

ОСОБЛИВОСТІ ПОВЕДІНКИ ЛЯПУНОВСЬКИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ВІД СИМЕТРІЇ ТЕРМОДИНАМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ, ЯКИЙ ОПИСУЄТЬСЯ ІНВАРІАНТОМ ЛІФШИЦЯ

С. Свелеба, І. Катеринчук, І. Куньо, І. Карпа, Я. Шмигельський.

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Ген. Гарнавського, 107, 79017 Львів, Україна
incomlviv@gmail.com*

В роботі досліджено вплив симетрії термодинамічного потенціалу (n) на характер поведінки коефіцієнтів Ляпунова. Розрахунок системи диференціальних рівнянь другого порядку здійснено багатокроковим методом BDF змінного порядку. Розрахунок ляпуновських коефіцієнтів виконано в програмному середовищі Python із використанням бібліотек Skipy, JitCODE.

Встановлено, що при значеннях $n \geq 5$ динаміка неспівмірної надструктури визначається просторовою зміною амплітуди параметра порядку (першим інтегралом руху неспівмірної надструктури). За значень $n < 5$ динаміка неспівмірної надструктури визначається просторовою зміною фази параметра порядку та її збуренням. Показано, що на динаміку надструктури не впливає сегнетоелектрична, чи сегнетоеластична природа неспівмірної надструктури.

Ключові слова: неспівмірна надструктура, фазовий портрет, показники Ляпунова.

Відомо [1], що показники Ляпунова динамічної системи визначають швидкість поділу нескінченно близьких траєкторій. Вони відіграють вагомую роль у виявленні поведінки динамічної системи.

Ідея показників Ляпунова полягає у визначенні характеристичних чисел для динамічної системи, що дозволяє класифікувати поведінку системи у стислій формі. Позитивне значення показника Ляпунова свідчить про хаотичну поведінку системи, а від'ємне значення характеризує швидкість відновлення динамічної системи після збурення. Ці числа повинні враховувати експоненціальну збіжність або дивергенцію траєкторій, які близькі одна до одної. Кількість коефіцієнтів Ляпунова, що описують поведінку динамічної системи, дорівнює розмірності цієї системи. Якщо сума всіх показників Ляпунова є негативна, то система має атрактор. Для практичного застосування найважливішим є значення найбільшого показника Ляпунова. Якщо найбільше значення в спектрі показників Ляпунова позитивне, це означає, що система хаотична. Найбільше значення дорівнює нулю вказує на періодичну або квазіперіодичну динаміку. Якщо всі показники Ляпунова є негативними, то стабільною критичною траєкторією є атрактор.

Метою даної роботи є розрахунок показників Ляпунова для неспівмірної надструктури, що описуються двома диференціальними рівняннями другого порядку [2]:

$$R'' - R^3 + (1 - \varphi'^2 + T\varphi')R - R^{n-1}K(\cos n\varphi + 1) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi'' + 2\frac{R'}{R}(\varphi' - \frac{T}{2}) + R^{n-2}K \sin n\varphi = 0, \quad (2)$$

де $T = \sigma/(\gamma r)^{\frac{1}{2}}$, $K = 2^{-\frac{n}{2}} r^{\frac{n-2}{2}} n \omega u^{1-\frac{n}{2}}$ — безрозмірні параметри, n — ціле число, що характеризує симетрію потенціалу, та безрозмірні змінні $\eta = (r/(2u))^{\frac{1}{2}} R$, $z = (\gamma/r)^{\frac{1}{2}} \xi$, та вплив симетрії термодинамічного потенціалу (n) на характер поведінки коефіцієнтів Ляпунова. Відомо [3], що найбільш ефективними методами розрахунку систем диференціальних рівнянь другого порядку є багатокроковий неявний метод Адамса-Мултона змінного порядку, та багатокроковий метод BDF змінного порядку.

Розрахунок коефіцієнтів Ляпунова виконано в середовищі Python із використанням бібліотек Skipy, JiTCODE по методиці описаної в роботі [4].

Систему (1), (2), що складається з двох диференціальних рівнянь другого порядку розв'язували чисельним методом BDF. Отриманий спектр показників Ляпунова зображено на рис. 1. На рис. 1 для кожного значення n наведено залежність чотирьох показників Ляпунова розраховано методом BDF, який вимагав розрахунку матриці Якобіана. Згідно рис. 1 перший коефіцієнт Ляпунова є додатній, другий є від'ємний із незначним значенням його величини. Третій і четвертий показник є від'ємним. При $q < 1$ (за умови $T = 1.0$, тобто стійкості неспівмірної надструктури) дана система характеризується одним позитивним значенням показника Ляпунова і трьома від'ємними значеннями. Причому третій показник приймає від'ємне значення, яке по модулю значно перевищує інші показники. Отже сума всіх показників Ляпунова є негативна, то система має аттрактор.

