ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 120–131
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 120–131
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.120-131

УДК 517.95

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З СИЛЬНИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Микола ІВАНЧОВ, Віталій ВЛАСОВ

Львівський національний університет ім. І. Франка,
Університетська 1, 79000, Львів
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua, siphiuel@gmail.com

Встановлено єдиність класичного розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з двома невідомими старшими коефіцієнтами, які залежать від часової змінної, у випадку сильного виродження рівняння.

Ключові слова: обернена задача, двовимірне рівняння теплопровідності, сильне виродження, єдиність розв'язку.

1. Вступ

Обернені задачі знаходять своє застосування у різноманітних галузях — від видобутку корисних копалин, металургії, космічних досліджень до фінансів, медицини, екології тощо. Особливе місце серед коефіцієнтних обернених задач посідають задачі для рівнянь з виродженням, які вимагають свого апарату досліджень. Перші дослідження таких задач були проведені у працях [1]—[3], в яких виродження не було пов'язане з невідомими параметрами. Систематичне дослідження обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь зі слабким та сильним виродженням було здійснене в [4]—[12], де невідомим був залежний від часу старший коефіцієнт, який і спричиняв виродження рівняння. В основному вивчався випадок степеневого виродження, хоча були досліджені і задачі для рівняння з виродженням довільного типу. Згодом частина цих результатів була перенесена на задачі з вільними межами [13], [14]. Перехід до двовимірного випадку створив нову ситуацію, коли в рівнянні невідомими є два старші коефіцієнти. Випадок слабкого виродження було вивчено в [15], [16], а сильного з одним невідомим коефіцієнтом — в [17].

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K65
© Іванчов, М., Власов, В., 2018

Ми досліджуємо питання єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з двома залежними від часу невідомими старшими коефіцієнтами з різною поведінкою при $t \to 0$, коли виродження рівняння є сильним.

2. Формулювання задачі та основний результат

В області $Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо задачу знаходження трійки функцій $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t)), a_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\}$, які задовольняють рівняння теплопровідності

$$u_t = a_1(t)t^{\beta_1}u_{xx} + a_2(t)t^{\beta_2}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$\beta_i \geq 1, i \in \{1,2\}$, початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y,0), \quad (x,y) \in \overline{D} := [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t),\ u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t),\ u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \tag{4}$$

та умови перевизначення

$$\iint\limits_D u(x,y,t)dx\,dy = \mu_{31}(t), \tag{5}$$

$$\iint\limits_D xu(x,y,t)dx\,dy = \mu_{32}(t), \quad t \in (0,T]. \tag{6}$$

Умови єдиності класичного розв'язку задачі (1)-(6) наведено у такій теоремі.

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови:*

(A1) $\varphi \in C^{1,0}(\overline{D}), \mu_{1i} \in C^{2,1}([0,l] \times (0,T]), \mu_{2i} \in C^{1,0}([0,h] \times (0,T]), f \in C^{1,0,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_{3i} \in C^1([0,T]), i \in \{1,2\}$;

(A2) $\int\limits_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx \int\limits_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta - \int\limits_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx \int\limits_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta > 0,$

$$\mu'_{31}(t) - \iint\limits_D f(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_1(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}},$$

$$\mu'_{32}(t) - \iint\limits_D xf(x,y,t)dx\,dy \equiv \varkappa_2(t)t^{\frac{\beta_1+1}{2}}, \quad \text{де } \varkappa_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\};$$

(A3) *умови узгодження нульового порядку та умови*

$$\iint\limits_D \varphi(x,y)dx\,dy = \mu_{31}(0), \quad \iint\limits_D x\varphi(x,y)dx\,dy = \mu_{32}(0).$$

Якщо $\beta_2 = \frac{\beta_1+1}{2}$, то розв'язок $(a_1(t), a_2(t), u(x,y,t))$ задачі (1)-(6) з класу $\left(C([0,T])\right)^2 \times C^{2,2,1}(Q_T) \cap C^{1,1,0}(\overline{D} \times (0,T]) \cap C^{0,1,0}(\overline{Q}_T)$, [18], і такий, що $a_i(t) > 0, t \in [0,T], i \in \{1,2\}$, єдиний.

