ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 91–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 91–106
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.091-106

УДК 517.9

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Микола БОКАЛО, Ірина СКІРА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі Фур'є для слабко нелінійного еліптично-параболічного інтегро-диференціального рівняння вищого порядку. Також отримано оцінку цього розв'язку.

Ключові слова: задача Фур'є, параболічне рівняння з виродженням, еліптично-параболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, функціонально-диференціальне рівняння.

1. Вступ

Нехай n, m – натуральні числа; $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів n дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і наділений нормою $|x| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$; N – кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел, тобто елементів множини $\mathbb{Z}_+^n$), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M; $\widehat{0} := (0, \ldots, 0)$ – мультиіндекс, складений з нулів; $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$); $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

2010 Mathematics Subject Classification: 35D30, 35K25, 35J30

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$. Вважаємо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою і позначаємо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Під S розуміємо промінь $(-\infty; 0]$. Приймаємо $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$ і $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних t_1 і t_2 (тут і далі вважаємо, що $t_1 < t_2$).

Припускаємо, що

($\mathcal{B}$) $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $0 \leqslant b(x) \leqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Позначаємо $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,|\, b(x) > 0\}$, $b_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x)$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, \delta u) + \int\limits_\Omega c(x, y, t, u(y, t))\, dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x, t), \quad (x, t) \in Q \tag{1}$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \in M$) – задані функції, які задовольняють певні (наведені нижче) умови. Тут і далі $D^\alpha := \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, і δu – впорядкований набір похідних $D^\alpha u$ функції u порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке саме, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Вважаємо, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) – еліптична, тобто рівняння (1) – параболічне на множині $\Omega_0 \times S$ і еліптичне на множині $(\Omega \setminus \Omega_0) \times S$, а тому його називають *еліптично-параболічним*. Такі рівняння досліджували, зокрема, в [1, 2, 3, 4, 5].

В цій роботі ми вивчаємо питання існування та єдиності розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для рівняння (1) з крайовими умовами (2). Задача Фур'є виникає при моделюванні різних динамічних процесів у природі та економіці, коли початок процесу настільки віддалений від актуального моменту, що початкові дані практично не впливають на ситуацію в цей момент (див., наприклад, [6]). Така задача для еволюційних рівнянь з різних класів розглядалася в працях багатьох математиків, зокрема, в [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Досить повний огляд цих результатів можна знайти в [10].

Зауважимо, що в задачі (1),(2) можливе входження невідомої функції як в диференціальну частину рівняння, так і в інтегральну. Інтегро-диференціальні рівняння виникають при моделюванні складних явищ у сучасному природознавстві, економіці та техніці, наприклад, для опису біржових коливань вартості опціонів, в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів в дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах (див. [12, 13, 14]).

Прикладами рівнянь типу (1), які тут досліджуються, є рівняння:

$$(b(x)u)_t + \sum_{k\in M} \widehat{a}_k(t)(-\Delta)^k u + \int_\Omega \widehat{c}(x,y,t)u(y,t)\,dy =$$

$$= f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа, $\widehat{a}_k \in L^\infty(0,T)\,(k\in M)$, $\widehat{c}\in L^\infty(\Omega\times\Omega\times S)$ – деякі функції, причому функції $\widehat{a}_k\,(k\in M)$ додатні і відділені від нуля, а функція $f : Q\to\mathbb{R}$ – вимірна і така, що її звуження на Q_{t_1,t_2} належить простору $L^2(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2\in S$.

Задача Фур'є для рівнянь типу (1) у випадку сильної нелінійності досліджена у [5] та однозначно розв'язна без будь-яких умов на нескінченності. У випадку слабкої нелінійності, розглянутому в цій роботі, задача Фур'є коректна лише за деяких обмежень на поведінку розв'язків при $t\to-\infty$, які будуть вказані пізніше.

2. Основні функційні простори та допоміжні факти

Введемо потрібні нам функційні простори.

Під $L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q})$ розуміємо лінійний простір вимірних на Q функцій таких, що їх звуження на підмножину Q_{t_1,t_2} належить простору $L^\infty(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2\in S$.

Нехай X – довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ та нормою $\|\cdot\|_X$. Позначаємо через $L^2_{\rm loc}(S;X)$ лінійний простір функцій, які визначені на S, набувають значення в X і їхнє звуження на будь-який відрізок $[t_1,t_2]\subset S$ належать простору $L^2(t_1,t_2;X)$.

Під $C^1_c(I)$, де I – інтервал числової осі, розуміємо лінійний простір неперервно диференційовних на I функцій з компактним носієм (якщо $I=(\widehat{t_1},\widehat{t_2})$, то писатимемо $C^1_c(\widehat{t_1},\widehat{t_2})$ замість $C^1_c((\widehat{t_1},\widehat{t_2}))$).

