ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Сер. пед. 2005. Вип. 19. Ч. 1. С. 219–228

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Pedagog. 2005. N 19. P. 1. P. 219–228

УДК 371.134:001.89

НЕЧІТКЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ГОТОВНОСТІ ВИКЛАДАЧА ДО ПРОФЕСІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Марек Антоні Якубовскі

Люблінська політехніка
Люблін, Польща
e-mail: mikrobi@antenor.pol.lublin.pl

Розглянуто математичне моделювання професійної діяльності вчителя на підставі нечіткого підходу. Висвітлено теорію конструювання психометричних тестів, що ґрунтується на теорії нечітких підмножин й ієрархічному аналізі скупчень.

Ключові слова: нечітке математичне моделювання, аналіз скупчень, психометричні тести.

Вимоги до професійних якостей учителя передбачають наявність творчого потенціалу вчителя, глибоке розуміння ним дидактичних процесів, постійну підтримку й удосконалення професійного рівня. Наявні моделі та стандарти компетентності фахівців головно відображають вимоги до вчителя, однак практично не вказують шляху їх досягнення.

Математичне моделювання професійної діяльності вчителя на основі нечіткого підходу і комплексного використання різноманітних типів моделей є новим у педагогіці. Його сутність полягає у максимальному використанні можливостей математичного апарату й ідей кібернетики для дослідження процесів професійного розвитку і професійного вигоряння вчителя. Провідною ідеєю дослідження є застосування методології нечіткості й теорії нечітких множин, тому що всі аспекти діяльності вчителя за своєю природою є нечіткими з елементом суб'єктивності.

У науково-педагогічній і спеціальній літературі висвітлені деякі аспекти досліджуваної проблеми, а саме: професійна підготовка і діяльність учителя (С. О. Сисоєва, Т. С. Кошманова, M. V. Ginsburg, M. J. Wong); методологічні та теоретичні питання моделювання (І. Б. Новік [4], D. J. Bartholomew, S. Bednarek, H. Blankertz, A. Grobler, H. Haken, B. Joyce, M. Weil, H. Kurczab); математичне і кібернетичне моделювання (С. І. Архангельський, Л. Б. Ітельсон, І. П. Підласий, G. Bontempi, J. R. Evans, L. V. Fung, B. Furukawa, S. Ishizu, M. Howard, C. Noworol [6]); основи нечіткого підходу (В. Іванов [1], А. М. Борисов [2], М. Ягер [3], H. Hellendoorn, K. Tanaka, C. V. Negoita) та ін.

Ми ставили за мету обґрунтувати конструювання психометричних тестів, що спирається на теорію нечітких підмножин та ієрархічний аналіз скупчень.

Особливості ієрархічного аналізу скупчень в емпіричних дослідженнях описані у працях [5; 6] та ін. Аналіз скупчень головно поділяється на ієрархічний та неієрархічний. Особливий інтерес викликає ієрархічний аналіз скупчень, що уможливлює вибір, селекцію і розрізнення ітемів у випадку однорідних груп. Він також дає змогу одержати інформацію про взаємні ієрархічні відносини між ітемами. Накладаючи концепцію нечітких підмножин на ідею ієрархічного аналізу скупчень, одержуємо значну кількість інформації, а саме: чи є певне скупчення підскупченням іншого скупчення, а також якою мірою одне скупчення наявне в іншому і які відношення подібності між окремими скупченнями. Одночасність, багатство й суттєве наближення до реального образу дійсності – риси інформації, яку одержали в результаті використання моделей нечітких ієрархічних скупчень.

Основою для розробки психометричних тестів у дослідженні професійного вигоряння є лист сигналів професійного вигоряння, розроблений B. Brewster. Цей лист частково використаний у нашому дослідженні. Класична теорія психометричних тестів (Gulliksen, 1950) побудована за зразком теорії (моделі вимірів), що використовується у фізичній науці. Ця теорія стверджує, що кожна людина у визначений момент має істинні значення психологічних рис, аналогічно, як кожен фізичний об'єкт має визначені значення своїх властивостей, незалежно від знарядь вимірів. Уводиться поняття істинного результату T_g, результату, що спостерігається, – X_g і поняття помилки виміру E_g. Відношення між істинним результатом і результатом, що спостерігається, визначається таким рівнянням: $X_g = T_g + E_g$.

