

## ВПЛИВ АНІЗОТРОПНОЇ ВЗАЄМОДІЇ НЕСПІВМІРНОЇ НАДСТРУКТУРИ НА ПОВЕДІНКУ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА

С. Свелеба, І. Катеринчук, І. Куньо, І. Карпа, Я. Шмигельський.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна  
[incomlviv@gmail.com](mailto:incomlviv@gmail.com)*

Вперше для групи кристалів  $A_2BX_4$ , які володіють неспівмірною надструктурою були розраховані показники Ляпунова в широкому діапазоні параметрів, які визначають динаміку неспівмірної надструктури. Для розрахунку показників Ляпунова неявним методом Адамса-Мултона та Рунге-Куты в програмному середовищі Python з використанням бібліотеки JITCODE.

Встановлено що для неспівмірної надструктури характерне позитивне значення одного показника Ляпунова, та від'ємне значення інших трьох показників. Оскільки третій показник набуває значення, яке значно перевищує суму всіх інших, то неспівмірна надструктура характеризується як система що має атрактор. Для неспівмірної надструктури яка описується двокомпонентним параметром порядку характерний спектр показників Ляпунова, який характеризується сталим додатнім значенням першого показника Ляпунова. Сильно вироджена аномальна поведінка третього і четвертого показника Ляпунова, засвідчують, що неспівмірній надструктурі притаманний як гіперхаос, що на думку авторів описує появу хаотичної фази, так і встановлення квазістабільного стану з появою довгоперіодичних співмірних фаз. Отримані Фур'є спектри неспівмірної надструктури засвідчують, що основний стан системи характеризується стабільною критичною точкою, яка є атрактором.

*Ключові слова:* неспівмірна надструктура, фазовий портрет, показники Ляпунова.

Хаос широко спостерігається як в природних, так і в соціальних науках. Теорія хаосу є науковою темою, що описує певну нестійку поведінку нелінійної динамічної системи, і забезпечує теоретичні методи, які описують як явище хаосу, так і його застосування.

Як відомо, величина показника Ляпунова динамічної системи характеризує швидкість поділу нескінченно близьких траєкторій. Він відіграє вирішальну роль у виявленні динамічної поведінки і хаотичного ступеня дивного атрактора [1].

Ідея показників Ляпунова полягає у визначенні характеристикних чисел для динамічної системи, що дозволяє класифікувати поведінку системи у стислій формі. Ці числа повинні враховувати експоненціальну збіжність або дивергенцію траєкторій, які починаються близько один до одного. Кількість показників Ляпунова, що описують поведінку динамічної системи, дорівнює розмірності цієї системи. Якщо сума всіх показників Ляпунова приймає від'ємне значення, то система має атрактор. Для практичного застосування найважливішою є інформація про найбільше значення величини показника Ляпунова. Якщо найбільше значення у спектрі показників Ляпунова позитивне, це означає,

що система хаотична. Найбільше значення дорівнює нулю вказує на періодичну або квазіперіодичну динаміку. Якщо всі показники Ляпунова є від'ємними, то стабільною критичною точкою є атрактор.

В даний час методи Адамса є одними з перспективних чисельних методів інтегрування для розв'язання задачі Коші. При застосуванні багатокрокових чисельних методів Адамса для розв'язання задачі Коші до 12-го порядку, область стійкості зменшується. При подальшому збільшенні порядку область стійкості, а також точність методу зростає. Крім того, при однаковій точності для багатокрокових методів на одному кроці інтегрування потрібно менше обчислень правих частин диференціальних рівнянь, ніж в методах Рунге-Кутта. До переваг методів Адамса відноситься і та обставина, що в них легко змінюється крок інтегрування і порядок методу [2].

На практиці широко використовуються два типи методів Адамса - явні і неявні. Явні методи відомі як метод Адамса-Бешфорта, неявні - як метод Адамса-Мултона [3].

На перший погляд може здатися, що явний багатокроковий метод є найпростішим методом з точки зору обчислень. Однак на практиці явні методи використовуються дуже рідко. Неявний метод Адамса-Мултона є більш точним, ніж явний метод Адамса-Бешфорта [3].

