

УДК 519.2:336.7

<http://dx.doi.org/10.30970/vam.2024.33.12108>**СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ХАРАКТЕРИСТИК
ПОРТФЕЛЯ З НАЙМЕНШОЮ ДИСПЕРСІЄЮ****М. Заболоцький¹, Т. Заболоцький¹, О. Цяпа²**¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000, Українаe-mail: mykola.zabolotskyi@lnu.edu.ua, taras.zabolotskyi@lnu.edu.ua,²Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я.С. Підстригача НАН України,

вул. Наукова 3-Б, Львів, 79060, Україна

e-mail: sashatsyapa@gmail.com

Знайдено асимптотичний розподіл вибірових оцінок відношення Шарпа та Value-at-Risk портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів еліптично розподілений. З аналізу швидкості збіжності статистичних показників оцінок характеристик портфеля до відповідних асимптотичних значень впливає, що отримані результати можуть бути використані на практиці для прийняття управлінських рішень при портфельному інвестуванні.

Ключові слова: портфель з найменшою дисперсією, відношення Шарпа, Value-at-Risk, вибіркова оцінка, асимптотичний розподіл, нормальний розподіл, еліптичний розподіл.

1. ВСТУП

Одним з важливих понять фінансової математики є поняття ефективного портфеля фінансових активів, тобто портфеля, який є оптимальним за певним критерієм. Вперше це поняття ввів Марковіц [1]. За критерій оптимальності було вибрано мінімізацію ризику за заданою очікуваною дохідністю, що еквівалентно максимізації очікуваної дохідності за заданого ризику. За міру ризику в [1] було обрано дисперсію портфеля. Змінюючи рівень ризику (рівень очікуваної дохідності) у вищенаведених задачах вибору структури портфеля, отримуємо множину портфелів, відому як ефективна множина. Виявляється, що у просторі сподівана дохідність-дисперсія, ефективна множина є параболою, вершиною якої є портфель з найменшою дисперсією ($\mathbf{w}_{GMV}$), тобто портфель, структуру якого отримали з задачі безумовної мінімізації дисперсії портфеля [2]. Цей портфель відіграє важливу роль у фінансовій математиці. Дослідженню властивостей оцінок характеристик цього портфеля присвячено низку наукових праць. Статистичний аналіз вибірових оцінок сподіваної дохідності та дисперсії портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ за припущення нормальності розподілу дохідностей активів та їх неавтокорельованості проведено в [3], де також доведено, що очікувана дохідність і дисперсія портфеля є двома з трьох параметрів, що повністю описують ефективну множину. Натомість, статистичний аналіз вибірових оцінок ваг цього портфеля проведено в [4]. В [5] попередні результати поширено на клас еліптично розподілених дохідностей. В [6] і [7] знайдено асимптотичні розподіли вибірових оцінок сподіваної дохідності та дисперсії портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ за припущення автокорельованості дохідностей та за припущення, що дохідності поведуться як багатовимірний VARMA-GARCH процес. Спосіб

дослідження відмінності портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ і довільного портфеля зі сталими вагами на значущість запропоновано в [8]. Однозначну відповідність між портфелем $\mathbf{w}_{GMV}$ та коефіцієнтами регресійного хеджування визначено в [9], а динамічний підхід до передбачення ваг цього портфеля запропоновано в [10].

Зауважимо, що в попередніх працях досліджували властивості лише ваг, сподіваної дохідності та дисперсії портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$. На практиці важливішими характеристиками портфеля фінансових активів є відношення Шарпа та Value-at-Risk (надалі VaR). Обидва ці показники відображають певний баланс між сподіваною дохідністю портфеля та його дисперсією. Завдяки важливості цих показників у теорії портфеля розглядають також задачі вибору структури портфеля фінансових активів на основі максимізації відношення Шарпа та мінімізації VaR портфеля. Обидва портфелі отримані з попередніх задач оптимізації є також ефективними за Марковіцем, причому портфель з найменшою дисперсією можна розглядати як граничний випадок портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри до VaR, що прямує до 1. Статистичні властивості VaR портфеля досліджували тільки у випадку портфеля з найменшим рівнем VaR [11]– [12], а статистичні властивості відношення Шарпа портфеля фінансових активів досліджені недостатньо. Тому актуальною є проблема вивчення статистичних властивостей вибірових оцінок відношення Шарпа та VaR портфеля з найменшою дисперсією.

2. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай ми формуємо портфель з k активів і їхня кількість не змінюється з часом. Позначимо k -вимірний вектор дохідностей активів в момент часу t через $\mathbf{X}_t$. Структурою портфеля (портфелем) назовемо k -вимірний вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$, де w_i частка коштів вкладена в актив i . Дохідність портфеля $\mathbf{w}$ у момент часу t визначаємо як $R_t(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'\mathbf{X}_t$. Якщо $\mathbf{X}_t$ має k -вимірний еліптичний розподіл з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Sigma}$ (див., напр., [16, с. 218–272]), то сподівана дохідність портфеля $\mathbf{w}$ становить $R_{\mathbf{w}} = E(R_t(\mathbf{w})) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$, а дисперсія – $V_{\mathbf{w}} = Var(R_t(\mathbf{w})) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Портфель фінансових активів з найменшою дисперсією $\mathbf{w}_{GMV}$ отримуємо з задачі безумовної мінімізації дисперсії портфеля, тобто

$$V_{\mathbf{w}} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \rightarrow \min, \text{ за умови } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1,$$

де $\mathbf{1}$ – k -вимірний вектор складений з одиниць. Розв'язок цієї задачі набув вигляду

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}.$$

Сподівана дохідність R_{GMV} та дисперсія V_{GMV} портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ становлять

$$R_{GMV} = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, \quad V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}. \quad (1)$$

Відношення Шарпа SR_{GMV} та VaR VaR_{GMV} портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ визначають так:

$$SR_{GMV} = \frac{R_{GMV}}{\sqrt{V_{GMV}}} = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}}, \quad (2)$$

$$VaR_{GMV} = d_{\alpha}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV} = \frac{d_{\alpha}\sqrt{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} - \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, \quad (3)$$

де $d_\alpha - \alpha$ квантиль випадкової величини $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{X}_t - \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{D}\mathbf{a}}}$ для довільного вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2$, $\gamma = -2\psi'(0)$, ψ – характеристичний генератор еліптичного розподілу.

Застосувати вищенаведені формули для обчислення характеристик портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ на практиці неможливо, оскільки параметри розподілу $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$ невідомі. Тому використовують оцінки цих параметрів, найвідомішими з поміж яких є вибіркові оцінки. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ – незалежні реалізації випадкового вектора $\mathbf{X}_t$. Тоді вибіркові оцінки вектора середніх $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та коваріаційної матриці $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ мають вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \text{ та } \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \quad (4)$$

Підставивши оцінки (4) у (1), отримаємо вибіркові оцінки сподіваної дохідності та дисперсії портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$, а (2) дає вибіркові оцінки відношення Шарпа $\widehat{SR}_{GMV}$ та VaR $\widehat{VaR}_{GMV}$ портфеля з найменшою дисперсією. Оскільки вибіркові оцінки параметрів розподілу вектора $\mathbf{X}_t$ є випадковими величинами (див., напр., [13, с. 359]), то такими величинами будуть і оцінки $\widehat{SR}_{GMV}$ та $\widehat{VaR}_{GMV}$.

Асимптотичні розподіли випадкових величин $\widehat{SR}_{GMV}$ та $\widehat{VaR}_{GMV}$ описує таке твердження.

Теорема 1. Нехай портфель з найменшою дисперсією $\mathbf{w}_{GMV}$ містить k фінансових активів, вектор дохідностей яких в момент часу t $\mathbf{X}_t$ має k -вимірний еліптичний розподіл з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Sigma}$ і його реалізації не є автокорельованими. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ незалежні реалізації випадкового вектора $\mathbf{X}_t$, то для вибірових оцінок відношення Шарпа $\widehat{SR}_{GMV}$ та $\widehat{VaR}_{GMV}$ за рівня довіри α портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ виконується

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{SR}^2), \quad n \rightarrow +\infty, \\ \sqrt{n}(\widehat{VaR}_{GMV} - VaR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{VaR}^2), \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

де $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом, $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$,

$$\sigma_{SR}^2 = 1 + \lambda s + \frac{\lambda R_{GMV}^2}{2V_{GMV}}, \quad \sigma_{VaR}^2 = V_{GMV}(1 + \lambda s + \frac{d_\alpha}{\gamma}\lambda/2), \quad \lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2.$$