Уся класична теорія тестів спрямована на дослідження вірогідності й правильності. Вірогідність тесту розуміємо як відношення варіації істинного результату до варіації результату виміру: $\dfrac{T_g}{X_g}$. Оскільки вірогідність потребує емпіричного опрацювання, багато авторів вважають її “мертвим параметром”. Цей параметр є лише теоретичним. Новим підходом до психометричних тестів є теорія відповідей на ітеми опитувальника (Item Response Theory = IRT). Вона дає змогу усунути безліч труднощів класичної теорії тестів. Основами IRT вважають вимір, що проводиться у психології за допомогою теорії ймовірності. Обидві теорії – класична й IRT – вивчають лише тести, не зазначаючи способів їхнього конструювання.

Конструкція психометричних тестів часто базується на виборі з початкової кількості ітемів тих, котрі відповідають деяким критеріям, що закладені дослідниками. Перший критерій неформально стверджує вимоги, пов'язані з прийнятою дослідником теорією. Дослідник вибирає ті ітеми, що значною мірою корелюють з його критеріями і за можливістю якомога менше корелюють між собою. У формальному критерії дослідник спирається на факторний аналіз і на підставі знайденої групи чинників будує теорію. У неформальному критерії вихідним пунктом є теорія, а у формальному – навпаки: на основі факторного аналізу проводиться теоретична інтерпретація тестів. Нова теорія конструювання психометричних тестів ґрунтується, з одного боку, на теорії нечітких підмножин, а з іншого – на ієрархічному аналізі скупчень. Результатом об'єднання цих двох методик є новий метод – нечітка модель ієрархічних скупчень, що результативно заміняє факторний аналіз і дає змогу точніше визначити неперервні змінні, які стосуються окремих ітемів.

Класичний метод ранжування дає можливість упорядкувати набір термів за деякою ознакою (частота). Проведені експерименти дають змогу не тільки упорядкувати елементи з T(X), але і співвіднести кожному з них деякий інтервал частот. Особливість методу ранжування полягає в тому, що респондент працює відразу з усім набором термів і оцінює шляхом порівняння їх між собою. Отже, оцінка будь-якого терма залежить від оцінок інших. Однак у разі великої кількості термів респондентові стає важко охопити і врахувати всі результати оцінення. У цьому випадку результати експерименту починають втрачати надійність. З метою підвищення надійності результатів експериментів першої серії, а також для одержання деяких додаткових даних проводиться друга серія експериментів методом послідовних інтервалів.

Ми великим групам людей (учителям чотирьох груп по 25 осіб у кожній) роздавали однакові картки, на яких були надруковані набори нечітких змінних з деякої терм-безлічі T(X). Як X брали лінгвістичну змінну ЧАСТОТА. Досліджуваним пропонували розбити інтервал від 0 до 100 на підінтервали, кожний з який відповідав би одному терму з T(X), а межі визначали таке число появи деякої окремої події зі ста можливих, котре давало б змогу респондентові охарактеризувати частоту появи цієї події відповідним значенням лінгвістичної змінної X. Дозволялося перекривання інтервалів.

Кожен респондент ставив у відповідність нечіткій змінній числовий інтервал, що, на його думку, найкраще відповідав цій змінній. Експерименти проводилися з різними термами-множинами T(X); у цьому разі передбачалося не мати на увазі які-небудь конкретні події. Результати експериментів цієї серії опрацьовували так:

а) над пропонованим інтервалом [0, 100] будували відрізки прямих, довжина і розташування яких відповідали результатам, які респонденти зазначили у картках. У підсумку виходили гістограми, де кожній нечіткій змінній відповідало скупчення відрізків. За видом цих скупчень можна було стверджувати про ступінь розмитості нечітких змінних;

б) для кожного такого скупчення числа відрізків підсумовували по вертикальній осі. У результаті будували інші гістограми, що також відображали ступінь розпливчастості тієї чи іншої нечіткої змінної залежно від висоти її піраміди, інтегральної площі підсхідчастої кривої, числа локальних екстремумів тощо. Одним з важливих моментів було те, що ці гістограми давали змогу розбивати інтервал на підінтервали відповідно до областей максимуму кожної з пірамід. Ця розбивка була усередненою статистичною оцінкою множини випробуваних і використовувалася у відповідних алгоритмах узагальнення;

в) на підставі цих гістограм, проводячи нормування за осями і згладжування східчастих кривих, будували функції приналежності μ(u) для досліджуваних нечітких змінних (рис. 1).

