-(u_1^2+u_2^2)+ \\ &+\psi_1 x_2+\psi_2\frac{1}{g}[K_b u_1-(K_b+Kf_1)u_2-KK_b f_2 x_4^2-K^2 f_1 f_2 x_2^2]\ + \\ &+\ \psi_3 x_4-\psi_4\frac{1}{g}[Kf_1 u_1-(K_a+Kf_1)u_2-KK_b f_2 x_2^2-K^2 f_1 f_2 x_4^2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi_4(t)$ – спряжені змінні, які повинні задовольняти системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{(gz_1+z_3)}{g^2}\psi_2-\frac{(gz_2+z_4)}{g^2}\psi_4, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1+\frac{2Kf_2x_2}{g}\left(Kf_1\psi_2-K_a\psi_4\right), \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_1, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_3+\frac{2Kf_2x_4}{g}\left(K_b\psi_2-Kf_1\psi_4\right), \end{aligned} \tag{8}$$

де позначено

$$z_1=-K(Kf_3x_2^2+K_bf_1x_4^2-f_2u_2),\, z_2=K[K_af_1x_2^2+Kf_3x_4^2+f_2(u_1-u_2)],$$

$$z_3=2K^2f_1f_2[Kf_2(K_ax_2^2+Kf_1x_4^2)-Kf_1u_1+(K_a+Kf_1)u_2],$$

$$z_4=2K^2f_1f_2[Kf_2(f_1x_2^2+K_bx_4^2)-K_bu_1+(K_b+Kf_1)u_2].$$

У виразі для функції Гамільтона (7) прийняли $\psi_0(t)\equiv -1$, $t\in[0,\ T]$ [11]. Систему рівнянь (8) отримали диференціюванням функції Гамільтона за основними змінними $\{x_i\}_{i=1}^4$: $\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,\,4}$. Аналогічно можна записати для рівнянь (4): $\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial \psi_i}$, $i=\overline{1,\,4}$.

Згідно з принципом максимуму оптимальні керування u_1^*, u_2^* повинні доставляти функції Гамільтона максимум за значеннями $u_1(t)$, $u_2(t)$ для будь-якого $t\in[0,\ T]$). Використовуючи умови стаціонарності $\frac{\partial H}{\partial u_1}=0$, $\frac{\partial H}{\partial u_2}=0$, отримуємо вирази для шуканих оптимальних керувань

$$u_1^*=\frac{1}{2g}\left(K_b\psi_2-Kf_1\psi_4\right),\ u_2^*=-\,u_1^*-\frac{1}{2g}\left(Kf_1\psi_2-K_a\psi_4\right). \tag{9}$$

Як бачимо зі співвідношень (8), (9), оптимальні керування u_1^*, u_2^* залежать від основних і спряжених змінних. Тобто для остаточного розрахунку $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t\in[0,\ T]$ потрібно розв'язати двоточкову крайову задачу, що складається з системи диференціальних рівнянь (4), (8) і граничних умов (5), (6). Одним із результативних підходів до побудови розв'язку такої задачі є використання методу стрільби [8, 9]. Суть цього методу полягає в заміні кінцевих умов для основних змінних (6) початковими умовами для спряжених змінних

$$\psi_1(0)=c_1,\psi_2(0)=c_2,\psi_3(0)=c_3,\psi_4(0)=c_4, \tag{10}$$

які разом з початковими умовами (5) приводять до задачі Коші (4), (8). Очевидно, що розв'язок її залежить від введених параметрів $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$. Ефективним прийомом у пошуку цих параметрів, як ппідтвердили числові експерименти, є мінімізація функції (нев'язки) $\Lambda(c) \equiv [x_1(T) - \alpha_T]^2 + x_2^2(T) + [x_3(T) - \beta_T]^2 + x_4^2(T)$

$$\Lambda(\mathbf{c}) \underset{\mathbf{c}}{\to} \min, \tag{11}$$

де значення $\{x_i(T)\}_{i=1}^4$ знаходимо, розв'язуючи задачу Коші (4), (5), (8), (10), функція Λ оцінює відхилення розрахованих $\{x_i(T)\}_{i=1}^4$ від їх заданих за умовами (6) значень.

