ISSN 2224-087X. Електроніка та інформаційні технології. 2018. Випуск 9. С. 32–39
Electronics and information technologies. 2018. Issue 9. P. 32–39

УДК 535.3

ДИФЕРЕНЦІЙНА МАТРИЦЯ ДЖОНСА ХОЛЕСТЕРИКА

С. Настишин[1], І. Болеста[1], Ю. Настишин[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
nastyshyns@gmail.com

[2]*Національна академія сухопутних військ ім. Гетьмана Петра Сагайдачного,*
вул. Героїв Майдану, 32, 79012, Львів, Україна

На основі розв'язків польового рівняння Максвела побудовано диференційну матрицю Джонса для холестеричного рідкого кристала (холестерика). З'ясовано, що диференціальна матриця Джонса для холестерика у власній системі координат, прив'язаній до директора, не є матрицею нематика, оскільки в ній наявні недіагональні елементи, які відповідають за оптичну активність та джонсівський дихроїзм. Отримана диференціальна матриця Джонса описує оптичні властивості холестерика в усьому спектральному діапазоні, включаючи смугу селективного відбивання.

Ключові слова: матриця Джонса, диференціальна матриця Джонса, інтегральна матриця Джонса, оптична активність, холестерик, селективне відбивання у холестерику.

1. Вступ.

Формалізм матриць Джонса [1–8] – потужний теоретичний апарат, який широко застосовують для обчислення параметрів електричного поля світлової хвилі на виході з оптичної системи чи середовища [9]. Цей апарат ґрунтується на лінійності зв'язку вектора на виході з оптичної системи чи середовища із вхідним вектором $\vec{E}_0$ через матрицю Джонса J так, що $E = JE_0$. У такому підході матриця J описує оптичний елемент як цілий та не несе жодної інформації про його внутрішню структуру; тому її називають інтегральною матрицею Джонса (ІМД). Хоча ІМД уведена для оптичних систем з дискретними елементами, цей підхід часто використовують і для моделювання оптично неоднорідних середовищ; він навіть більш популярний у літературі, ніж підхід диференціальної матриці Джонса (ДМД), спеціально розроблений Джонсом [7] для такого типу задач.

У рамках ІМД підходу середовище моделюють стопою m безмежно тонких кристалічних пластинок, кожну з яких уважають оптично однорідною та описують своєю матрицею Джонса J_i. У такому випадку J є добутком усіх елементарних ІМД, тобто $J = \prod_{i=1}^{m} J_i$. Підхід ІМД добре зарекомендував себе в числових розрахунках. Однак він виявляється надто громіздким, а тому практично непридатним, якщо потрібно виразити J аналітично через стандартні функції.

Джонс розумів цю проблему, а тому запропонував альтернативний підхід, увівши поняття диференціальної матриці N, яка дає змогу врахувати внутрішню структуру середовища [7]. Диференціальна та інтегральна матриці Джонса пов'язані через матричну експоненту. Якщо ДМД залежить від координати z, то

$$J = e^{\int N(z)dz}. \tag{1.1}$$

Однак такий компактний запис приховує проблему. Він є лише символічним зображенням. У випадку, коли N залежить від z, зображення матричної експоненти через аналітичні функції невідоме. Таку матричну експоненту можна лише обчислити розкладом у ряд Тейлора. Якщо ж ДМД незалежна від просторових координат, то

$$J(z) = e^{Nz}, \tag{1.2}$$

і тоді матричну експоненту виражають через гіперболічні функції (див. п. 5). Повідомлень про успішне використання підходу ДМД в літературі дуже мало [9, 10]. Ми виводимо аналітичний вигляд ДМД холестеричного рідкого кристала.

Холестеричний рідкий кристал (холестерик) – це хіральний нематик, у якого директор $\vec{n}$ спонтанно закручений навколо осі закрутки $\vec{Z} \perp \vec{n}$. Оптичні властивості холестерика вперше описав Моген [11], а згодом – де Врі [12] методом диференціальних рівнянь Максвела в рамках моделі, згідно з якою азимут діагонального тензора діелектричної проникності лінійно змінюється вздовж координатної осі $\vec{Z}$, що є перпендикулярною до директора. Першу спробу вивести інтегральну матрицю Джонса J^{Ch} для твістованого кристала зробив сам Джонс [7], ґрунтуючись на припущенні, що диференціальну матрицю твістованого кристала (холестеричного в тому числі) для довільної координати z можна записати як $N^{Ch} = R(qz)N^0R^{-1}(qz)$, де q – кутова закрутка на одиницю довжини; для холестерика $q = 2\pi / P$ – хвильове число закрутки з кроком P; $R(qz)$ – поворотна матриця; N^0 – ДМД у *власній* системі координат холестерика, у якій вісь $\vec{Z}$ спрямована вздовж осі закрутки, а вісь $\vec{X}$ паралельна до директора. Однак аналізу оптичних властивостей, що випливають з отриманої ним форми $J^{Ch} = R(qz)\exp[\{N^0 - qR(\pi/2)\}z]$, Джонс не провів. Така ж форма для J^{Ch} випливає з недавно отриманої диференціальної матриці Джонса загального вигляду для монотонно деформованого кристала в разі похилого поширення світла [13] в частковому випадку деформації кручення та нормального падіння світла.