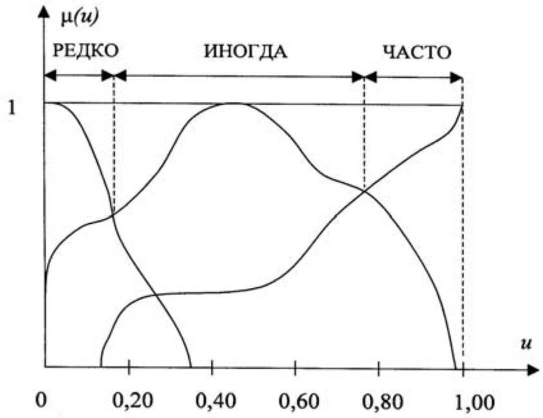

Рис. 1. Функції приналежності для досліджуваних нечітких змінних

Побудовані функції приналежності були основою вибору моделі апроксимації у процесі організації зворотного зв'язку в діалоговому режимі. З метою підвищення надійності в цій серії випробуваним роздавали однакові картки, на яких були зображені інтервали від 0 до 100 з різними розбивками на підінтервали відповідно до усереднених результатів експериментів першої серії. На дошці виписували терми-множини T0(X) (X-ЧАСТОТА), що з надлишком покривало усі використовувані раніше терми-множини Ti(X) (для всіх i, $1 \leq i \leq m$, Ti(X) (T0(X)). Респонденти повинні були вибрати з T0(X) ті нечіткі змінні, котрі, на їхню думку, найбільше відповідали кожному підінтервалу запропонованої їм розбивки.

На етапі опрацювання результатів експериментів для кожної розбивки, що відповідала деякому Ti(X), визначали кількість влучень кожної нечіткої змінної у відповідний інтервал. Функцію $\mu(u)$ записували у вигляді узагальненого апроксимуючого полінома: $Q(u)=\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(u)$, де коефіцієнти c_j визначали з умови максимуму суми квадратів відхилення S_m:

$$S_m=\sum_{i=0}^{n}[\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(u_i)-\mu(u_i)]^2, \quad Q(u)=c_0+c_1u+\ldots+c_mu^m.$$

Брали до уваги такі особливості: а) новий набір значень $\{\alpha'_i\}$, одержаний з узагальнених понять, даних учителем, не можна вважати абсолютно точним, тому що у процесі визначення людиною числового значення ступеня істиності кожної кон'юнкції цілком можлива деяка похибка; б) вигляд невідкоректованої функції $\mu_0(u)$, спочатку закладеної в алгоритм, не можна ігнорувати цілком, тому що він тією чи іншою мірою відображає залежність шуканих коефіцієнтів від частоти u. Тому до набору значень $\{\alpha'_i\}$ можна додати кілька значень $\mu_0(u_j)$ $(u_j \neq u_i)$, одержаних внаслідок узагальнення на вибірках, відмінних від тієї, за якою вважали α_i, учитель вносив їх поправки у вигляді α'_i. На підставі експериментальних спостережень можна стверджувати, що функція $\mu(u)$ є порівняно гладкою з невеликою кількістю екстремумів у першій похідній.

Щоб виконати поставлене завдання, варто застосувати класичні методи точкової апроксимації, зокрема метод найменших квадратів. Цей метод дає змогу одержати досить гладку функцію $\mu(u)$, що рівномірно наближається за змістом середнього квадратичного відхилення до заданого набору крапок, не обов'язково збігаючись з ним. Важливий є той факт, що число n і розташування точок апроксимації може бути довільним $n \geq m$ (де m – ступінь апроксимуючого полінома).

Простою, найбільш широко використовуваною системою функцій, що задовольняє умову лінійної незалежності, є така система: $1, u, u^2, u^3, \ldots, u^r$, коли r натуральне. Вибір цієї системи зумовлений також і тим, що, як зазначалося вище, на відрізку [0, 1] ці функції задовольняють головним припущенням про вид $\mu(u)$. Тому варто очікувати гарної апроксимації навіть у разі невеликого числа членів полінома.