3. Зведення задачі (1)-(6) до системи рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$

Перепозначимо $\beta_1 := \beta$ і подамо рівняння (1) у вигляді

$$u_t = a_1(t)t^{\beta}u_{xx} + a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T. \tag{7}$$

Диференціюючи умови (5), (6) за змінною t та використовуючи рівняння (7), отримаємо систему рівнянь стосовно $a_1(t), a_2(t)$:

$$a_1(t)t^{\beta}\int_0^l (hu_x(h,y,t) + \mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy +$$

$$+ a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx =$$

$$= \mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy, \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$a_1(t)t^{\beta}\int_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy + a_2(t)t^{\frac{1+\beta}{2}}\int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx =$$

$$= \mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Умови теореми дають змогу розв'язати систему (8), (9) стосовно $a_1(t), a_2(t)$

$$a_1(t) = t^{-\beta}\Bigg(\left(\mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\right)\int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx -$$

$$- \left(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx\Bigg)\Delta^{-1}(t), t \in [0,T], \tag{10}$$

$$a_2(t) = t^{-\frac{1+\beta}{2}}\Bigg(\left(\mu_{31}'(t) - \iint_D f(x,y,t)dx\,dy\right)\int_0^l (hu_x(h,y,t) + \mu_{11}(y,t) - \mu_{12}(y,t))dy -$$

$$- \left(\mu_{32}'(t) - \iint_D xf(x,y,t)dx\,dy\right)\int_0^l (u_x(h,y,t) - u_x(0,y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t), t \in [0,T], \tag{11}$$

де

$$\Delta(t)=\int_0^l u_x(h,y,t)dy\int_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$
$$+\int_0^l u_x(0,y,t)dy\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$
$$+\int_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\int_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{12}$$

Надамо системі (10), (11) такого вигляду:

$$a_1(t)=\Bigg(\varkappa_2(t)\int_0^h (\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-$$
$$-\varkappa_1(t)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\Bigg)t^{\frac{1-\beta}{2}}\Delta^{-1}(t), \tag{13}$$
$$a_2(t)=\Bigg((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int_0^l u_x(h,y,t)dy+\varkappa_2(t)\int_0^l u_x(0,y,t)dy+$$
$$+\varkappa_1(t)\int_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\Bigg)\Delta^{-1}(t), \quad t\in(0,T]. \tag{14}$$

За допомогою функції Гріна знайдемо розв'язок задачі (1)-(4)

$$u(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^{\beta}a_1(\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^{\beta}a_1(\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t \iint_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{15}$$

Функція Гріна визначається з рівності

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times$$
$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^i\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^j\exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right),$$
$$i,j\in\{1,2\},\qquad \theta_1(t):=\int_0^t\sigma^\beta a_1(\sigma)d\sigma,\qquad \theta_2(t):=\int_0^t\sigma^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\sigma)d\sigma,$$

де значення $i,j=1$ відповідають умовам Діріхле за змінними x,y, а $i,j=2$ — умовам Неймана. Легко бачити, що $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$, G_i — функції Гріна для одновимірних рівнянь теплопровідності за відповідними змінними. З (15) обчислимо

$$u_x(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-a_2(\tau)\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\iint_D G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{16}$$

Враховуючи рівність

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)dx = 1,$$

яку легко перевірити, знаходимо

$$\int_0^l u_x(0,y,t)dy = \int_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi \int_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^t G_2(0,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau) - \mu_{21}(h,\tau))d\tau$$

$$+\int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau) - \mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau+$$

(17) $$+\int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau \int_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta,$$

$$\int_0^l u_x(h,y,t)dy = \int_0^h G_2(h,t,\xi,0)d\xi \int_0^l \varphi_\xi(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^t G_2(h,t,0,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int_0^t G_2(h,t,h,\tau)d\tau \int_0^l (\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau))d\eta+$$

$$+\int_0^t G_2(h,t,0,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}} a_2(\tau)(\mu_{22}(0,\tau) - \mu_{21}(0,\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^t G_2(h,t,h,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))d\tau-$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)\tau^{\frac{1+\beta}{2}}a_2(\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\int_0^l f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\eta. \tag{18}$$

Підставимо у (16) рівності (19), (20) і подамо $\Delta(t)$ у вигляді

$$\Delta(t)=\Delta_0(t)\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+R(t),$$

де

$$\Delta_0(t):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg[\int_0^h(h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\int_0^l(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta-$$

$$-\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx\int_0^l(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta\Bigg],$$

а до $R(t)$ входять всі інші доданки з $\Delta(t)$. Подамо рівняння (14) у вигляді

$$a_1(t)=\frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta(t)},\quad t\in[0,T], \tag{19}$$

де

$$F(t):=\varkappa_2(t)\int_0^h(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx-\varkappa_1(t)\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx.$$

Розглянемо функцію

$$H(t):=\frac{F(t)}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^1\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}},\quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

На підставі (19) та враховуючи припущення теореми, отримуємо

$$a_1(t)\le\frac{F(t)}{t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}}\le\frac{F(t)\sqrt{a_{1\max}(t)}}{\sqrt{\beta+1}\Delta_0(t)\displaystyle\int_0^1\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}}=H(t)\sqrt{a_{1\max}(t)},$$