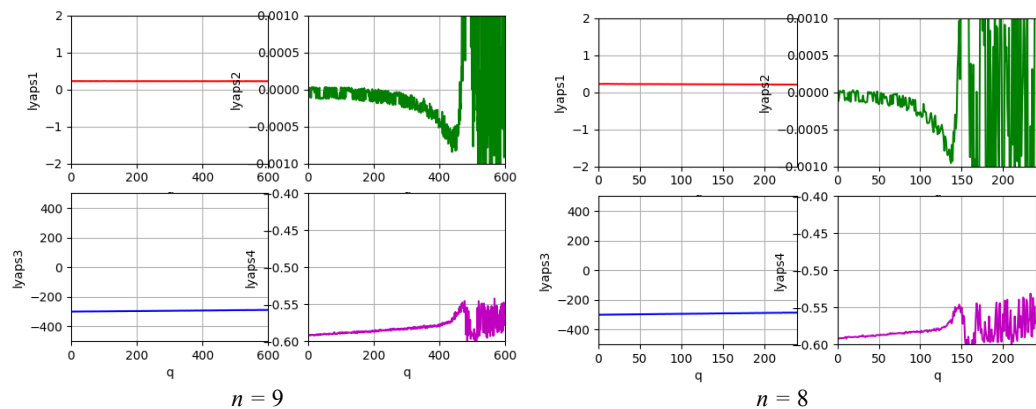


Рис. 1. Залежність величини коефіцієнтів Ляпунова від величини анізотропної взаємодії $K = q$, яка описується інваріантом Дзялошинського, при різних значеннях параметра n , за умови $T = 1.0$, $R = 0.3$.