Для мінімізації нев'язки (11) використовуємо ітераційні алгоритми нелінійного програмування [2, 4], ефективність яких залежить від початкового (стартового) значення вектора параметрів $\mathbf{c}^0$. Продуктивним тут також видається використання методів мінімізації функцій із високим порядком збіжності [3, 15], новітнього евристичного алгоритму Jaya [28]. Добавимо, що перспективним у дослідженні задач оптимального керування маніпуляційними системами може бути застосування алгоритмів інтервальної математики [12, 13] та паралельних обчислень [10, 32].

Описаний алгоритм розв'язання *задачі 1* реалізовано у вигляді комп'ютерної програми (в інтегрованому програмному середовищі MS Visual C# 2012 [19]), з допомогою якої проведено серію числових розрахунків з моделювання оптимального динамічного процесу дволанкового маніпулятора.

4. Числове моделювання оптимального процесу

Наведемо окремі числові результати розв'язання *задачі 1*, отримані з допомогою розробленого алгоритму. Параметри дволанкового маніпулятора та транспортної операції задавали рівними значенням, які використовували в працях [5, 20]. Розглядали маніпулятор, ланки якого мають: кільцевий поперечний переріз зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м^3, $a = 0.8$ м, $b = 0.6$ м, $r = 0.3$ м. Транспортна операція визначалась параметрами: $\alpha_0 = 2.214$, $\alpha_T = 1.407$, $\beta_0 = 0.644$, $\beta_T = -0.321$, $T = 6$ с, $m = 8$ кг.

Обчислення проводили на комп'ютері з процесором Intel Core i7-3630QM (2.4 ГГц) та оперативною пам'яттю 8 Гб. Для мінімізації нев'язки $\Lambda(\mathbf{c})$ використовували метод циклічного покоординатного спуску [2, 4] з початковим значенням вектора шуканих параметрів $\mathbf{c}^0$=0. Точність за оптимізаційними параметрами та значенням нев'язки $\Lambda(\mathbf{c})$ відповідно становила 10^{-4} та 10^{-8}. Отриману (на кожній ітерації покоординатного спуску) задачу Коші (4), (5), (8), (10) наближено розв'язували методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності [14].

Внаслідок мінімізації нев'язки (11) отримали мінімальне значення функціонала (3) $E^* = 4.329$, тривалість обчислень становила 139 с. Отримані оптимальні кінематичні та динамічні характеристики показані (у вигляді скріншотів) на рис. 3 – рис. 6. Тут час t виражено в секундах, кути α, β – в радіанах (рад), кутові швидкості $\dot\alpha$, $\dot\beta$ – в рад/с, моменти u_1, u_2 – в Нм. На рис. 3 зображено кінограму руху маніпулятора, точка P0 відповідає початковому положенню захоплювача, точка P1 – кінцевому положенню. Тут положення P0, P1 легко розраховуються за заданими значеннями параметрів транспортної операції (2). На рис. 4 показано графіки (залежності від часу t) побудованих оптимальних керувань $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$. Відповідні кутові характеристики оптимального руху маніпулятора зображено на рис. 5, 6. Як бачимо, побудований оптимальний закон руху маніпулятора задовольняє умови

транспортної операції (2) і є безреверсним. Кутові швидкості ланок на початку та в кінці руху маніпулятора дорівнюють нулю.

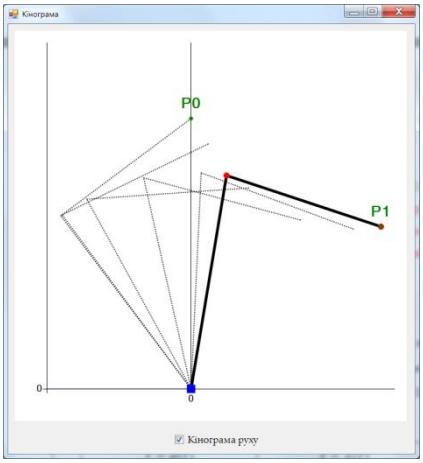

Рис. 3. Кінограма оптимального руху маніпулятора
Cinematography of optimal manipulator movement