У процесі діалогового спілкування з учителем можна побудувати функцію приналежності для будь-якої нечіткої змінної, яка належить до заданої терм-множини T(X). Якщо X – лінгвістична змінна ЧАСТОТА, то розглянемо як приклад деяку її терм-множину: T(X)={ДУЖЕ ЧАСТО, ЧАСТО, ІНОДІ, РІДКО, ДУЖЕ РІДКО}. Візьмемо як головний терм одну з нечітких змінних, наприклад ЧАСТО, і побудуємо для неї функцію приналежності $\mu(u)$ за допомогою числових коефіцієнтів α_i. У процесі такої побудови функції приналежності завжди мається на увазі, що відповідна їй нечітка змінна одна становить T(X). У терм-множині вид функції приналежності для змінної ЧАСТО природно змінюється завдяки впливу інших нечітких змінних (рис. 2). Припустимо, що відповідно до деякого семантичного правила F функції приналежності для нечітких змінних з T(X) можна виразити через μ(u) для головного терма. Тоді, побудувавши ці функції, можна одержати розбивку R області значень базової змінної *u* на підінтервали, у кожному з яких значення однієї з функцій перевищує значення інших і, отже, доречно уживати відповідну їй нечітку змінну для описання події, що має певне числове значення частоти *u*.

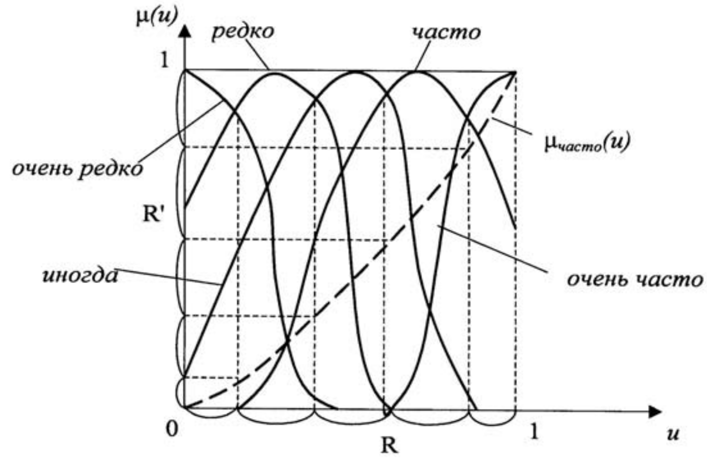

Рис. 2. Функції приналежності для головної змінної ЧАСТО (пунктирна лінія) і змінних T(X)

Головна функція приналежності дає змогу відобразити цю розбивку R на осі абсцис у відповідну розбивку R' на осі ординат, де кожному підінтервалу також відповідатиме одне зі значень лінгвістичної змінної.

Тепер, знаючи числові коефіцієнти сумісності $\alpha_i = \mu_ч(u)$, можна зіставити кожному з них терм із T(X) залежно від того, у який інтервал з R' потрапляє α_i. Очевидно, знаючи R, можна вчинити і простіше у процесі вибору нечіткого терма для кон'юнкції z_{i1} & z_{i2} & ... & z_{ik}, визначивши, у який підінтервал на осі абсцис потрапляє відповідна їй базова змінна *u*. Однак на практиці вигляд семантичного правила F, а отже, і розбивки R буває невідомий.

Завдання полягає у тому, щоб шляхом зміни функції $\mu(u)$ для головного терма підібрати таку розбивку R (семантичне правило), що дасть змогу формувати нечіткі узагальнені поняття, близькі до уявлень учителя в конкретній ситуації. Зафіксуємо розбивку R' у вигляді рівних підінтервалів, кількість яких відповідає кількості елементів у T(X). Як зображено на рис. 3, змінюючи $\mu(u)$ для головного терма, можна одержати різні розбивки R на осі абсцис.

Припустимо, що для цієї контрольної вибірки програмою сформоване поняття вигляду: $\Pi = y_1\,\beta_1 \;\vee\; y_2\,\beta_2 \;\vee\; ..... \;\vee\; y_n\beta_n,$ де $y_i \in T(X)$, β_i – елементарні кон'юнкції, для яких відомі частоти появи їх у вибірці прикладів: $u_1, u_2, ..., u_n$. Для цього поняття учитель може запропонувати свою версію, з іншим набором нечітких термів $y'_1, y'_2, \ldots, y'_k$. Тоді для тих же значень базової змінної $\{u_i\}$ $(1 \le i \le k)$ ми матимемо інший набір значень $\mu(u_i)$, які можна брати як середини відповідних інтервалів розбивки R' (рис. 4).