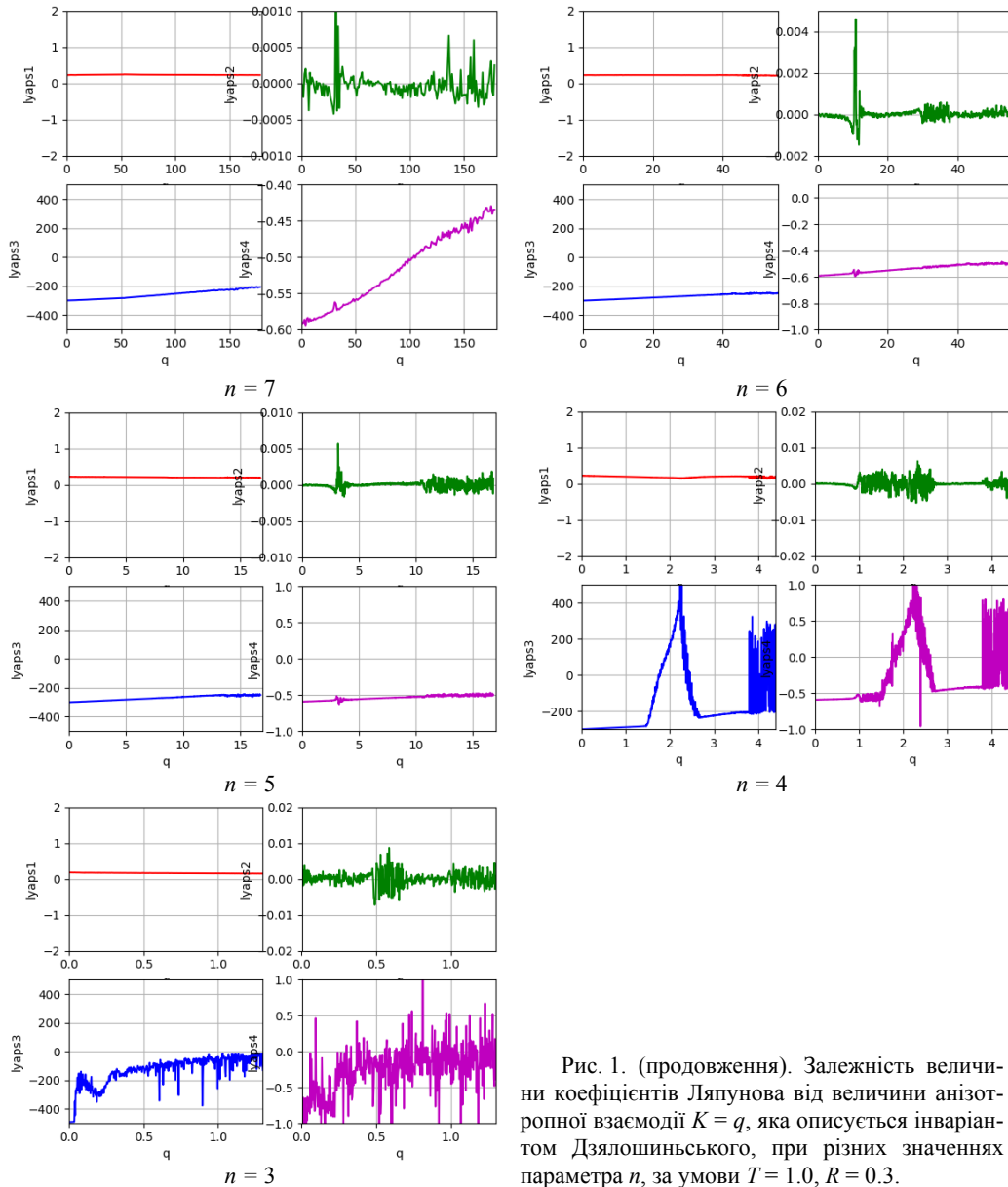


Рис. 1. (продовження). Залежність величини коефіцієнтів Ляпунова від величини анізотропної взаємодії $K = q$, яка описується інваріантом Дзялошинського, при різних значеннях параметра n , за умови $T = 1.0$, $R = 0.3$.

Проводячи аналіз по впливу величини параметра n на поведінку коефіцієнтів Ляпунова, слід зазначити, що при $n \geq 5$ простежується аномальна поведінка другого коефіцієнта Ляпунова (λ_2). Із розглянутої залежності ($\lambda_2 \sim f(q)$) можна стверджувати, що перехід до хаотичного стану в даних системах походить при: $n = 9$, $q > 450$; $n = 8$, $q > 150$; $n = 7$, $q > 70$; $n = 6$, $q > 30$; $n = 5$, $q > 10$.

Отже за умови зменшення величини параметра n спостерігається пониження стійкості досліджуваної системи. Таким чином перехід до хаосу в даній системі пов'язаний з аномальною поведінкою коефіцієнта λ_2 , який несе інформацію про швидкість зміни амплітуди параметра порядку, і є характеристикою першого інтеграла руху. Слід також відмітити, що на залежностях $\lambda_2 \sim f(q)$ для $n = 5$, $q \sim 2.5 \div 3.5$; $n = 6$, $q \sim 10 \div 12$; $n = 7$, $q \sim 25 \div 30$ спостерігається аномальна поведінка з подальшою монотонною зміною ($n = 5$, $q \sim 3.5 \div 11$; $n = 6$, $q \sim 12 \div 30$; $n = 7$, $q \sim 30 \div 100$), що свідчить про наявність інтервалу впорядкування, а отже і самоорганізацію даної системи. Про виникнення стану який описується як самоорганізація неспівмірної надструктури, зазначалося в праці [5], де описувалась неспівмірна надструктура в стохастичному її режимі. Тобто даний стан характеризується наявністю як хаотичної фази, так і співмірних довгоперіодичних фаз.

При $n < 5$ в динамічні процеси системи включається і фазова складова параметра порядку неспівмірної надструктури. На залежностях $\lambda_3 \sim f(q)$ і $\lambda_4 \sim f(q)$, які відповідають за поведінку фази параметра порядку та її зміну, проявляються явно виражені аномальні зміни при переході до хаосу: $n = 4$, $q > 3.8$; $n = 3$, $q > 0.8$. Такі аномальні зміни також прослідковуються і на залежності $\lambda_2 \sim f(q)$. При $n < 5$ спостерігаються аномальні зміни не тільки на λ_2 а й на інших коефіцієнтах Ляпунова (λ_4 і λ_3). Так при $n = 4$ в околі $q = 1.5 \div 2.5$ і при $n = 3$ в околі $q = 0.1 \div 0.2$ прослідковується стан який характеризує хаотичну поведінку даної системи, про що свідчать також дослідження фазових портретів [6], та спектральних характеристик даної системи [7]. Поза цим діапазоном система знову характеризується монотонною поведінкою λ_2 , λ_3 , λ_4 , а з даних по дослідженню фазових портретів, можна зробити висновок, що система знаходиться в стані що характеризується як самоорганізація системи. Отже відмінність у поведінці коефіцієнтів Ляпунова при $n \geq 5$ і при $n < 5$, пов'язана з тим що при $n < 5$ значну роль в динаміці надструктури відіграє фаза параметра порядку, та її спотворення.