Як і у випадку з методом Адамса-Бешфорта, при використанні методу Адамса-Мултона важливим питанням є питання вибору оптимального співвідношення кроку інтегрування і порядку методу. Слід зазначити, що при створенні ефективних алгоритмів і програм збільшення порядку методу є кращим у порівнянні зі зменшенням кроку інтегрування

В даній роботі використовувалась бібліотека JiTCODE. У модулі JiTCODE використовується компіляцію «на льоту» для звичайних диференціальних рівнянь (технологія збільшення продуктивності програмних систем). JiTCODE це розширення до модулів ODE SciPy (scipy.integrate.ode) чи Solve IVP (scipy.integrate.solve\_ivp).

Щоб генерувати функції, необхідні для роботи SciPy's ODE або Solve IVP, JiTCODE виконує ряд різних операцій обробки, кожен з яких може бути викликаний через команду `i`, якщо потрібно, налаштувати. Ці команди виконують попередні кроки за потреби, якщо вони ще не виконані. Однак, якщо ми задоволені параметрами за замовчуванням, нам не потрібно турбуватися про це і просто використовувати команди в самому кінці ланцюга, а саме `set_integrator`, `set_initial_value` або `save_compiled` [4].

Отже найбільш ефективним методом розрахунку систем диференціальних рівнянь другого порядку є багатокроковий неявний методу Адамса-Мултона змінного порядку, та багатокроковий метод BDF змінного порядку (1-5).

Тому метою даної роботи є розрахунок показників Ляпунова для неспівмірної надструктури, що описуються двома диференціальними рівняннями другого порядку: [5]:

$$R'' - R^3 + (1 - \phi'^2 + T\phi')R - R^{n-1}K(\cos n\phi + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\phi'' + 2\frac{R'}{R}(\phi' - \frac{T}{2}) + R^{n-2}K \sin n\phi = 0 \quad (2)$$

де  $T = \sigma / (\gamma r)^2$ ,  $K = 2^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} n \omega u^{1-\frac{n}{2}}$ ,  $B_2 = \frac{\omega_2 (2u)^{\frac{n}{4}}}{2\omega r^{\frac{n}{2}}}$  — безрозмірні параметри ( $u$  — харак-

теризує величину ізотропних взаємодій, а  $\omega$  — величину анізотропних,  $n$  — ціле число, що характеризує симетрію потенціалу),  $\eta = (r/(2u))^{\frac{1}{2}} R$ ,  $z = (\gamma/r)^{\frac{1}{2}} \xi$  — безрозмірні змінні, а також перевірки ефективності багатокрокових методів Адамса-Мултона та BDF при розв'язуванні системи диференціальних рівнянь.

Систему (1), (2), що складається з двох диференціальних рівнянь другого порядку розв'язували чисельним методом BDF та методом Рунге-Куты. Отриманий спектр показників Ляпунова зображено на рис. 1. і рис. 2. На рис. 1 наведено залежність чотирьох показників Ляпунова розраховано методом BDF, який вимагав розрахунку матриці Якобіана. Згідно рис. 1 перший коефіцієнт Ляпунова є додатній, другий є від'ємний із незначним значенням його величини. Третій і четвертий показник є від'ємним. Слід зазначити, що вони проявляють сильно виражену аномальну поведінку в околі  $q = 1.5 \div 2.5$  і  $3.8 \div 5.0$ . При  $q < 1$  (за умови  $T = 1.0$ , тобто стійкості неспівмірної надструктури) дана система характеризується одним позитивним значенням показника Ляпунова і трьома від'ємними значеннями. Причому третій показник приймає від'ємне значення, яке по модулю значно перевищує інші показники. Отже, оскільки сума всіх показників Ляпунова є від'ємною, то система характеризується граничним циклом.