Іншу спробу отримати вигляд J^{Ch} зробили Чандрасекар та Рао [14], використовуючи алгоритм $J^{Ch} = \prod_{i=1}^{m} J_i$, де J_i – інтегральна матриця елементарної пластини, на які розбивають холестерик у рамках ІМД підходу. Ми перевірили [13], що форми J^{Ch}, отримані з використанням підходів [7, 14], є еквівалентними, однак виявили, що в припущенні, згідно з яким елементарна пластина є звичайним (негіротропним) одновісним кристалом, як це приймали в праці [4], матриця J^{Ch} адекватна лише для опису граничних випадків коротко- та довгокрокового холестериків і не придатна для режиму селективного відбивання світла, коли крок закрутки P є сумірним з довжиною світлової хвилі λ.

Ми доводимо, що хвильові числа власних хвиль холестерика (з точністю до множника $-i$) є власними значеннями, а вектори, що задають власні хвилі, – власними векторами ДМД холестерика. Скориставшись цією знахідкою, ми отримали вигляд діагональної форми ДМД холестерика, а відтак і її повну форму та ІМД холестерика в локальній системі координат для будь-якого кроку закрутки *P*, включаючи спектральну смугу селективного відбивання.

2. Поняття про диференціальну матрицю Джонса.

Скористаємось визначенням диференціальної матриці за Джонсом. Для цього розглянемо оптично неоднорідне середовище як систему безмежно тонких двовимірних однорідних пластин, перша з яких міститься на поверхні, яку світло проходить першою. Кожна наступна пластина є паралельною до першої. Початок правої декартової системи координат розмітимо на початку першої пластини, вісь $\vec{Z}$ спрямуємо вздовж перпендикуляра до пластин, що збігається з напрямом поширення світла. Позначимо матрицю Джонса безмежно тонкої пластини, що міститься між координатами z та z' символом $J\left(z,z'\right)$. Вектор Джонса світлової хвилі в точці із координатою z – символом $\vec{E}\left(z\right)$. Тоді вектор Джонса на виході з пластини

$$\vec{E}(z') = J\left(z,z'\right)\vec{E}(z). \tag{2.1}$$

За означенням ДМД $N\left(z\right)$ у точці z запишемо у вигляді [7]

$$N(z) = \lim_{(z'-z)\to 0} \frac{J(z,z') - I}{z' - z}, \tag{2.2}$$

де I – одинична матриця.

Вектор Джонса світлової хвилі в точці з координатою z визначатимемо через матрицю $J\left(z\right)$ як

$$\vec{E}(z) = J(z)\vec{E}_0, \tag{2.3}$$

Відповідно, вектор Джонса світлової хвилі в точці з координатою z' визначатимемо через матрицю $J\left(z'\right)$ як

$$\vec{E}(z') = J(z')\vec{E}_0 \tag{2.4}$$

Використовуючи формулу (2.3), вилучимо з (2.4) $\vec{E}_0$:

$$\vec{E}\left(z'\right) = J\left(z'\right)J^{-1}\left(z\right)\vec{E}\left(z\right). \tag{2.5}$$

Зіставимо формулу (2.5) з формулою (2.1) та побачимо, що

$$J\left(z,z'\right) = J\left(z'\right)J^{-1}\left(z\right). \tag{2.6}$$

Підставимо цю рівність у (2.2) і одержимо

$$N(z) = \lim_{(z'-z)\to 0} \frac{J(z') - J(z)}{z' - z} J^{-1}(z) = \frac{dJ(z)}{dz} J^{-1}(z). \tag{2.7}$$

Отриману рівність (2.7) можна записати у іншій формі [7,8]:

$$\frac{dJ(z)}{dz} = N(z)J(z)\,. \tag{2.8}$$

Отже, відповідно до (2.8), ДМД є оператором, який диференціює інтегральну матрицю. Для того, щоб виразити інтегральну матрицю Джонса через диференціальну матрицю Джонса, потрібно розв'язати однорідне матричне диференціальне рівняння (2.8) відносно $J(z)$. У загальному випадку диференціальна матриця $N(z)$ для неоднорідного середовища може бути залежною від координати *z*. Розв'язком рівняння (2.8) є матрична експонента, задана рівнянням (1.1) [7]. Якщо диференціальна матриця Джонса є незалежною від координати *z*, то зв'язок між інтегральною та диференціальною матрицями Джонса має вигляд, заданий рівнянням (1.2).