В підтвердженні останнього висновку виступають спектри потужності, які наведені на рис. 2 і рис. 3. Отримані залежності засвідчують, що при $n \geq 5$ спектр потужності отриманий із просторової поведінки параметра порядку при переході до хаотичної динаміки надструктури характеризується більшою кількістю смуг (рис. 2) ніж при $n < 5$.

Проводячи аналіз впливу парності параметра n на динаміку неспівмірної надструктури, згідно із результатів наведених на рис. 1, можна зазначити, що як для парних n так і для непарних значень n якоїсь особливої поведінки коефіцієнтів Ляпунова не відмічалось. Отже для сегнетоелектричних та сегнетоеластичних кристалів в яких існує неспівмірна надструктура, яка описується двохкомпонентним параметром порядку особливостей у зміні динаміки неспівмірної надструктури не буде відмічатись.

Виходячи із результатів досліджень впливу симетрії темодинамічного потенціалу на поведінку коефіцієнтів Ляпунова можна зробити наступні висновки:

При значеннях $n \geq 5$ динаміка неспівмірної надструктури визначається просторовою зміною амплітуди параметра порядку (першим інтегралом руху неспівмірної надструктури)

При $n < 5$ динаміка неспівмірної надструктури визначається просторовою зміною фази параметра порядку та її збуренням.

На динаміку надструктури не впливає сегнетоелектрична, чи сегнетоеластична природа неспівмірної надструктури.

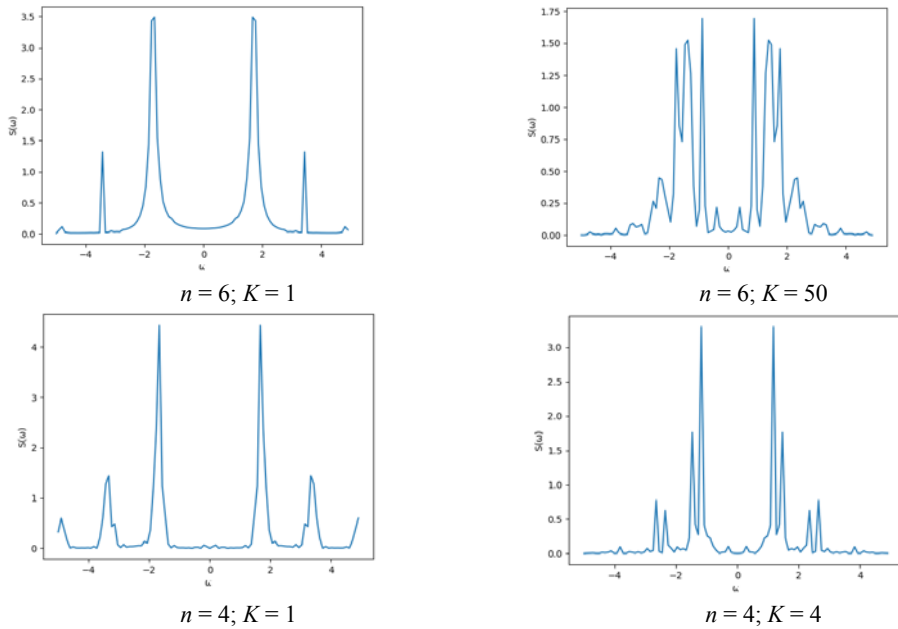


Рис. 2. Спектри потужності отримані із просторової поведінки параметра порядку за умови: $R_0 = 0.3; R' = 0; \varphi_0 = 0; \varphi' = 0; T = 1.0$, при різних значеннях параметра K та n .