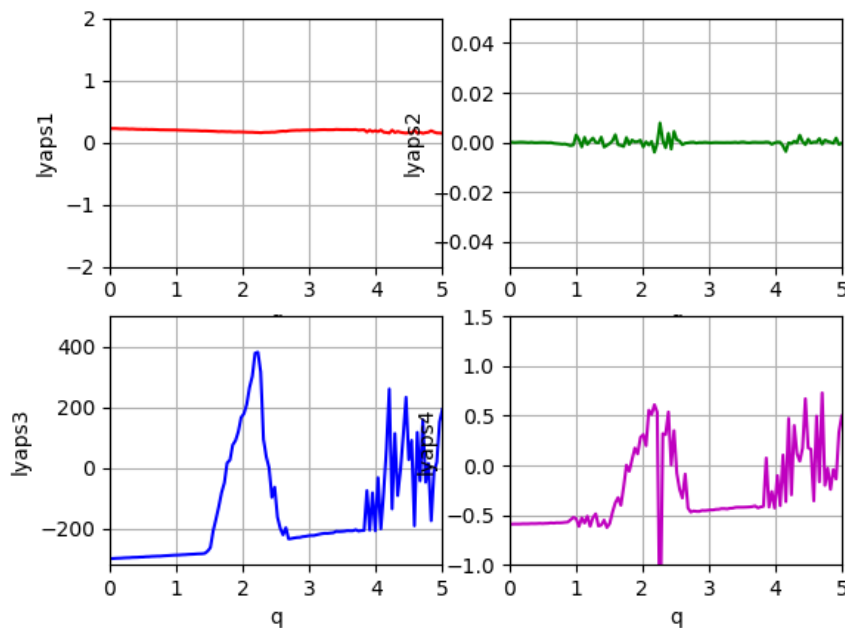


Рис. 1. Залежність показників Ляпунова ( $lyaps[i]$ ) від величини анізотропної взаємодії  $q = K$ , що описується інваріантом Дзялошинського при умові  $T = 1.0$ ;  $n = 4$ ;  $R = 0.3$ , розраховані методом BDF.

Розглянутий фазовий простір з розмірністю  $n = 4$  при  $q < 1.5$  характеризується дивним атрактором з одним позитивним показником Ляпунова (+, -, -, -). Отже неспівмірну фазу в синусоїдальному режимі можна розглядати як фазу що характеризується наявністю хаотичної надструктури. Відомо, що при появі гармонік неспівмірної надструктури та виникненням пінінгу останньої на дефектах кристалічної структури спостерігається перехід від синусоїдального до солітонного режиму неспівмірної надструктури. Солітонний режим неспівмірної надструктури характеризується появою довгоперіодичних співмірних фаз, та хаотичної фази при переході між двома співмірними довгоперіодичними фазами. Отже може мати місце ситуація, іменована гіперхаосом: (+, +, -, -), коли позитивних показників є два. На нашу думка така ситуація реалізується в околі  $q = 1.5 \div 2.5$  і  $3.8 \div 5.0$ .

Аналогічна картина поведінки показників Ляпунова спостерігається при розрахунку їх методом Рунге-Куты (RK4.5) (рис.2). Відмінність отриманих показників Ляпунова полягає в наявності “тонкої” структури при розрахунку методом BDF.

Отже розрахунок показників Ляпунова методом BDF дає повнішу картину режимів даної системи.