$t\in[0,T]$,

де $a_{1\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} a_1(\tau)$. Звідси встановлюємо оцінку

$$a_1(t) \le H^2_{\max}(t), \quad t\in[0,T], \tag{21}$$

де $H_{\max}(t) := \max\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

Для оцінки $a_1(t)$ знизу зауважимо, що $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{\beta-1}{2}}\Delta_1(t) = 0$. Це оначає, що для довільного $q\in(0,1)$ існує таке $t_0\in(0,]T$, що виконуватиметься нерівність

$$R(t) \le q\Delta_0(t)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}, \quad t\in[0,t_0]. \tag{22}$$

Тоді аналогічно до (19) знаходимо

$$a_1(t) \ge \frac{H^2_{\min}(t)}{(1+q)^2}, \quad t\in[0,t_0]. \tag{23}$$

Тут вжито позначення $H_{\min}(t) := \min\limits_{\tau\in[0,t]} H(\tau)$.

4. Доведення теореми

Припустимо, що система рівнянь (12), (13) має два розв'язки $(a_{1i}(t), a_{2i}(t)), i\in\{1,2\}$. Позначимо $u(x,y,t) := u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t), b_i(t) := a_{i1}(t) - a_{i2}(t), \theta_{1i} = \int\limits_0^t \tau^\beta a_{1i}(\tau)d\tau, i\in\{1,2\}, \Delta(t) := \Delta_1(t)-\Delta_2(t), R(t) := R_1(t)-R_2(t)$. З рівняння (10) отримуємо

$$b_1(t) = \frac{F(t)(\Delta_2(t)-\Delta_1(t))}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)} = \frac{a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\left(\Delta_0(t)\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right)d\tau + R_2(t)-R_1(t)\right).$$

З міркувань, наведених при виведенні оцінки (22), можна вважати, що для тих самих значень q та t_0 справджується нерівність

$$|R_2(t)-R_1(t)| \le q\Delta_0(t)\int\limits_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right)d\tau, \quad t\in[0,t_0].$$

Тоді

$$|b_1(t)| \le \frac{(1+q)a_{11}(t)a_{12}(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}}{F(t)}\Delta_0(t)\int\limits_0^t\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right|d\tau. \tag{24}$$

Перетворимо вираз

$$\int\limits_0^t\left|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right|d\tau \le$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}(\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)})}.$$

Застосовуючи оцінки (21), (23), знаходимо

$$\int\limits_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)}}-\frac{1}{\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}}\right|d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \frac{|\theta_1(t)-\theta_1(\tau)|d\tau}{\sqrt{(\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau))(\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau))}(\sqrt{\theta_{11}(t)-\theta_{11}(\tau)}+\sqrt{\theta_{12}(t)-\theta_{12}(\tau)})} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^3\sqrt{\beta+1}b_{1\max}(t)}{2t^{\frac{\beta-1}{2}}H^3_{\min}(t)}\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}}.$$

Підставимо цю оцінку в (22):

$$|b_1(t)| \leq \frac{(1+q)^4 a_{11}(t)a_{12}(t)\sqrt{\beta+1}b_{1\max}(t)}{2F(t)H^3_{\min}(t)}\Delta_0(t)\int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{\beta+1}}} \leq$$

$$\leq \frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)}b_{1\max}(t), \quad t\in[0,t_0]. \tag{25}$$

Оскільки

$$\lim_{t\to 0} H_{\min}(t) = \lim_{t\to 0} H_{\max}(t),$$

то існує таке значення $t_1 \in (0, t_0]$, що виконуватиметься нерівність

$$\frac{(1+q)^4 H^4_{\max}(t)}{2H^4_{\min}(t)} \leq q_0 < 1, \quad t\in[0,t_1].$$

Тоді з (23) доходимо висновку, що $b_1(t) \equiv 0, \quad t\in[0,t_1]$.

З рівняння (14) отримуємо

$$b_2(t) = \left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_x(h,y,t)dy + \varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy\right)(\Delta_1(t))^{-1} - \tag{26}$$

$$-\left((h\varkappa_1(t)-\varkappa_2(t))\int\limits_0^l u_{2_x}(h,y,t)dy + \varkappa_2(t)\int\limits_0^l u_{2_x}(0,y,t)dy + \right. \tag{27}$$

$$\left. + \varkappa_1(t)\int\limits_0^l (\mu_{11}(y,t)-\mu_{12}(y,t))dy\right)\frac{\Delta(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}, \quad t\in[0,T]. \tag{28}$$