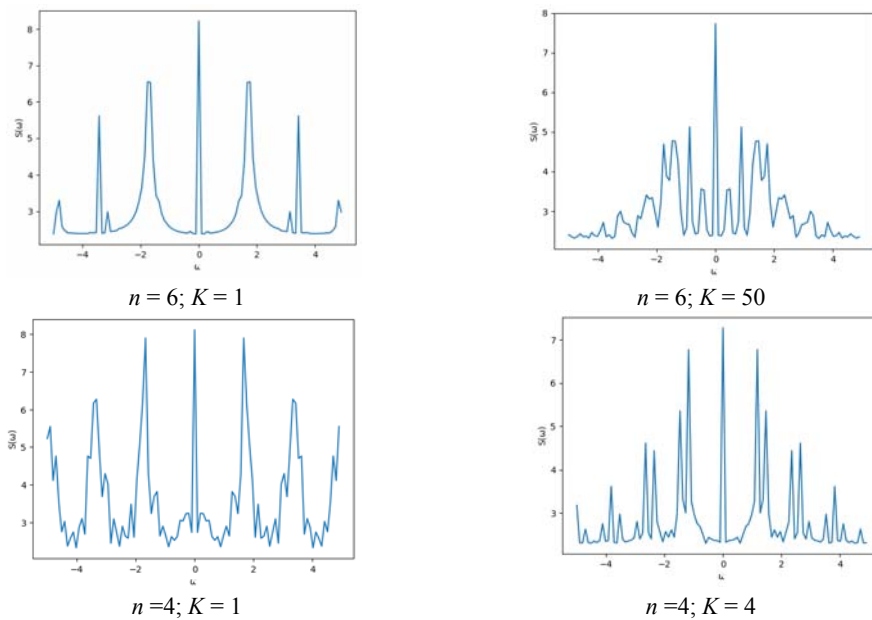


Рис. 3. Спектри потужності отримані із фазової характеристики параметра порядку за умови: $R_0 = 0.3; R' = 0; \varphi_0 = 0; \varphi' = 0; T = 1.0$, при різних значеннях параметра K та n .

Розглянемо вплив початкових умов на динаміку неспівмірної надструктури. Оскільки при $n < 5$ динаміка неспівмірної надструктури визначається фазовою складовою параметра порядку, то розглянемо вплив початкового значення φ_0 на динаміку неспівмірної надструктури за умови $T = 1.0$, $n = 4$, $R = 0.3$. На рис. 4 наведено зміну ляпуновських коефіцієнтів за умови $\varphi_0 = 0.3$ і $\varphi_0 = 0.6$ та 0.9 . На відміну від $\varphi_0 = 0$ при $\varphi_0 \neq 0$ проходить процес «подавлення» аномальної поведінки коефіцієнтів λ_3 і λ_4 та розширення областей самоорганізації надструктури ($\varphi_0 = 0.3$; $q = 1.0 \div 1.4$; $q = 2.3 \div 2.4$; $\varphi_0 = 0.6$; $q = 0.7 \div 1.2$; $q = 1.5 \div 2.5$; $\varphi_0 = 0.9$; $q = 0.7 \div 1.2$; $q = 1.4 \div 2.6$).