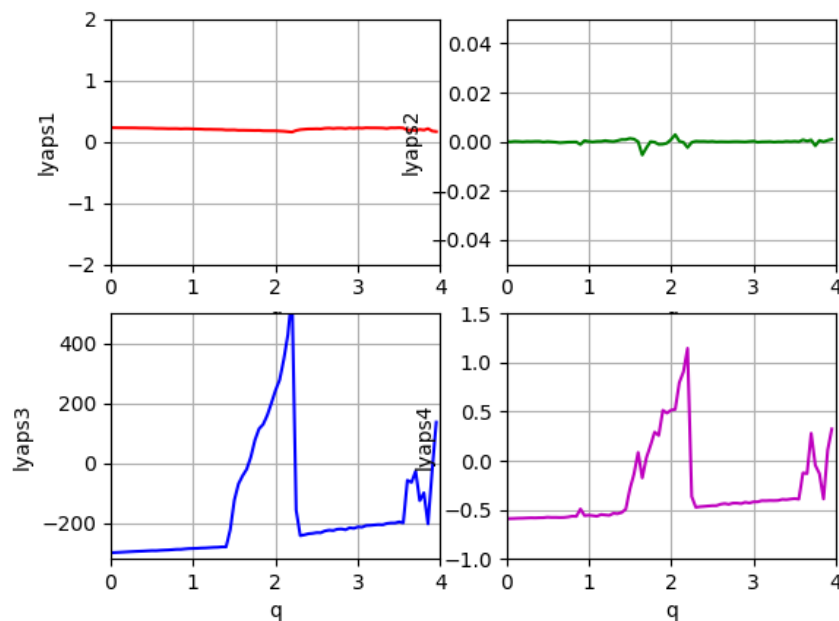


Рис.2. Залежність показників Ляпунова ( $lyaps[i]$ ) від величини анізотропної взаємодії  $q = K$ , що описується інваріантом Дзялошинського при умові  $T = 1.0$ ;  $n = 4$ ;  $R = 0.3$ , розраховані методом Рунге-Куты (RK4.5).

Оскільки найбільш аномальних змін зазнає третій показник Ляпунова ( $\lambda_3$ ), то розглянемо його поведінку від одночасної зміни параметрів  $T$  і  $K$ . На рис. 3 наведено об'ємна діаграма поведінки  $\lambda_3$  від даних параметрів

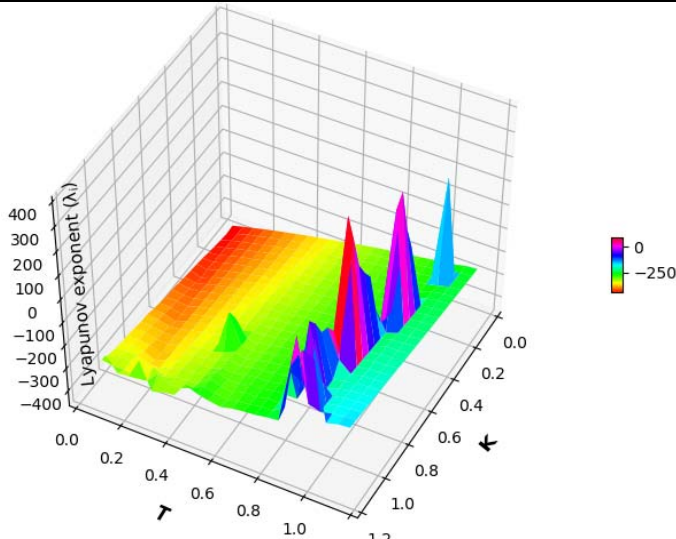
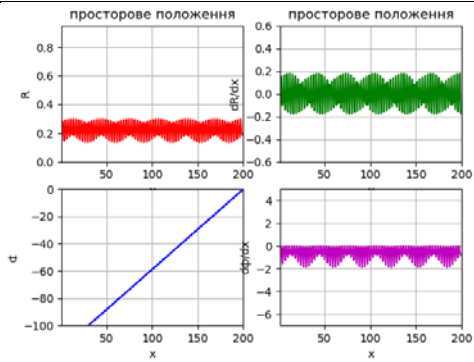


Рис.3. Залежність коефіцієнта Ляпунова від параметрів  $T$  і  $K$  при умові  $T = 1.0$ ;  $n = 4$ ;  $R = 0.3$ .

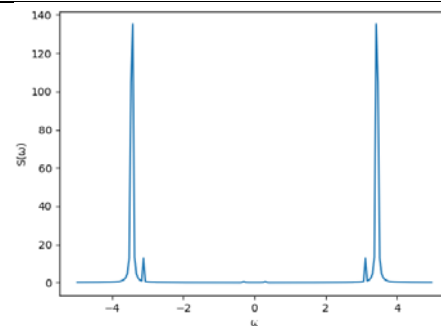
Отримана аномальна залежність  $\lambda_3$  від  $T$  і  $K$  носить пульсуючий характер в околі  $K = 1.5 \div 2.5$ . Слід зазначити що аномальна зміна  $\lambda_3$  починає спостерігатись вже при малих значеннях  $T$ . В розглянутому діапазоні  $K$  величина аномальної зміни  $\lambda_3$  збільшується зі збільшенням величини параметра  $T$ , а при значеннях  $T = 0.3 \div 0.5$  приймає максимальне позитивне значення. Отже можна припустити що в околі значень параметрів  $K = 1.5 \div 2.5$  система набуває гіперхаотичного стану, з подальшим переходом в стан який характеризується існуванням співмірних довгоперіодичних станів [6]. Для підтвердження чи спростування такої динаміки неспівмірної надструктури були проведені дослідження Фур'є спектрів даної системи. На рис. 4 наведено просторову поведінку параметрів порядку даної системи та Фур'є спектри.