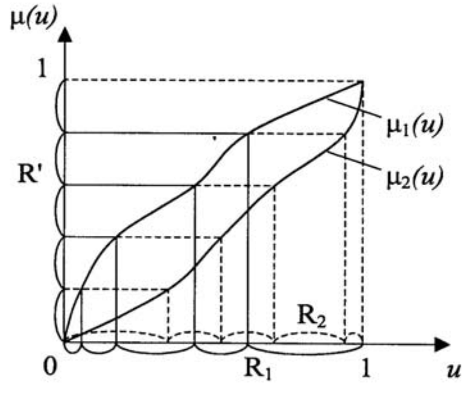

Рис. 3. Різні розбивки R на осі абсцис залежно від функції $\mu(u)$

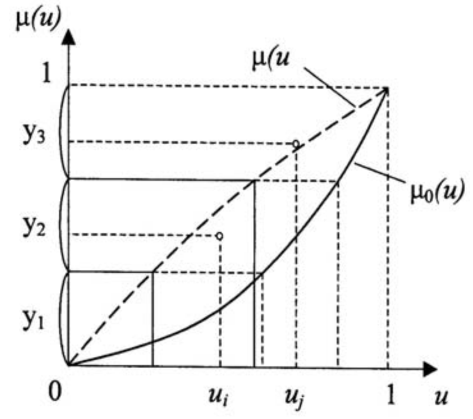

Рис. 4. Значення $\mu(u)$, які взято як середини відповідних інтервалів розбивки R'

Одержавши новий набір значень $\mu(u)$ і додавши до них кілька значень невідкорегованої функції $\mu_0(u)$, можна побудувати нову неперервну функцію $\mu(u)$. Щоб одержати не числове значення α_i з нескінченної підмножини дійсних чисел [0, 1], а декілька нечітких термів з кінцевого набору T(X), $\mu\,(u)$ необхідно зобразити у вигляді східчастої функції, де кожній сходинці відповідає y_i, а довжина сходинок визначає розбивку R (рис. 5). У випадку східчастої функції підрахунок спрощується і стає доцільним застосування методу апроксимації рядами Фур'є. Для цього необхідно вибрати придатну ортогональну систему функцій. У теорії ортогональних рядів відома ортонормована на [0,1] система, що особливо зручна для апроксимації східчастих функцій. Це система функцій Хаара: $\{\chi_k(u)\}$.

Безліч функцій Хаара $\{\chi_k(u)\}$ зручно розбити на групи: $\{\chi_{mj}(u)\}$, $j = 1, 2, ..., 2^{m-1}$; $m = 1, 2, ...$ Крапки розриву функцій Хаара відповідають ступеням двійки 2m-1, тому для точної апроксимації східчастої функції μ(*u*) (рис. 5) необхідно взяти багато функцій Хаара.

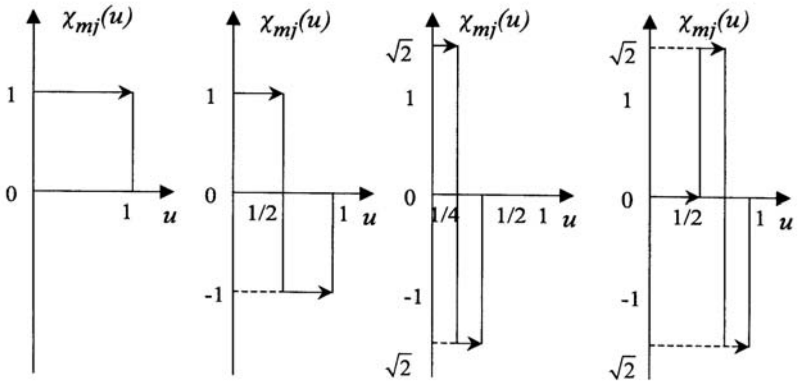

Рис. 5. Зображення μ(*u*) у вигляді східчастої функції

Однак розбивка R' фіксує число і висоту "сходинок" μ(*u*), а нас цікавить тільки довжина інтервалів розбивки. Якщо поставити у відповідність функції μ(*u*) східчасту функцію χ(*t*) (див. рис. 5), то висота сходинок χ(*t*) відповідатиме точкам розбивки R, а довжина – інтервалу сталості функцій Хаара. Кількість функцій Хаара (рис. 6), необхідних для апроксимації, χ(*t*) дорівнює кількості термів у T(X), тобто *m*. Ліві кінці інтервалів сталості χ(*t*) відповідають нечітким термам $y_i \in T(X)$ $(1 \geq i \leq m)$.