Враховуючи те, що $a_{11}(t) = a_{12}(t), t\in[0,t_1]$, з (17), (18) знаходимо

$$\int\limits_0^l u_x(0,y,t)dy = \int\limits_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}} b_2(\tau)\Big(G_2(0,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau)) - G_2(0,t,h,\tau)\times$$

$$\times(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau))d\xi\Big)d\tau,$$

$$\int_0^l u_x(h,y,t)dy=\int_0^t \tau^{\frac{1+\beta}{2}}b_2(\tau)\Big(G_2(h,t,0,\tau)(\mu_{22}(0,\tau)-\mu_{21}(0,\tau))-G_2(h,t,h,\tau)\times$$

(29)

$$\times(\mu_{22}(h,\tau)-\mu_{21}(h,\tau))+\int_0^h G_2(h,t,\xi,\tau)(\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)-\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi\Big)d\tau,\quad t\in[0,t_1].$$

Тут у функції Гріна приймемо $\theta_1(t)=\int_0^t a_{11}(\tau)d\tau$. Аналогічно з (12) отримуємо

$$\Delta(t)=\int_0^l u_x(h,y,t)dy\int_0^h (h-x)(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx+$$

$$\int_0^l u_x(0,y,t)dy\int_0^h x(\mu_{22}(x,t)-\mu_{21}(x,t))dx. \tag{30}$$

Враховуючи (29), (30), зведемо рівняння (26) до вигляду

$$b_2(t)=\int_0^t K(t,\tau)b_2(\tau)d\tau,\quad t\in[0,t_1]. \tag{31}$$

Зважаючи на оцінку

$$\int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}\le C_1\int_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}_2},$$

робимо висновок про те, що ядро $K(t,\tau)$ не має особливостей, і тому рівняння (31) допускає тільки тривіальний розв'язок $b_2(t)\equiv 0, t\in[0,t_1]$.

Доведення того, що розв'язок задачі (1)–(6) єдиний на всьому часовому проміжку $[0,T]$, проводиться аналогічно до [6].

Список використаної літератури

1. Т. Елдесбаев, *О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **11** (1976), no. 3, 502–510.
2. Т. Елдесбаев, *Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка*, Изв. АН КазССР, Серия физ.-мат. (1987), no. 3, 27–29.
3. М. М. Гаджиев, *Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения*, Применение методов функ. анал. в уравнениях мат. физ. (1987), Новосибирск, 66–71.
4. М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна, *Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням*, Укр. мат. журн. **57** (2005), no. 11, 1563–1570; **English version**: M. I. Ivanchov

and V. Saldina, *Inverse problem for the heat equation with degeneration*, Ukr. Math. J. **57** (2005), no. 11, 1825–1835. DOI: 10.1007/s11253-006-0032-6
5. М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням*, Укр. мат. журн. **58** (2006), no. 11, 1487–1500; **English version**: M. I. Ivanchov and V. Saldina, *Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration*, Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 11, 1685–1703. DOI: 10.1007/s11253-006-0162-x
6. M. Ivanchov and N. Saldina, *Inverse problem for strongly degenerate heat equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (2006), no. 5, 465–480. DOI: 10.1515/156939406778247598
7. Н. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням*, Вісн. Львів. ун-ту, Серія мех.-мат. **64** (2005), 245–257.
8. Н. Салдіна, *Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **66** (2006), 186–202.
9. Н. В. Салдіна, *Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням*, Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. (2006), no. 288, 99–106.
10. Н. В. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **49** (2006), no. 3, 7–17.
11. Н. В. Салдіна, *Сильно вироджена обернена параболічна задача із загальною поведінкою молодших членів рівняння*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. **12–13**, (2007), 109–122.
12. M. Ivanchov, A. Lorenzi, and N. Saldina, *Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16**, (2008), no. 4, 397–415. DOI: 10.1515/JIIP.2008.022
13. Н. М. Гринців, *Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **49**, (2006), no. 4, 28–40.
14. Н. М. Гринців, *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **66**, (2006), 45–59.
15. М. Іванчов, В. Власов, *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **70**, (2009), 91–102.
16. В. Власов, *Обернена задача для двовимірного анізотропного параболічного рівняння*, Буковинський мат. журнал. **5**, (2017), no. 1-2, 37–48.
17. M. Ivanchov and V. Vlasov, *Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation,* Electron. J. Diff. Equ. **2018**, (2018), no. 77, 1–17.
18. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва, 1967.

Стаття: надійшла до редколегії 06.01.2019
доопрацьована 19.01.2019
прийнята до друку 19.02.2019

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85

UNIQUENESS OF SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM FOR THE TWO-DIMENSIONAL STRONGLY DEGENERATE HEAT EQUATION

Mykola IVANCHOV, Vitaliy VLASOV

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua, siphiuel@gmail.com

The uniqueness of a classical solution of an inverse problem for the two-dimensional heat equation with two unknown leading coefficients dependent on the time variable is established in the case of the strong degeneration.

Key words: inverse problem, two-dimensional heat equation, strong degeneration, uniqueness of solution.