Фур'є спектр граничного циклу при  $T = 1.0$  і  $K = 0 - 1.0$  є дискретним з чіткими піками при частотах, які відповідають основним гармонікам циклу. На відміну від граничного циклу, розподіл спектральної густини хаотичного атратора, який виникає при  $T = 1.0$  і  $K = 2.0$  (рис. 1 і рис. 2) є неперервною, але в ньому збереглися всі піки, які умовно кажучи є "пам'яттю" про гармоніки зниклого граничного циклу. Вони чітко виділяються в неперервному Фур'є спектрі. Хаотичний атратор характеризується аномальною просторовою поведінкою амплітуди і фази параметра порядку (рис. 4). Подальше збільшення параметра анізотропної взаємодії ( $K$ ), що описується інваріантом Дзялошинського супроводжується зникненням хаотичного атратора, про що свідчать Фур'є спектри при  $K = 2.5$  і  $3.5$ . При даних значеннях  $K$  Фур'є спектр є дискретним з чіткими піками при частотах, які відповідають основним гармонікам циклу, при чому з ростом величини параметра  $K$  простежується зменшення кількості основних гармонік циклу. Однак слід зазначити, що кількість піків, які відповідають стану системи до хаосу і після нього є різною. При чому стан системи після хаосу характеризується більшою кількістю основних гармонік.

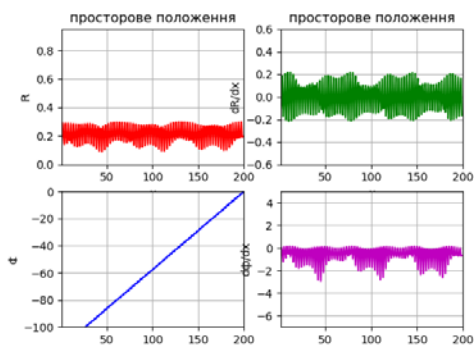
При  $K > 3.7$  система переходить в хаотичний стан (рис. 1, рис. 2), а розподіл спектральної густини хаотичного атратора є неперервним. Причому в його Фур'є спектрі практично повністю зникли окремі спектральні піки.