3. Власні значення та власні вектори диференціальної матриці Джонса.

Для того щоб знайти диференціальну матрицю Джонса для холестерика, спочатку визначимо її власні значення та власні вектори.

У загальному випадку світлова хвиля, яка поширюється в холестерику, є еліптичною, її записують у вигляді

$$\vec{E} = \vec{A}e^{-i\frac{n}{\tilde{\lambda}}z}, \tag{3.1}$$

де $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_\eta \\ A_\zeta \end{pmatrix}$ – амплітуда хвилі, індекси η і ζ і відповідають позначенням координатних осей власної системи координат холестерика за де Врі [12]), *n* – показник заломлення власної хвилі, $\tilde{\lambda} = \lambda / 2\pi$. З означення ІМД $\vec{E} = J\vec{E}_0$ отримуємо співвідношення

$$\frac{d\vec{E}}{dz} = \frac{dJ}{dz}\vec{E}_0\,. \tag{3.2}$$

Підставивши (2.8) у (3.2), одержимо

$$\frac{d\vec{E}}{dz} = N\vec{E}\,. \tag{3.3}$$

Продиференціюємо за *z* праву і ліву частини рівняння (3.1) та скористаємось рівнянням (3.3), отримаємо

$$N\vec{E} = -i\frac{n}{\tilde{\lambda}}\vec{E}\,. \tag{3.4}$$

Із (3.4) бачимо, що параметр $-i\frac{n}{\tilde{\lambda}}$, є власним значенням, а вектор $\vec{E}$ – власним вектором диференціальної матриці *N*. За фізичним змістом величина $k = n/\tilde{\lambda}$ є ні чим іншим, як хвильовим числом власної хвилі, що його описує вектор $\vec{E}$. Моген [11], а згодом де Врі [12] довели, що в холестерику поширюється дві власні хвилі з показниками заломлення

$$\left(n_{\pm}\right)^2=\bar{\varepsilon}+q^2\lambda^2\pm\sqrt{4\bar{\varepsilon}q^2\lambda^2+\frac{\left(\Delta\varepsilon\right)^2}{4}}, \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_{II}+\varepsilon_{\perp}}{2}=\bar{n}^2+\frac{\Delta n^2}{4}; && \bar{n}=\frac{n_{II}+n_{\perp}}{2}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{II}}+\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{2}; \\ &\Delta\varepsilon=\varepsilon_{II}-\varepsilon_{\perp}=2\bar{n}\Delta n; && \Delta n=n_{II}-n_{\perp}=\sqrt{\varepsilon_{II}}-\sqrt{\varepsilon_{\perp}}; \end{aligned} \tag{3.6}$$

ε_{II}, n_{II} – компонента тензора діелектричної проникності та показник заломлення вздовж директора; $\varepsilon_{\perp}$, $n_{\perp}$ – відповідні значення, виміряні перпендикулярно до директора; $\bar{\varepsilon}$, $\bar{n}$ – їхні усереднені значення.

4. ДМД холестерика.

Відповідно до рівняння (3.4), з показників заломлення n_+ та n_- власних хвиль, заданих виразом (3.5), знаходимо власні значення ДМД холестерика $-ik_+=-i\frac{n_+}{\lambda}$ та $-ik_-=-i\frac{n_-}{\lambda}$, які є діагональними елементами діагональної форми матриці *N*. Повну форму ДМД холестерика можна знайти з її діагональної форми за алгоритмом

$$N=T\begin{bmatrix}-ik_+ & 0\\ 0 & -ik_-\end{bmatrix}T^{-1}, \tag{4.1}$$

де *T* – матриця переходу, складена з власних векторів. Провівши нормування власних векторів на одиницю, отримаємо матрицю переходу у вигляді

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ f_+ & f_-\end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

де

$$f_{\pm}=\frac{A_{\eta}^{\pm}}{A_{\xi}^{\pm}}=\frac{n_{\perp}^2-n_{\pm}^2-\lambda^2q^2}{2n_{\pm}\lambda q} \tag{4.3}$$