Доведення. З [3] за умов теореми отримуємо:

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \widehat{R}_{GMV} \\ \widehat{V}_{GMV} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 \end{pmatrix} \right).$$

Завдяки твердженню 6.4.3 [14, с.211] маємо

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{SR}^2), \quad n \rightarrow +\infty, \\ \sqrt{n}(\widehat{VaR}_{GMV} - VaR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{VaR}^2), \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\sigma_{SR}^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} & \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} \end{pmatrix}, \\ \sigma_{VaR}^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} & \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial SR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} &= \frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}}, \quad \frac{\partial SR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} = -\frac{R_{GMV}}{2V_{GMV}^{3/2}}, \\ \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial R_{GMV}} &= -1, \quad \frac{\partial VaR_{GMV}}{\partial V_{GMV}} = \frac{d_\alpha/\gamma}{2\sqrt{V_{GMV}}},\end{aligned}$$

отримаємо твердження теореми.

Оскільки за припущення про нормальність розподілу вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$ маємо $\lambda = \gamma = 1$, $VaR_{GMV} = z_\alpha \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}$, де z_α – α квантиль стандартного нормального розподілу, то з теореми випливає твердження.

Наслідок 2. Нехай портфель з найменшою дисперсією $\mathbf{w}_{GMV}$ містить k фінансових активів, вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ яких в момент часу t має k -вимірний нормальний розподіл з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Sigma}$ і його реалізації не є автокорельованими. Якщо $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ незалежні реалізації випадкового вектора $\mathbf{X}_t$, то для вибірових оцінок відношення Шарпа $\widehat{SR}_{GMV}$ та $VaR \widehat{VaR}_{GMV}$ за рівня довіри α портфеля $\mathbf{w}_{GMV}$ виконується

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{SR}^2), \quad n \rightarrow +\infty, \\ \sqrt{n}(\widehat{VaR}_{GMV} - VaR_{GMV}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{VaR}^2), \quad n \rightarrow +\infty,\end{aligned}$$

де $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом, $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$,

$$\sigma_{SR}^2 = 1 + s + \frac{R_{GMV}^2}{2V_{GMV}}, \quad \sigma_{VaR}^2 = V_{GMV}(1 + s + z_\alpha^2/2).$$

Асимптотичні дисперсії σ_{SR}^2 та σ_{VaR}^2 залежать від невідомих параметрів розподілу вектора дохідностей $\mathbf{X}_t$, а тому для використання результатів теореми 1 та наслідку 1 на практиці достатньо довести їхню консистентність (див. теорему 1.14 [15, с. 8]). З іншого боку, отримані в теоремі 1 розподіли асимптотичні, то виникає питання визначення необхідного обсягу вибірки n для досягнення потрібного наближення. Ці проблеми досліджуємо на підставі імітаційного моделювання.

3. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

У цьому розділі досліджено швидкість збіжності розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV} - SR_{GMV})$ до асимптотичного. Для цього використаємо такий алгоритм.

1. Припустимо, що характеристики розподілу вектора дохідностей активів портфеля відомі. Виберемо їхні значення так. Спочатку зафіксуємо кількість активів у портфелі, наприклад, $k = \{10, 20, 30, 100\}$. В портфелі розмірності $k =$

$\{10, 20, 30\}$ включаємо k перших акцій з відсортованого за алфавітом списку тікерів компаній з переліку Dow Jones. Далі на основі даних про щоденні дохідності цих акцій за період з 01.10.2019 до 29.09.2023 (4 роки) всього 1007 дохідностей, побудуємо вибірккові оцінки параметрів розподілу відповідних векторів дохідностей активів портфеля та приймемо ці оцінки за точні значення. Для портфеля розмірності $k = 100$ ми згенеруємо оцінки параметрів розподілу вектора дохідностей його активів. Вибравши максимальне та мінімальне значення вектора середніх портфеля з $k = 30$, згенеруємо 100 незалежних реалізацій рівномірно розподіленої на цьому інтервалі випадкової величини та приймемо отриманий 100-вимірний вектор за точне значення вектора середніх. Матрицю коваріацій будуємо так. Виберемо максимальне та мінімальне власне значення матриці коваріацій портфеля з $k = 30$ та згенеруємо додатно визначену матрицю розмірності 100×100 , власні значення якої належать отриманому інтервалу.