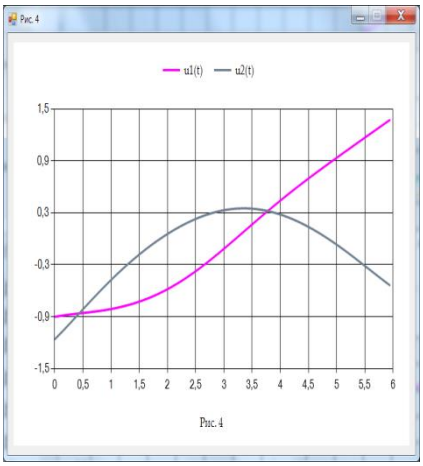

Рис. 4. Оптимальні керування маніпулятора
Optimal manipulator controls

Наведемо результати порівняльного аналізу отриманих оптимальних характеристик дволанкового маніпулятора з відповідними субоптимальними характеристиками, побудованими методом параметричної оптимізації (з використанням тригонометричних рядів) у праці [20]. Для порівняння використали методику середньоквадратичного відхилення, згідно з якою різницю (відмінність) $V[\omega]$ між двома функціями $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, отриманими для характеристики ω зазначеними методами, обчислювали за формулами

$$V[\omega] \equiv \frac{\sigma}{s}100\ (\%),\ \sigma^2 = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{2}[\bar{\omega}(t) - \omega_k(t)]^2 dt,$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\omega_k(t),\ s^2 = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{2}\omega_k^2(t)dt,$$

де σ – середнє квадратичне відхилення; s – усереднена величина характеристики ω. Після обчислень остаточно отримали

$$V[\alpha,\ \dot{\alpha},\ \ddot{\alpha},\ \beta,\ \dot{\beta},\ \ddot{\beta},\ u_1,\ u_2] = [0.01, 0.14, 0.77, 0.05, 0.11, 0.96, 0.28, 1.21](\%),$$

що свідчить про практично повний (у межах прийнятної точності) збіг оптимальних динамічних процесів, побудованих методом на основі принципу максимуму Понтрягіна та методом параметричної оптимізації [20].

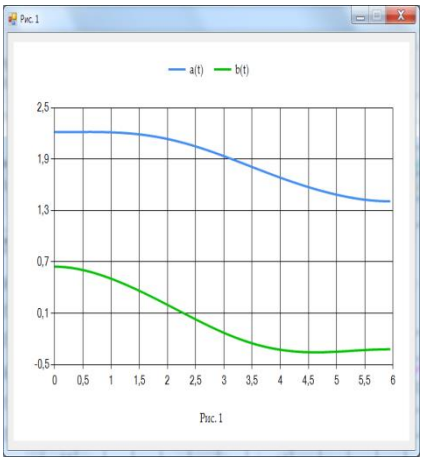

Рис. 5. Кути повороту ланок маніпулятора
Rotation angles of manipulator links

5. Висновок

Для дволанкової маніпуляційної системи, що виконує задану транспортну операцію в горизонтальній площині, розроблено алгоритм розрахунку оптимальних (в сенсі енерговитрат) кінематичних і динамічних характеристик. Алгоритм ґрунтується на принципі максимуму Понтрягіна та розв'язанні відповідної двоточкової крайової задачі. Наближений розв'язок отриманої крайової задачі побудовано методом стрільби з використанням числових процедур нелінійного програмування та числового інтегрування. Алгоритм реалізовано у вигляді комп'ютерної програми, яка дає змогу для різних параметрів транспортної операції та конструктивних параметрів дволанкового маніпулятора розрахувати оптимальні кінематичні та динамічні характеристики. Проведено порівняльний числовий аналіз оптимального динамічного процесу з субоптимальним процесом, побудованим для дволанкового

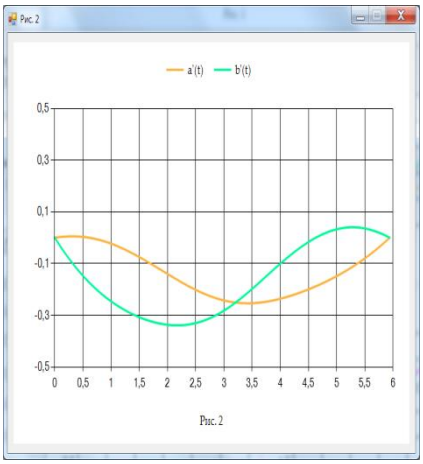

Рис. 6. Кутові швидкості ланок маніпулятора
Angular velocities of manipulator links

маніпулятора методом параметричної оптимізації, який засвідчив їх практично повний збіг.