– еліптичність власних хвиль [12]. Підставивши рівняння (4.2), (4.3) у рівняння (4.1), знаходимо ДМД холестерика у вигляді

$$N=\begin{bmatrix}-\frac{i}{\lambda}\left(\bar{n}_{\pm}+LB\right); & JD+OA\\ JD-OA; & -\frac{i}{\lambda}\left(\bar{n}_{\pm}-LB\right)\end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

де $\bar{n}_{\pm} = \dfrac{n_{+} + n_{-}}{2} = i\bar{\lambda}\dfrac{N_{11} + N_{22}}{2}$ – усереднений показник заломлення для двох власних хвиль; $LB = i\bar{\lambda}\dfrac{N_{11} - N_{22}}{2} = \bar{n}_{\pm}\dfrac{\varepsilon_{II} - \bar{\lambda}^2 q^2 - n_{+}n_{-}}{\varepsilon_{II} - \bar{\lambda}^2 q^2 + n_{+}n_{-}}$ – лінійне двозаломлення; $JD = \dfrac{N_{12} + N_{21}}{2} = -q\dfrac{LB}{\bar{n}_{\pm}}$ – джонсівський дихроїзм; $\dfrac{N_{12} - N_{21}}{2} = OA = q$ – оптична активність.

5. Аналітичне зображення ІМД через ДМД.

Для ДМД (4.4), незалежної від координати, ІМД, задану матричною експонентою (1.2), у явному вигляді записуємо як [7]

$$J = e^{\frac{1}{2}\left(N_{11}+N_{22}\right)}\begin{pmatrix} \mathrm{c}h\dfrac{D}{2} - \dfrac{\left(N_{11}-N_{22}\right)}{D}sh\left(\dfrac{D}{2}\right) & \dfrac{2N_{12}}{D}sh\left(\dfrac{D}{2}\right) \\ \dfrac{2N_{21}}{D}sh\left(\dfrac{D}{2}\right) & \mathrm{c}h\dfrac{D}{2} + \dfrac{\left(N_{11}-N_{22}\right)}{D}sh\left(\dfrac{D}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

де

$$D = \sqrt{\left(N_{11} - N_{22}\right)^2 + 4N_{12}N_{21}}\ . \tag{5.2}$$

Рівняння (4.4) та (5.2) аналітично задають ІМД холестерика у його власній системі координат.

Із рівнянь (4.4) та (5.1) випливає, що ДМД та ІМД холестерика у його власній системі координат відповідають гіротропній пластині з лінійним двозаломленням та джонсівським дихроїзмом. Тобто в загальному випадку елементарні пластини, на які розбивають холестерик у рамках формалізму Джонса, не є нематиком. Отже, припущення, використане в працях [7, 14], згідно з яким елементарні пластини, на які розбивають холестерик, є незакрученим нематиком, у загальному випадку не є коректним. Таке припущення справджується для слабкої закрутки, що відповідає режиму Могена в разі поширення електромагнітної хвилі. Однак воно не справджується для сильної закрутки, що є в короткокрокових холестериках, а тому не приводить до опису явища селективного відбивання. Отримані нами ДМД та ІМД холестерика не мають цього недоліку.

У спектральній ділянці $n_{\perp}P < \lambda < n_{II}P$ (де $P = \dfrac{2\pi}{q}$ – крок закрутки холестеричної спіралі, λ – довжина світлової хвилі) показник заломлення n_{-} стає комплексним, що формально засвідчує, що відповідна власна світлова хвиля послаблюється. Однак це послаблення не пов'язане з поглинанням. Воно відповідає селективному відбиванню.

Отже, ми отримали загальний вигляд диференціальної та інтегральної матриць Джонса для холестерика, які описують його оптичні властивості, включаючи селективне відбивання. Перевагою нашого підходу є те, що ми не використовуємо припущень, які застосовували в попередніх працях, про те, що елементарна пластина, на які розбивають холестерик у підході інтегральної матриці, чи диференціальна матриця в підході ДМД у власній системі координат холестерика відповідають незакрученій нематичній пластині. Ми отримуємо ІМД та ДМД із рівнянь Максвела, скориставшись нашою знахідкою про те, що власні значення та власні вектори диференціальної матриці Джонса є, відповідно, хвильовими числами та векторами власних хвиль холестерика. Отримані нами ІМД елементарної пластини, на які розбивають холестерик у підході інтегральної матриці, чи диференціальна матриця в підході ДМД у власній системі координат холестерика відповідають гіротропній пластині з лінійним двозаломленням і джонсівським дихроїзмом та описують холестерик у всьому спектральному діапазоні, включаючи смугу селективного відбивання.