2. Розглянемо три припущення щодо розподілу вектора дохідностей активів відповідного портфеля: нормальний розподіл, t -розподіл Стюдента з 5 ступенями свободи та розподіл Лапласа. Для кожного з розглянутих портфелів згенеруємо вибірку з відповідного розподілу з n спостережень та на основі цих згенерованих вибірок оцінимо відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією відповідної розмірності. Повторимо цю процедуру 100000 разів. На підставі отриманої вибірки зі 100000 спостережень оцінок відношення Шарпа побудуємо оцінки математичного сподівання, дисперсії та густини, порівняємо їх з відповідними асимптотичними значеннями. Обсяг вибірок для побудови оцінок відношення Шарпа n виберемо так:

а) для портфеля розмірності $k = \{10, 20, 30\}$ візьмемо $n = \{250, 500, 1000, 2000\}$;

б) для портфеля розмірності $k = 100$ візьмемо $n = \{2000, 3000, 4000, 5000\}$.

Зауваження 1. Для оцінки відношення Шарпа відповідного портфеля з найменшою дисперсією використаємо не вибірккову оцінку, а виправлену. Оскільки у випадку нормально розподіленого вектора дохідностей активів портфеля маємо (див. [3]) $\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi^2_{n-k}$, $\hat{R}_{GMV}|\hat{s} = s^* \sim \mathcal{N}(R_{GMV}, \frac{1+\frac{n-1}{n}s^*}{n}V_{GMV})$, випадкові величини $\hat{V}_{GMV}$ та $\hat{R}_{GMV}$ незалежні, то

$$M\left(\frac{\sqrt{2}\hat{R}_{GMV}\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\sqrt{(n-1)\hat{V}_{GMV}\Gamma(\frac{n-k-1}{2})}}\right) = SR_{GMV},$$

де χ^2_m означає χ^2 розподіл з m ступенями свободи, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ – нормальний розподіл з середнім μ та дисперсією σ^2 , $\Gamma(x)$ – гамма функція, $M(x)$ – математичне сподівання випадкової величини x . Відповідно, використовуватимемо надалі виправлену оцінку для відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією вигляду

$$\widehat{SR}_{GMV,adj} = \frac{\sqrt{2}\hat{R}_{GMV}\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\sqrt{(n-1)\hat{V}_{GMV}\Gamma(\frac{n-k-1}{2})}}.$$

Зауваження 2. Для оцінки Value-at-Risk портфеля з найменшою дисперсією пропонують використовувати виправлену оцінку вигляду

$$\widehat{VaR}_{GMV,adj} = \frac{d_\alpha}{\gamma} \frac{\sqrt{(n-1)\hat{V}_{GMV}\Gamma(\frac{n-k}{2})}}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n-k+1}{2})} - \hat{R}_{GMV}.$$

Результати комп'ютерного моделювання наведені в табл. 1-3 і на рис. 1-3.

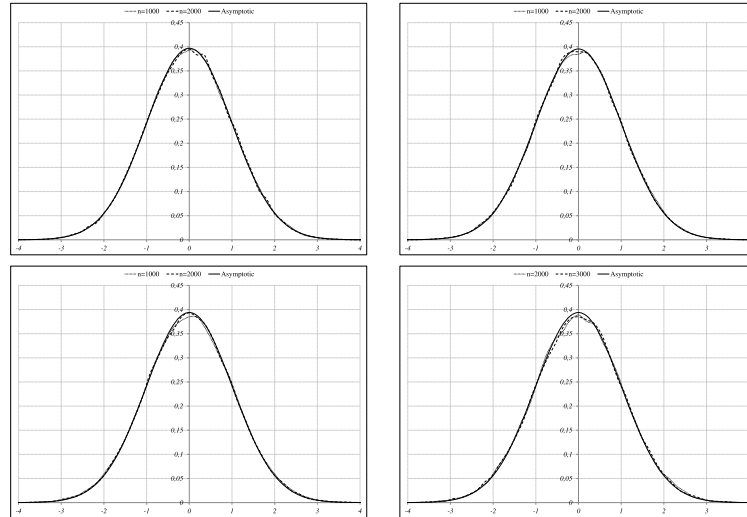


Рис. 1. Оцінки густин розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією складених з $k = 10$ (зліва зверху), $k = 20$ (справа зверху), $k = 30$ (зліва знизу), $k = 100$ (справа знизу) активів за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