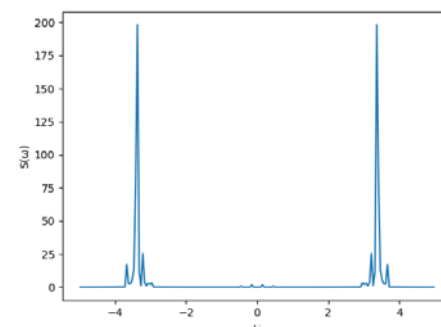
$T = 1.0, K = 0.0, n = 4$



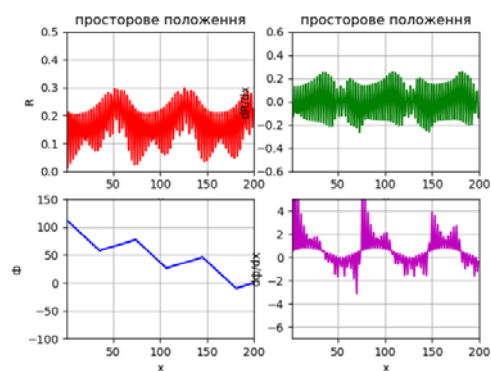
$T = 1.0, K = 0.0, n = 4$



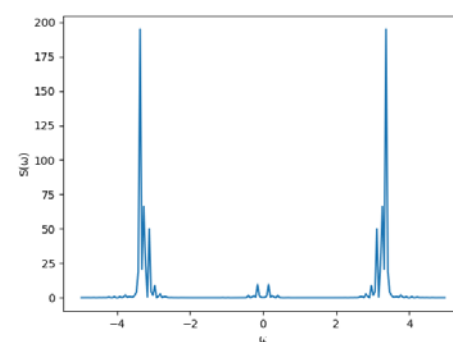
$T = 1.0, K = 0.5, n = 4$



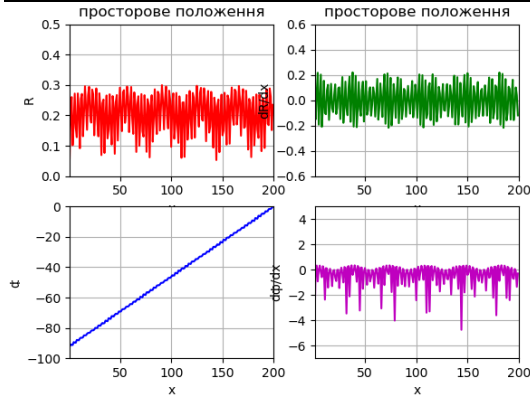
$T = 1.0, K = 0.5, n = 4$



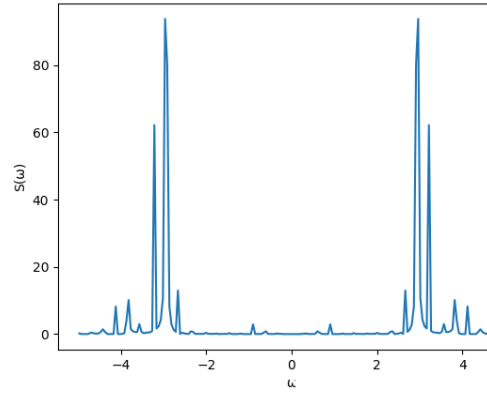
$T = 1.0, K = 2, n = 4$



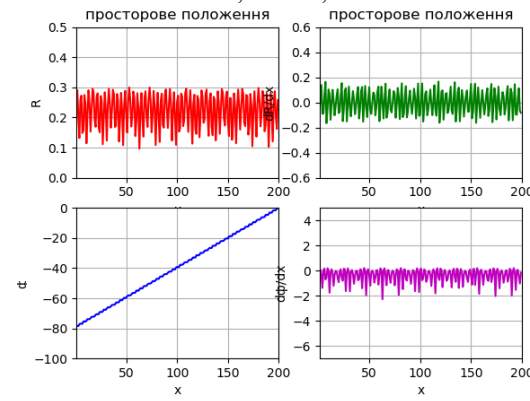
$T = 1.0, K = 2, n = 4$



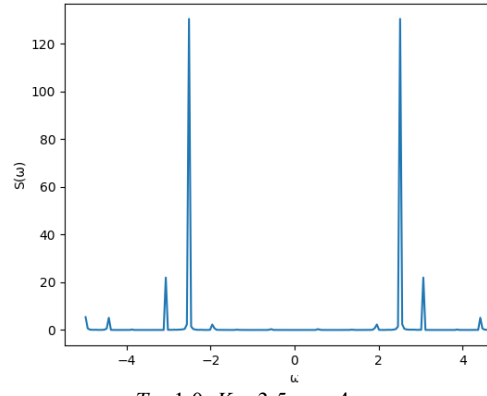
$T = 1.0, K = 2.5, n = 4$



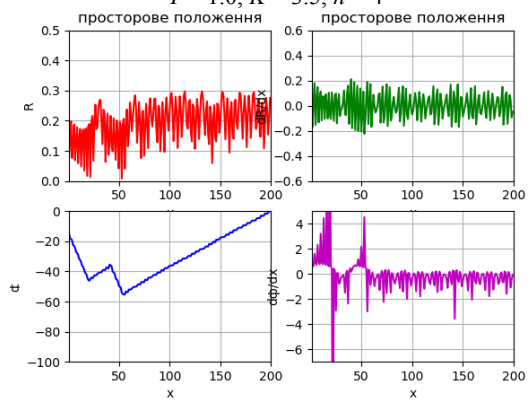
$T = 1.0, K = 2.5, n = 4$



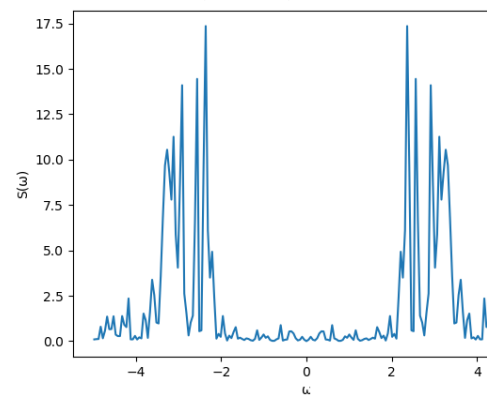
$T = 1.0, K = 3.5, n = 4$



$T = 1.0, K = 3.5, n = 4$



$T = 1.0, K = 4.2, n = 4$



$T = 1.0, K = 4.2, n = 4$

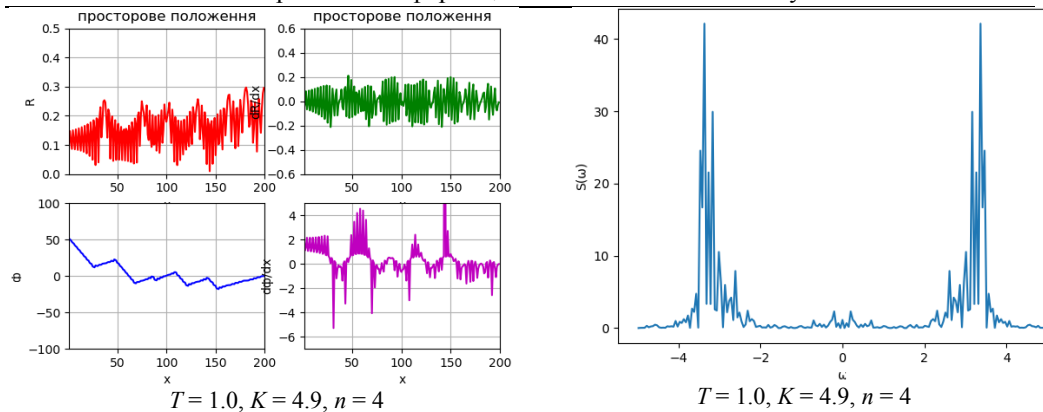


Рис.4. Просторова поведінка амплітуди параметра порядку  $R$ , його фази  $\varphi$ , і їх похідних  $dR/dx$ ,  $d\varphi/dx$ , та фур'є спектрів в залежності від параметрів  $T$  і  $K$  для  $n = 4$ .

Отже виходячи із вище викладеного можна зробити наступні висновки. Вперше для кристалів групи  $A_2VX_4$ , які в певному температурному інтервалі володіють неспівмірною надструктурою, яка описується системою диференціальних рівнянь (вирази 1 і 2), були розраховані показники Ляпунова в широкому діапазоні параметрів, які визначають динаміку даної надструктури.