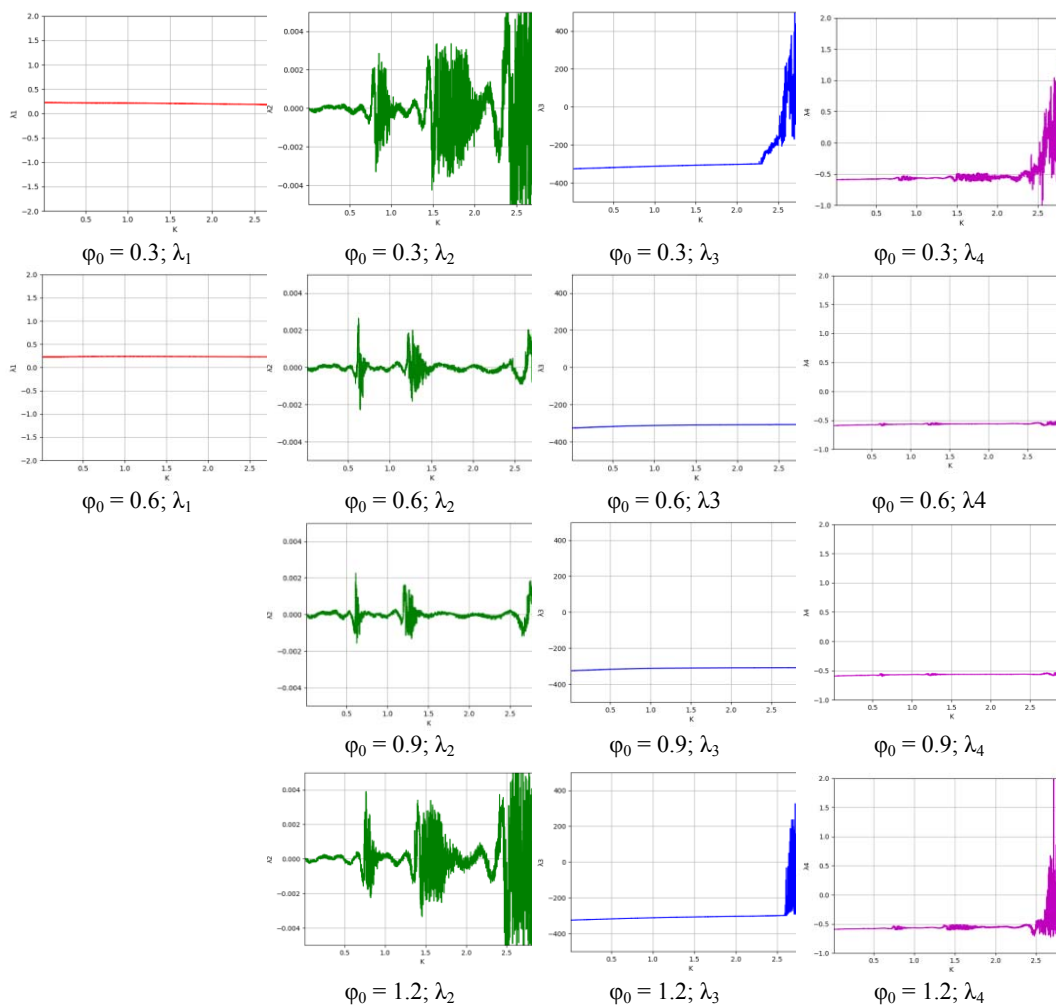


Рис.4. Залежність величини коефіцієнтів Ляпунова від величини анізотропної взаємодії $K = q$, яка описується інваріантом Дзялошинського, при різних початкових значень φ_0 (фази параметра порядку), за умови $T = 1.0$, $R = 0.3$, $n = 4$.

З метою отримання картини динаміки неспівмірної надструктури були проведені дослідження фазових портретів в координатах R , R' і φ при різних значеннях K і φ_0 . На рис. 5 наведено фазові портрети досліджуваної системи за умови $n = 4$. Як і для $\varphi_0 = 0.3$ так і для $\varphi_0 = 0.6$ і 0.9 , згідно рис. 5 динаміку даної системи можна розбити на 3 етапи. Перший діапазон виникнення хаосу характеризується заповнення простору між атрactorами ($\varphi_0 = 0.3$; $K = q = 0.8$; $\varphi_0 = 0.6$; $K = 0.6$). Перехід в область самоорганізації надструктури характеризується появою областей прозорості і атрactorів у вигляді шлейфу ($\varphi_0 = 0.3$; $K = 1.2$; $\varphi_0 = 0.6$; $K = 1.0$). Другий етап переходу до хаосу ($\varphi_0 = 0.3$; $K = 1.6$; $\varphi_0 = 0.6$; $K = 1.3$) можна пов'язати із розширенням атрactorів та подальшому зменшенні області прозорості у фазовому портреті. Другий як і перший перехід до області самоорганізації даної системи супроводжується незначним «просвітленням» даного фазового портрету з чітко вираженими атрactorами у вигляді шлейфу. Незначне «просвітлення» даного фазового портрету зумовлено появою більшого кількості атрactorів. Третій перехід до хаосу характеризується виникненням хаотичного атрactorа який володіє більш складнішою структурою фазового портрета чим хаотичні атрactorи які розглянуті вище. Проекція такого атрactorа складається з двох симетричних відносно осі абсцис частин. Рух типової траєкторії по хаотичному атрactorу можна умовно розбити на дві фази. В першій фазі траєкторії здійснюють хаотичні рухи вздовж витків верхньої (нижньої) частини атрactorа час від часу переходячи до границі області локалізації де втрачається стійкість верхніх (нижніх) симетричних граничних циклів. В непередбачуваний момент часу траєкторія переходить із верхньої (нижньої) частини атрactorа до його верхньої (нижньої) частини. Такий процес повторюється безкінечно число разів. Таким чином перехід до хаосу має особливості характерні для сценарію Фейгенбаума (безкінечний каскад біфуркацій подвоєння періодів циклів), так і для переважаючості (непередбачуваної переважаючості між верхньою і нижньою частинами виникаючого хаотичного атрactorа).

Процес самоорганізації можна пов'язати із локалізацією хвильового вектора неспівмірної надструктури на співмірному значенні вищого порядку. Локалізація хвильового вектора неспівмірності на співмірних значеннях вищого порядку експериментально спостерігалось в діелектричних кристалах [8] при зміні лінійних розмірів кристала вздовж осі існування в ньому неспівмірної надструктури, при значеннях товщини кристала набагато більшими ніж період надструктури ($d_c = 600$ мкм).

Отже спотворення фази параметра порядку на краю кристала можна в першому наближенні пов'язати з граничними умовами. Такі каскадні переходи до хаосу на думку авторів пов'язано з режимами існування неспівмірної надструктури. Появу хаосу на третьому етапі спричинено переходом неспівмірної надструктури до її стохастичного режиму існування. В стохастичному режимі існування неспівмірної надструктури виникає хаотична, можливо неспівмірна фаза [9], яка і є прототипом даного хаотичного стану. Слід також зазначити, що початкові умови (граничні умови) стабілізують систему приводячи тим самим до зняття виродженості системи, та переходу неспівмірної надструктури до стану, який характеризується існуванням довгоперіодичних співмірних фаз.