Estimates of the density distributions of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance composed of $k = 10$ (top left), $k = 20$ (top right), $k = 30$ (bottom left), $k = 100$ (bottom right) assets under the assumption that the vector of returns of the portfolio assets has a normal distribution

Таблиця 1

Оцінки та асимптотичні значення середнього та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

Estimates and asymptotic values of the mean and variance of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance under the assumption that the vector of portfolio asset returns has a normal distribution

		$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 10$	Середнє	-0.0048	-0.0094	0.0033	0.0017	0
	Дисперсія	1.0519	1.0302	1.0148	1.0141	1.0105
$k = 20$	Середнє	-0.0021	0.0029	0.0035	-0.0034	0
	Дисперсія	1.1077	1.0568	1.0254	1.0245	1.0178
$k = 30$	Середнє	0.0025	-0.0020	-0.0009	0.0014	0
	Дисперсія	1.1613	1.0923	1.0603	1.0420	1.0256
		$n = 2000$	$n = 3000$	$n = 4000$	$n = 5000$	Асимпт.
$k = 100$	Середнє	0.0001	0.0059	0.0020	0.0016	0
	Дисперсія	1.0549	1.0575	1.0511	1.0410	1.0259

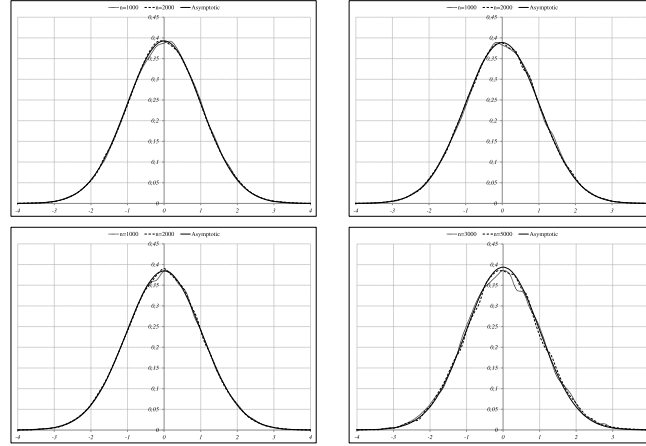


Рис. 2. Оцінки густин розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією складених з $k = 10$ (зліва зверху), $k = 20$ (справа зверху), $k = 30$ (зліва знизу), $k = 100$ (справа знизу) активів за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має t -розподіл Стюдента з 5 ступенями свободи

Estimates of the density distributions of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance composed of $k = 10$ (top left), $k = 20$ (top right), $k = 30$ (bottom left), $k = 100$ (bottom right) assets under the assumption that the vector of portfolio asset returns has a Student's t -distribution with 5 degrees of freedom

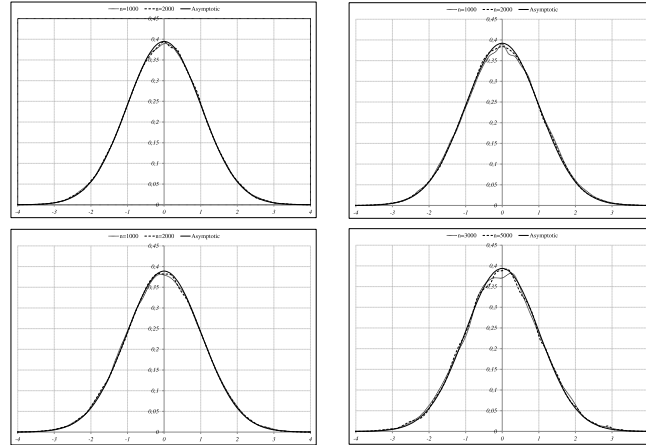


Рис. 3. Оцінки густин розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією складених з $k = 10$ (зліва зверху), $k = 20$ (справа зверху), $k = 30$ (зліва знизу), $k = 100$ (справа знизу) активів за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має розподіл Лапласа