Встановлено що для неспівмірної надструктури характерне додатне значення одного показника Ляпунова, та від'ємні значення інших трьох показників. Другий показник Ляпунова набуває невеликих значення в околі нуля. Третій і четвертий показник є від'ємні. Оскільки третій показник набуває значення, яке значно перевищує суму всіх інших, то сума всіх показників Ляпунова є негативною. Отже неспівмірна структура характеризується як система що має атрактор. Для неспівмірної надструктури яка описується двокомпонентним параметром порядку притаманний спектр показників Ляпунова, який характеризується постійним додатнім значенням першого показника Ляпунова. Сильно вироджена аномальна поведінка третього і четвертого показника Ляпунова, засвідчує, що неспівмірній надструктурі притаманний як гіперхаос (описує появу хаотичної фази), так і квазістабільного стану з появою довгоперіодичних співмірних фаз. Отримані Фур'є спектри неспівмірної надструктури засвідчують, що основний стан системи характеризується граничним циклом.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. –Физматлит, М. - 2001. – 296 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Пер. с англ. / Ф. Мун – Наука, М. – 1990. – 312 с.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. / В.С. Анищенко –Наука, М. - 1990. – 312 с.
4. Gerrit Ansmann. Efficiently and easily integrating differential equations with JiTCODE, JiTCDDE, and JiTCSDE. Mathematical Software. / A. Gerrit / Chaos. 2018. – 28. – 043116.
5. Multi-steps methods for Calculating the phase portrait of the incommensurate superstructure with the Lifshitz's invariant / S. Sveleba, I. Katerynchuk, I. Kuno, I. Karpa // Proceeding of the Xth International Scientific and Practical Conference “Electronics and Information Tech-