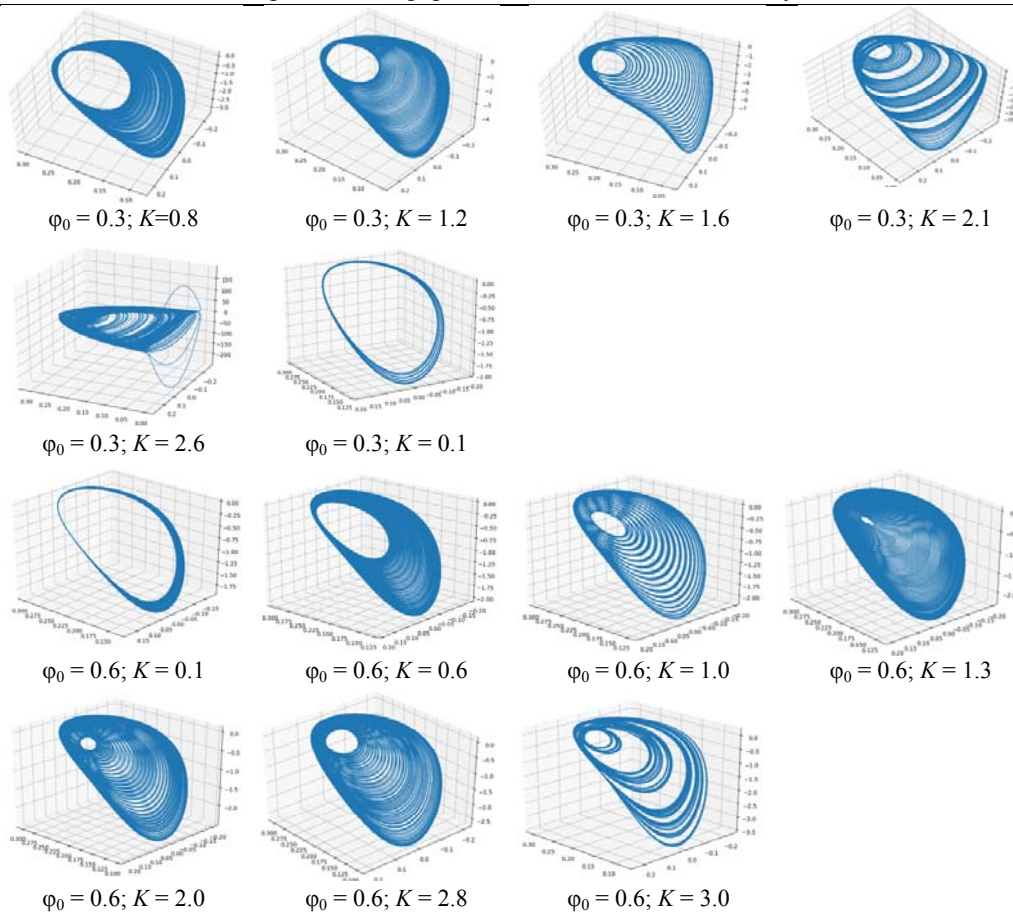


Рис. 5. Фазовий портрет системи в координатах R , dR/dx , $d\varphi/dx$ при різних початкових значень φ_0 (фази параметра порядку) та K , за умови $T = 1.0$, $R = 0.3$, $n = 4$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. – Физматлит, М. - 2001. – 296с.
2. Ктиторов С. А. Неоднородные состояния в тонких пленках несобственного несоразмерного сегнетоэлектрика с инвариантом Лифшица / С. А. Ктиторов, О. С. Погорелова, Е. В. Чарная. // ФТГ. – 2009. – Т. 51. – № 8. – С. 1480–1482.
3. Мун Ф. Хаотические колебания: Пер. с англ. / Ф. Мун – Наука, М. – 1990. – 312с.
4. Свелеба С. Фазові портрети неспівмірних надструктур, які описуються інваріантом Ліфшица / С. Свелеба, І. Катеринчук, І. Куньо, І. Карпа // IX Міжнародна наукова конференція "Релаксаційно, нелінійно, акустичнооптичні процеси і матеріали" (РНАОПМ-2018) - 01-05 червня 2018. - Луцьк-Світязь, Україна. – С. 176.
5. Cummins H. Z. Experimental Studies of structurally incommensurate crystal phases / H. Z. Cummins // Physics Reports. – 1990. – V. 185, № 5, 6. – P. 211–409.