Estimates of the density distributions of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance composed of $k = 10$ (top left), $k = 20$ (top right), $k = 30$ (bottom left), $k = 100$ (bottom right) assets under the assumption that the vector of portfolio asset returns has a Laplace distribution

Таблиця 2

Оцінки та асимптотичні значення середнього та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має t -розподіл Стюдента з 5 ступенями свободи

Estimates and asymptotic values of the mean and variance of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance under the assumption that the vector of portfolio asset returns has a Student's t -distribution with 5 degrees of freedom

		$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 10$	Середнє	0.0176	0.0088	0.0132	0.0067	0
	Дисперсія	1.0605	1.0403	1.0391	1.0368	1.0315
$k = 20$	Середнє	0.0085	0.0127	0.0116	0.0021	0
	Дисперсія	1.1141	1.0833	1.0568	1.0578	1.0533
$k = 30$	Середнє	-0.0094	-0.0053	-0.0024	-0.0023	0
	Дисперсія	1.1891	1.1207	1.0935	1.0797	1.0767
		$n = 2000$	$n = 3000$	$n = 4000$	$n = 5000$	Асимпт.
$k = 100$	Середнє	-0.0009	-0.0030	-0.0032	0.0138	0
	Дисперсія	1.1139	1.0917	1.0743	1.0724	1.0777

Таблиця 3

Оцінки та асимптотичні значення середнього та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ портфелів з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має розподіл Лапласа

Estimates and asymptotic values of the mean and variance of the random variable $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ of portfolios with the smallest variance under the assumption that the vector of portfolio asset returns has a Laplace distribution

		$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	Асимпт.
$k = 10$	Середнє	0.0086	0.0084	0.0034	0.0016	0
	Дисперсія	1.0612	1.0440	1.0324	1.0289	1.0210
$k = 20$	Середнє	0.0113	0.0100	0.0131	0.0013	0
	Дисперсія	1.1330	1.0790	1.0631	1.0398	1.0355
$k = 30$	Середнє	-0.0080	-0.0048	-0.0014	-0.0041	0
	Дисперсія	1.1929	1.1207	1.0872	1.0761	1.0512
		$n = 2000$	$n = 3000$	$n = 4000$	$n = 5000$	Асимпт.
$k = 100$	Середнє	0.0048	-0.0025	0.0041	-0.0034	0
	Дисперсія	1.1154	1.0832	1.0691	1.0678	1.0518

З рис. 1-3 бачимо, що оцінка густини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$ добре наближає асимптотичну густину для портфелів з найменшою дисперсією з кількістю активів $k = \{10, 20, 30\}$ при $n = 1000$. Натомість у випадку портфеля з $k = 100$ для досягнення доброго наближення треба використати вибірку історичних значень обсягом $n \geq 3000$. Ці спостереження підтверджуються результатами наведеними

у табл. 1-3, де подано оцінки середніх значень і дисперсій випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{GMV,adj} - SR_{GMV})$.