Список використаної літератури

1. Аветисян В.В. Оптимизация конфигураций и направлений поворотов звеньев двузвенного манипулятора по комбинированным критериям качества / В.В. Аветисян // Изв. НАН Армении. Механика. – 1998. – Т. 51, № 4. – С. 65–71.
2. Бартіш М. Методи оптимізації. Теорія і алгоритми / М. Бартіш. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 223 с.
3. Бартіш М. Трикроковий ітераційний метод мінімізації функцій з кубічним порядком збіжності / Бартіш М., Огородник Н. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2013. – Вип. 20. – С. 3–9.
4. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: Навч. посібник. / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний. – Рівне: НУВГП, 2011. – 624 с.
5. Демидюк М.В. Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів / М.В. Демидюк, Н.В. Гошовська // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 168–175.
6. Демидюк М.В. Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора / М.В. Демидюк, В.М. Демидюк // Вісник Харківського національного ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2020. – Вип. 48. – С. 36–48.
7. Демидюк М.В. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами / М.В. Демидюк, М.І. Ширко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 2. – С. 41–48.
8. Маринець В.В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навч. посіб. / В.В. Маринець, В.Л. Рего, К.В. Маринець. – Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла", 2013. – 196 с.
9. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. / Н.Н. Моисеев. – Москва: Наука, 1971. – 424 с.

10. Поліщук О.Д. Організація паралельних обчислень для локального оцінювання якості функціонування складних систем / О.Д. Поліщук, М.І. Тютюнник, М.С. Яджак // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32 (108). – С. 119–124.
11. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко Москва: Наука, 1976. – 392 с.
12. Сеньо П.С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления / П.С. Сеньо // Динамические системы. – Вып. 18. – 2004. – С. 44–50.
13. Сеньо П.С. Інтервальні методи з локалізацією функціональних невизначиностей для розв'язування варіаційних задач / П.С. Сеньо, А.В. Мельничин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2021. – Вип. 29. – С. 175–186.
14. Цегелик Г.Г. Чисельні методи: Підручник. / Г.Г. Цегелик. – Львів: Видав. центр Львів. національного ун-ту імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
15. Argyros I.K. Two-step solver for nonlinear equations / I.K. Argyros, S. Shakhno, H. Yarmola // Symmetry. – 2019. – Vol. 11, Is. 2. – P. 128.
16. Attili B.S. Efficient Shooting Method for Solving Two Point Boundary Value Problems / B.S. Attili, M.I. Syam // Chaos, Solitons & Fractals. – 2008. – Vol. 35. – P. 895–903.
17. Attili B.S. Optimization of manipulation robot control / B.S. Attili, M.I. Syam // Sov. J. Comput. Systems Sci. – 1990. – Vol. 28, № 5. – P. 127–169.
18. Chernousko F.L. Manipulation Robots: Dynamics, Control, and Optimization / F.L. Chernousko, N.N. Bolotnik, V.G. Gradetsky. – CRC Press, 1993. – 288 p.
19. Deitel P. Visual C# 2012: How to Program, 5-th Ed. Pearson / P. Deitel, H. Deitel. – 2013. – 1020 p.
20. Demydyuk M.V. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator / M.V. Demydyuk, N.V. Hoshovs'ka // J. of Math. Sciences. – 2019. – Vol. 238, Is. 2. – P. 174–88.
21. Fani D. Two-link Robot Manipulator using Fractional Order PID Controllers Optimized by Evolutionary Algorithms / D. Fani, E. Shahraki // Biosciences Biotechnology Research Asia. – 2016. – Vol. 13, № 1. – P. 589–598.
22. Formal'skii A.M. The time-optimal control of the bending of a plane two-link mechanism / A.M. Formal'skii // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 1996. – Vol. 60, Is. 2. – P. 243–251.
23. Epson G10 Series Manuals. [Online]. Available: https://www.manualslib.com/products/Epson-G10-Series-1824150.html
24. Khatri M. Trajectory control of two link robotic manipulator using PID / M. Khatri, P. Khatri // Golden Research Thoughts. – 2013. – Vol. 3, Is. 5. – P. 1–7.
25. Lewis F.L. Control of Robot Manipulators: Theory and Practice (second edition, revised and expanded) / F.L. Lewis, C.T. Abdallah, D.M. Dawson. – Marcel Dekker, Inc., New-York, U.S.A., 2006. – 614 p.
26. Lochan K. Control of two-link 2-dof robot manipulator using fuzzy logic techniques: a review / K. Lochan, B.K. Roy // In Proc. Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2014). – 2015. – Springer. – Vol. 1. – P. 499–511.
27. Polishchuk O. Control Processes Optimization for Mechanical Systems with Active, Semi-Passive and Passive Actuators / O. Polishchuk // Applied Mathematics and Physics. – 2013. – Vol. 1, № 4. – P. 147–150.
28. Rao R.V. Jaya: a simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems / R.V. Rao // Int. J. of Industrial Engineering Computations. – 2016. – Vol. 7, Is. 1. – P. 19–34.
29. Roberts S.M. Two-point boundary value problems: shooting methods / S.M. Roberts, J.S. Shipman. – New-York: Elsevier, 1972.