Список використаної літератури

1. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. –P. 488–493.
2. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
3. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke theory of optical activity / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
4. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. IV / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
5. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. V. A more general formulation, and description of another calculus / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1947. – Vol. 37. – P. 107–110.
6. *Jones R.* A new calculus for the treatment of optical systems. VI. Experimental determination of the matrix / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1947. – Vol. 37. – P. 110–112.
7. *Jones R.* A new calculus for the Treatment of Optical systems. VII. Properties of the N-matrices / R. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1948. – Vol. 37. – P.671–685.
8. *Jones R.* A new calculus for the Treatment of Optical systems. VIII. Electromagnetic Theory / R. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 46. – P. 126–131.
9. *Azzam R.* Ellipsometry and polarized light / R. Azzam, N. Bashara. – Oxford : North-Holland Publishing Company, 1977. – 583 p.
10. *Kushnir O.* Crystal optical properties of incommensurate phases in the plane-wave modulation region / O. Kushnir // J. Phys.: Condens. Matter. – 1997. – Vol. 9. – P. 9259–9273.
11. *Mauguin M.* Sur les cristaux liquides de Lehmann / M. C. Mauguin // Bulletin de la Societe Francaise Mineralogie et Crystallographie. – 1911. – Vol. 34. – P. 71–117.
12. *Hl. De Vries*. Rotatory power and other optical properties of certain liquid crystals / Hl. De Vries // Acta Cryst. – 1951. – Vol. 4. – P. 219–226.
13. *Nastishin Yu.* Differential and integral extended Jones matrices for oblique light propagation through a deformed crystal / Yu. Nastishin, S. Nastyshyn // Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 033810.
14. *Chandrasekhar S.* Optical rotatory power of Liquid Crystals / S. Chandrasekhar, K. Rao // Acta Cryst. – 1968. – A24. – P. 445–451.

Стаття: надійшла до редакції 13.12.2017,
доопрацьована 23.01.2018,
прийнята до друку 25.01.2018.

DIFFERENTIAL JONES MATRIX FOR CHOLESTERIC

S. Nastyshyn[1], I. Bolesta[1], Yu. Nastishin[2]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Gen. Tarnavskyi street, 107, 79017 Lviv, Ukraine
nastyshyns@gmail.com

[2] *Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy,*
32, Heroes of Maidan st., Lviv, Ukraine, 79012

The formalism of the Jones matrices is a powerful theoretical tool widely used to calculate the parameters of the electric field of a light wave at the output of an optical system or medium. The Jones calculus is based on the linearity of the vector relation between the electric field of a light wave incident ($\vec{E}_0$) on and exiting ($\vec{E}$) from an optical system or medium through the Jones matrix *J*, such that: $\vec{E} = J\vec{E}_0$. In this approach, the *J* matrix describes an optical element as a whole and does not contain any information about its internal structure; for this reason it is called the integral Johns matrix (IJM). Although the IJM was introduced for optical systems with discrete elements, it is often used to model optically inhomogeneous media and appears to be even more popular in literature than the approach of the differential Jones matrix (DJM), which was specially developed by Jones for this type of problems.

In this paper we employ the DJM approach to the description of optical properties of a cholesteric liquid crystal (cholesteric). Cholesteric is a chiral nematic, whose director $\vec{n}$ spontaneously twists around the axis $\vec{Z} \perp \vec{n}$. Description of optical properties of the cholesteric was first performed by Mogen [Bulletin de la Societe Francaise Mineralogie et Crystallographie. – 1911. – Vol. 34. – P. 71] using the method of the Maxwell differential equations in the framework of the model, according to which the azimuth of the diagonal tensor of dielectric permittivity varies linearly along the coordinate axis $\vec{Z} \perp \vec{n}$. The first attempt to derive the Jones integral matrix for a twisted crystal was performed by Johns [J. Opt. Soc. Am. 1948. – Vol. 37. – P. 671]. An attempt to obtain the cholesteric IJM was made by Chandrasekar and Rao [Acta Cryst. – A24. – P. 445(1968)]. Results of both approaches appear to be applicable for the spectral range except the selective reflection band.

We show that the wave numbers of the eigenwaves propagating in the cholesteric are the eigenvalues and the electric field vectors of these eigenwaves are the eigenvectors of the cholesteric DJM. Taking advantage of this finding, we derived the cholesteric DJM in the local coordinate system for any light wavelength, including the spectral band of the selective reflection.

Key words: Jones matrix, differential Jones matrix, integral Johns matrix, cholesteric, selective reflection.