Отже, аналіз версії нечіткого поняття, запропонований учителем, дає новий набір точок, що не збігається в загальному випадку з функцією χ(*t*). Додаючи до нього кілька значень функції χ (*t*), отриманої раніше, одержимо набір крапок апроксимації $u_1, u_2, \ldots, u_n$, на підставі якого можна побудувати функцію χ(*t*), що дає нова розбивка R.

Кількість точок апроксимації підбирається рівним кількості інтервалів сталості ($n = m$). Якщо кілька точок u_i потрапляє на один інтервал, то береться середнє арифметичне значень $\chi(u_i)$. Нову функцію χ(*t*) природно зобразити у вигляді часткової суми ряду Фур'є–Хаара.

На підставі результатів експериментів вдалося виявити взаємне розташування для досить великої групи лінгвістичних значень змінної ЧАСТОТА. Ці дані закладені в синтаксичне правило G, що дає змогу розширити T(X) у випадку появи нових термів, а також одержати нову розбивку R для розширеної терм-множини, використовуючи семантичне правило F. Якщо ж зведень про новий терм, який використовував учитель, немає в G, то за алгоритмом варто звернутися з питанням до вчителя, щоб він довизначив терм-множину T(X), що містить новий терм. Зміна складу T(X) веде до перерахування інтервалів сталості для системи функцій Хаара.

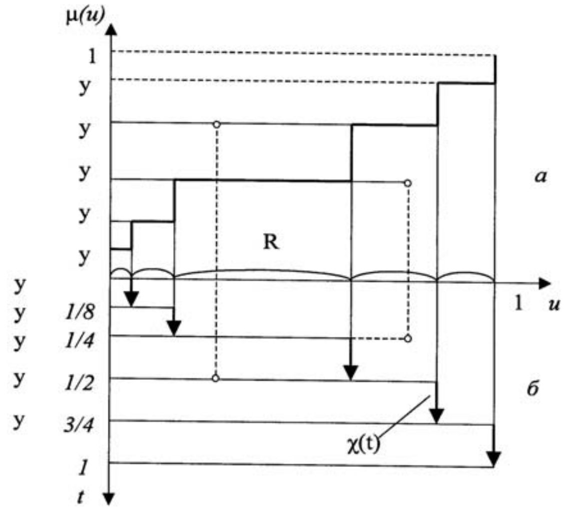

Рис. 6. Перші чотири функції Хаара

Отже, математичне моделювання і прогнозування результатів педагогічних інновацій сприяє інтеграції двох найважливіших аспектів діяльності вчителя: педагогічного і предметного. Вплив математичного моделювання професійної діяльності вчителя на якість роботи викладачів виявляється як прямо, так і опосередковано. Прямий вплив пов’язаний з визначеністю компетенцій вчителя і використанням моделей конкретних ситуацій педагогічного процесу та його корекції. Опосередкований вплив виявляється у прогностичному аспекті діяльності вчителя. Зокрема, нечітке моделювання професійної діяльності вчителя є діючим засобом попередження синдрому професійного вигоряння. Усвідомлення вчителем можливостей таких наслідків, зіставлення процесів, які відбуваються в його психіці, з відомими ознаками допомагають йому вчасно діагностувати свій стан і вживати заходів щодо профілактики негативних явищ.

1. *Иванов В.* Моделирование педагогической деятельности // Высш. образование в России. 1998. № 2. С. 62–65.

2. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А. М. Борисов, А. В. Алексеев, О. А. Крунберг и др. Рига, 1982.

3. Нечетные множества и теория возможностей: последние исследования / Под ред. Р. Ягера М., 1986.

4. *Новик И. Б.* О моделировании сложных систем (философский очерк). М., 1965.

5. *Marek T.* Analiza skupień w badaniach empirycznych // Metody SAHN. Warszawa, 1989.

6. *Noworol C.* Analiza skupień w badaniach empirycznych // Rozmyte modele hierarchiczne. Warszawa, 1989.

INDISTINCT MATHEMATICAL MODELING AS A TOOL OF INSTRUCTOR'S READINESS DEVELOPMENT FOR PROFESSIONAL ACTIVITY

Marek Antoni Jakubowski

Lublin Politechnika
Lublin, Poland
e-mail: mikrobi@antenor.pol.lublin.pl

The article considers mathematical modeling of teacher professional activity on the basis of indistinct approach. It outlines the theory of constructing psychometric tests, which are grounded on the basis of the vague multitude theory and hierarchical analysis of accumulations.

Key words: indistinct mathematical modeling, accumulation analysis, psychometric test.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.2004
Прийнята до друку 23.11.2004