30. Sahu K.S. Combining the Shooting Method with an Operational Matrix Method to Solve Two Point Boundary Value Problems / K.S. Sahu, M.K. Jena // Int. J. Appl. Comput. Math. – 2021. – Vol. 7, № 29.
31. Subhashini P.V.S. Modelling, simulation and analysis of a SCARA Robot for deburring of circular components / P.V.S. Subhashini, N.V.S. Raju, G.V. Rao // ARPN J. of Engineering and Applied Sciences. – 2014. – Vol. 9, № 4. – P. 398–404.
32. Yadzhak M.S. Parallel algorithms for data digital filtering / M.S. Yadzhak // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – Vol. 59, Is. 1. – P. 39–48.

Стаття: надійшла до редколегії 28.10.2024
доопрацьована 07.11.2024
прийнята до друку 14.10.2024

OPTIMAL CONTROL OF THE TWO-LINK MANIPULATION SYSTEM

M. Demydyuk[1,2], V. Demydiuk[2], P. Senio[2]

[1] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3-B, Naukova str., 79060, L'viv, Ukraine*
e-mail: m_demydyuk@ukr.net,
[2] *Ivan Franko National University of Lviv, 1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine*
e-mail: petrosny@ukr.net

We investigate the problem of optimal control of a two-link manipulation system that performs a transportation operation in the horizontal plane. The system, under the influence of controls (torque moments at the joints), moves the load from a specified initial position to a specified final position. The initial and terminal positions of the load are determined by the respective values of the manipulator's angular coordinates. The time duration of the transportation operation is a specified value, while no explicit constraints are imposed on either the control or the angular characteristics of the manipulator. The quality of the system's motion is evaluated by the quadratic (with respect to the controls) functional. A solution to the problem is constructed based on the Pontryagin maximum principle. The original optimal control problem is transformed into the corresponding boundary value problem for a system of eight first-order nonlinear differential equations (four equations for the basic variables and four equations for the conjugate variables) with the specified boundary conditions for the basic variables. To solve the boundary value problem, we use the shooting method, which leads to the solution of a sequence of Cauchy problems. We define the initial values of the conjugate variables, which are determined by the minimization of the corresponding quadratic function (residual) that quantifies the deviation of the calculated terminal values of the basic variables from their specified values (according to the transportation operation). The residual is minimized through iterative methods of nonlinear programming, and the Cauchy problem is solved using numerical integration techniques.

Key words: two-link manipulation system, optimal control, Pontryagin's maximum principle, shooting method, nonlinear programming.