6. *Kuno I.M.* Inhomogeneous States of Thin-layer Crystals with Incommensurate Superstructure / I.M. Kuno, S.A. Sveleba, I.V. Karpa, I.M. Katerynychuk // *J. Nano-Electron. Phys.* - 2018. - Vol. 10, No 2 - P 02026(1)-02026(6).
7. *Sveleba S.* Properties of Anisotropic Interaction of the Incommensurate Superstructure as Described by Dziloshinsky's Invariant / S. Sveleba, I. Katerynychuk, I. Kunyo, I. Karpa // *The X th International Scientific and Practical Conference "Electronics and Information Technologies" (ELIT-2018)* - August 30 – September 2, 2018. - Lviv-Karpaty village, Ukraine. - A-159–162.
8. *Куньо І. М.* Розмірні ефекти в діелектричних кристалах $[N(CH_3)_4]_2MeCl_4$ ($Me = Cu; Zn; Mn; Co$) з неспівмірною фазою: монографія/ І. М. Куньо, І. В. Карпа, С. А. Свелеба, І. М. Катеринчук. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2019. -220с.
9. *Свелеба С. А.* Температурна еволюція двозаломлення у стохастичному режимі неспівмірної фази кристалу $[N(CH_3)_4]_2CuCl_4$ / С. А. Свелеба, О. В. Семотюк, І. М. Катеринчук, І. М. Куньо, І. В. Карпа, Р. Пастухов // *Вісн. Львів. Ун-ту. Сер. фіз.* - Вип. 42. – 2008. – С. 174–183.

THE FEATURES OF BEHAVIOR OF THE LYAPUNOV'S EXPONENTS FROM THE SYMMETRY OF THERMODYNAMIC POTENTIAL DESCRIBED BY LIFSHITZ INVARIANT

S. Sveleba, I. Katerynychuk, I. Kunyo, I. Karpa, Ya. Shmygelsky

*Ivan Franko National University of Lviv,
107 Tarnavsky St., UA-79017 Lviv, Ukraine
incomlviv@gmail.com*

The influence of the thermodynamic potential (n) symmetry on the behavior of the Lyapunov exponents is investigated. The calculation of the system of second-order differential equations was performed by a multi-step variable-order BDF method. The Lyapunov coefficients were calculated using Python software using Skipy, JiTCODE libraries.

It is established that for values of $n \geq 5$, the dynamics of the incommensurate superstructure is determined by the spatial change in the amplitude of the order parameter (the first integral of the motion of the incommensurate superstructure). For $n < 5$, the dynamics of a incommensurate superstructure is determined by the spatial change of the phase of the order parameter and its perturbation. It is shown that the dynamics of the superstructure is not affected by the ferroelectric or ferroelastic nature of the incommensurate superstructure.

In order to obtain a detailed picture of the dynamics of the incommensurate superstructure, phase portraits were investigated in the coordinates R , R' , and φ at different values of the anisotropic interaction of the superstructure and the initial phase values of the order parameter φ_0 . It is established that the dynamics of this system is determined by the cascades of transition to chaos and areas of self-organization of the superstructure. It is shown that at the final stage of the transition to chaos, the system is characterized by the emergence of a chaotic attractor, which has a more complex phase portrait structure.

The projection of such an attractor consists of two symmetrical parts with respect to the axis of the abscissa. The movement of a typical trajectory of a chaotic attractor can be divided into two phases. In the first phase of the trajectory, chaotic movements are made along the turns of the upper (lower) part of the attractor from time to time, passing to the boundary of the localization region where the stability of the upper (lower) symmetric boundary cycles is lost. At an unpre-

dictable time, the trajectory moves from the upper (lower) part of the attractor to its upper (lower) part. This process is repeated infinitely many times. Thus, the transition to chaos has features characteristic of the Feigenbaum scenario (infinite cascade of bifurcations of doubling cycles), and for mixing (unpredictable mixing between the upper and lower parts of the emerging chaotic attractor). The self-organization process can be associated with the localization of a wave vector of incommensurate superstructure at a commensurate higher order value.

It is shown that the distortion of the order parameter phase at the edge of the crystal can be related to boundary conditions in the first approximation. According to the authors, such cascading transitions to chaos are related to the modes of existence of an incommensurate superstructure. The emergence of chaos in the third stage is caused by the transition of an incommensurate superstructure to its stochastic mode of existence. In a stochastic mode of existence of an incommensurate superstructure, a chaotic, possibly incommensurate phase arises, which is a prototype of this chaotic state. It should be noted that the initial conditions (boundary conditions) stabilize the system, thereby leading to the removal of the degeneracy of the system, and the transition of an incommensurate superstructure to a state characterized by the existence of long-period proportional phases.

Key words: incommensurate superstructures, phase portraits, Lyapunov's exponents.

Стаття: надійшла до редакції 25.09.2019,
доопрацьована 30.09.2019,
прийнята до друку 01.10.2019