4. ВИСНОВКИ

Досліджено статистичні властивості відношення Шарпа та Value-at-Risk портфеля з найменшою дисперсією за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має багатовимірний еліптичний розподіл. Знайдено асимптотичні розподіли вибірових оцінок двох розглянутих показників ефективності портфеля. Оскільки нормальний розподіл теж належить класу еліптичних розподілів і часто використовується на практиці, то у підсумку, отримали асимптотичний розподіл вибірових оцінок розглянутих показників у випадку багатовимірного нормального розподілу вектора дохідностей активів портфеля. Оскільки розглянуті вибірові оцінки зміщені, то для дослідження швидкості збіжності відповідних випадкових величин було використано виправлені оцінки, які є незміщеними у випадку припущення про нормальність розподілу вектора дохідностей активів портфеля. На прикладі вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля з найменшою дисперсією для обсягів портфелів $k = \{10, 20, 30\}$ з'ясовано, що при обсязі вибірки історичних значень $n = 1000$ досягається добре наближення оцінки густини точного розподілу асимптотичною густиною. Натомість для портфелів обсягу $k = 100$ обсяг вибірки історичних значень не повинен бути меншим за 3000 спостережень. Отже, отримані результати можуть бути використані на практиці для дослідження відмінності розглянутих характеристик від певних порогових значень. Також на їхній підставі можуть бути побудовані інтервальні оцінки, які надають більше інформації про досліджувану величину, ніж її точкова оцінка.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – № 7. – P. 77–91.
2. Merton R.C. An analytical derivation of the efficient frontier / R.C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis. – 1972. – № 7. – P. 1851–1872.
3. Bodnar T. Econometrical analysis of the sample efficient frontier / T. Bodnar, W. Schmid // The European journal of finance. – 2009. – № 15. – P. 317–335.
4. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235–256.
5. Bodnar T. A test for the weights of the global minimum variance portfolio in an elliptical model / T. Bodnar, W. Schmid // Metrika. – 2008. – № 67. – P. 127–143.
6. Bodnar T. Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotsky // Statistical papers. – 2009. – № 50. – P. 593–604.
7. Bodnar T. Sample efficient frontier in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models / T. Bodnar, T. Zabolotsky // Statistics. – 2010. – Vol. 44, Issue 1. – P. 1–15.
8. Yaroshko S.M. Properties of the beta coefficient of the global minimum variance portfolio / S.M. Yaroshko, M.V. Zabolotsky, T.M. Zabolotsky // Mathematical modeling and computing. – 2021. – Vol. 8, № 1. – P. 11–21.
9. Chiu W.-Y. On the weight sign of the global minimum variance portfolio / W.-Y. Chiu, C.-H. Jiang // Finance research letters. – 2016. – Vol. 19. – P. 241–246.
10. Reh L. Predicting the global minimum variance portfolio / L. Reh, F. Kruger, R. Liesenfeld // Journal of business and economic statistics. – 2023. – № 41 (2). – P. 440–452.

11. Bodnar T. Minimum VaR and minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotsky / // Statistics and risk modeling. – 2012. – № 29. – P. 281–314.
12. Bodnar T. Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotsky / // Metrica. – 2013. – № 76. – P. 1105–1134.
13. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика / П.С. Сеньо. – Київ: Знання, 2007. – 556 с.
14. Brockwell P.J. Time series: theory and methods / P.J. Brockwell, R.A. Davis. – New-York: Springer, 2006. – 600 p.
15. DasGupta A. Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New-York: Springer, 2008. – 722 p.
16. Gupta A.K. Elliptically contoured models in statistics and portfolio theory / A.K. Gupta, T. Varga, T. Bodnar. – New-York: Springer, 2013. – 321 p.

Стаття: надійшла до редколегії 08.01.2024

доопрацьована 14.02.2024

прийнята до друку 20.03.2024

STATISTICAL ANALYSIS OF THE GLOBAL MINIMUM VARIANCE PORTFOLIO CHARACTERISTICS

M. Zabolotsky¹, T. Zabolotsky¹, O. Tsyapa²

¹*Ivan Franko National University of Lviv,*

1, Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine

e-mail: mykola.zabolotsky@lnu.edu.ua, taras.zabolotsky@lnu.edu.ua,

²*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,*

3-B, Naukova str., 79060, L'viv, Ukraine

e-mail: sashatsyapa@gmail.com

In the paper, the statistical analysis of sample estimators of global minimum variance portfolio Sharpe ratio and Value-at-Risk is provided. The asymptotic distributions of these estimators are found under the assumption that the vector of portfolio asset returns follows multi-dimensional elliptical distribution. As a direct consequence of these results the asymptotic distribution of the estimators under assumption that the vector of portfolio asset returns, follows multi-dimensional normal distribution is provided. It is pointed out that the sample estimators of global minimum variance portfolio Sharpe ratio and Value-at-Risk are biased. In the paper, the adjusted estimators of the portfolio characteristics are constructed. For the simulation study we use three different assumptions concerning the behavior of the vector of asset returns: normal distribution, t -distribution with 5 degrees of freedom and Laplace distribution. We get that an accurate approximation of estimated densities of adjusted estimator of global minimum variance portfolio Sharpe ratio by corresponding asymptotic ones is observed for sample sizes $n = 1000$ for portfolios with $k = \{10, 20, 30\}$ assets while in the case $k = 100$ we need $n \geq 3000$ observations.

Key words: global minimum variance portfolio, Sharpe ratio, Value-at-Risk, sample estimator, asymptotic distribution, normal distribution, elliptical distribution.