- nologies” (ELIT-2018), Lviv-Karpaty village, August 30 – September 2, 2018. – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2018. – A155.
6. *Kuno I.M.* Inhomogeneous States of Thin-layer Crystals with Incommensurate Superstructure / I.M. Kuno, S.A. Sveleba, I.V. Karpa, I.M. Katerynchuk // J. Nano- Electron. Phys. - 2018. - Vol. 10, No 2 - P. 02026(1)-02026(6).

## THE INFLUENCE OF ANISOTROPIC INTERACTION OF THE INCOMMENSURATE SUPERSTRUCTURE ON THE BEHAVIOR OF THE LYAPUNOV'S EXPONENTS

S. Sveleba, I. Katerynchuk, I. Kuno, I. Karpa, Ya. Shmygelsky

*Ivan Franko National University of Lviv,  
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine  
[incomlviv@gmail.com](mailto:incomlviv@gmail.com)*

Lyapunov's exponents for a wide range of parameters were first calculated for the A2BX4 family of crystals, which have an incommensurate superstructure. Lyapunov's exponents determine the dynamics of the incommensurate superstructure. They were calculated by the implicit Adams-Multon and Runge-Kut method in the Python software environment using the jitcode library.

The Adams-Multon (BDF) method, in comparison with the Runge-Kut method (RK45), allows us to obtain a thin structure of Lyapunov's exponents.

The positive value of one Lyapunov's exponent, and the negative value of the other three exponents, is characteristic of the incommensurate superstructure, which was established. Since the third exponent acquires a value that far exceeds the sum of all others, the incommensurate superstructure is characterized as a system having an attractor. For an incommensurate superstructure which is described by a two-component order parameter, the characteristic range of Lyapunov's exponents is characterized, which is characterized by constant positive values of the first Lyapunov's exponent. The strongly degenerate abnormal behavior of Lyapunov's third and fourth exponents shows that the incommensurate superstructure is inherent in both hyperchaos and the establishment of a quasi-stable state with the appearance of long-periodic commensurate phases.

A incommensurate phase in sinusoidal mode can be considered as a phase characterized by a strange attractor with one positive Lyapunov's exponent (+, -, -, -). The soliton mode of the incommensurate superstructure is characterized by the appearance of long-periodic commensurate phases, and the chaotic phase in the transition between two commensurate long-periodic phases. So there is a situation called hyperchaos: (+, +, -, -), when there are two positive exponents.

The Fourier obtained spectra of the incommensurate superstructure indicate that the ground state of the system is characterized by a boundary cycle. The Fourier spectrum of the boundary cycle is discrete with distinct peaks at frequencies corresponding to the fundamental harmonics of the cycle. The distribution of the spectral density of the chaotic attractor, which arises at  $T = 1.0$  and  $K = 2.0$  in comparison with the limit cycle, is continuous, but all peaks are preserved in it, which, conventionally speaking, is a "memory" of the harmonics of the missing boundary cycle. They are clearly distinguished in a continuous Fourier spectrum. The abnormal spatial behavior of the amplitude and phase of the order parameter is characterized by a chaotic attractor.

*Key words:* incommensurate superstructures, phase portraits, Lyapunov's exponents.

*Стаття: надійшла до редакції 09.04.2019,  
доопрацьована 23.04.2019,  
прийнята до друку 24.04.2019*