Нехай $H^m(\Omega) := \{v\in L^2(\Omega)\,|\, D^\alpha v\in L^2(\Omega)\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_+, |\alpha|\leqslant m\}$ – простір Соболєва, який є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(v,w)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha v D^\alpha w\,dx$ та нормою $\|v\|_{H^m(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha v|^2\,dx\right)^{1/2}$. Під $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ будемо розуміти замикання в $H^m(\Omega)$ простору $C^\infty_c(\Omega)$ ($C^\infty_c(\Omega)$ – лінійний простір, що складається з нескінченно диференційовних на Ω функцій, які мають компактний носій).

Нехай $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x\in\Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x\in\Omega\setminus\Omega_0$. Позначимо через $H_b(\Omega)$ лінійний простір, елементами якого є функції $w=\widetilde{b}^{-1/2}v$, де $v\in L^2(\Omega)$. На просторі H_b вводимо півнорму $\|w\|_{H_b(\Omega)} := \left(\int_\Omega b(x)|w(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, з якою він є повним півнормованим простором. Легко переконатися, що $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ щільно вкладається в H_b (див. [15, I.3.3]).

Вводимо простір $C(S;H_b(\Omega))$ як лінійний простір функцій $h : S\to H_b(\Omega)$ таких, що $b^{1/2}h\in C(S;L^2(\Omega))$.

Через K_α ($|\alpha| \leqslant m$) позначаємо додатні сталі, для яких правильні нерівності

$$\forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant m: \ \int\limits_\Omega |D^\alpha v|^2\,dx \geqslant K_\alpha \int\limits_\Omega |v|^2\,dx \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega). \tag{4}$$

Існування таких сталих при $|\alpha| \neq 0$ легко випливає з нерівності Фрідріхса, а $K_{\widehat{0}} = 1$.

3. Формулювання задачі та основних результатів

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1), (2), а для цього зробимо відповідні припущення.

Нехай вихідні дані рівняння (1) задовольняють такі умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, – каратеодорівська, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для кожного $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом, а також $a_\alpha(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

($\mathcal{A}_2$) для кожного α ($|\alpha| \in M$), майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t)|\xi| + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega))$;

($\mathcal{A}_3$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \sum_{\alpha \in A} \gamma_\alpha(t)|\xi_\alpha - \eta_\alpha|^2,$$

де множина $A \subset \mathbb{Z}^n_+$ така, що $\{\alpha \,|\, |\alpha| = m\} \subset A \subset \{\alpha \,|\, |\alpha| \in M\}$, та функції $\gamma_\alpha \in C(S)$, $\alpha \in A$ такі, що $\gamma_\alpha(t) > 0$ $\forall t \in S$, $\forall\, \alpha \in A$;

($\mathcal{C}_1$) функція $c(x,y,t,\rho), (x,y,t,\rho) \in \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}$, – каратеодорівська, тобто для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$ функція $c(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для всіх $\rho \in \mathbb{R}$ функція $c(\cdot,\cdot,\cdot,\rho) : \Omega \times \Omega \times S \to \mathbb{R}$ – вимірна за Лебегом, а також $c(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$;

($\mathcal{C}_2$) існує стала $L \geqslant 0$ така, що для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times S$ та довільних $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|c(x,y,t,\rho_1) - c(x,y,t,\rho_2)| \leqslant L\gamma(t)|\rho_1 - \rho_2|,$$

де

$$\gamma(t) := \sum_{\alpha \in A} K_\alpha \gamma_\alpha(t) \quad \forall t \in S; \tag{5}$$

($\mathcal{F}$) $f_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)) \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \in \{0, m\}$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком* задачі (1), (2) називаємо функцію $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C(S; H_b(\Omega))$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \Big\{ -buv\varphi' + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi + v\varphi \int\limits_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy \Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint_Q \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_\alpha D^\alpha v\varphi\, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall\varphi\in C_c^1(-\infty,0). \tag{6}$$

Зауважимо, що задача (1),(2) може мати багато узагальнених розв'язків. Справді, розглянемо рівняння

$$u_t + (-\Delta)^m u - \int_\Omega (\lambda_1 + \lambda_1^m) v_1(x) v_1(y) u(y,t)\, dy = 0, \tag{7}$$

де λ_1 та $v_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, відповідно, перше власне значення та відповідна йому власна функція, норма якої в $L^2(\Omega)$ дорівнює одиниці, задачі на власні значення

$$-\Delta v(x) = \lambda v(x), \quad x\in\Omega, \qquad v\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Очевидно, що вихідні дані рівняння (7) задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{F})$ і для довільної сталої $C\in\mathbb{R}$ функція $u_C(x,t) = Ce^{\lambda_1 t} v_1(x)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, є розв'язком задачі (7), (2).

Звідси випливає, що для забезпечення єдиності узагальненого розв'язку задачі (1),(2) необхідно накладати обмеження на його поведінку при $t\to-\infty$.

Ми будемо розглядати задачу відшукання узагальненого розв'язку задачі (1),(2), який задовольняє такий "аналог" початкової умови

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega\int_0^t \gamma(s)ds} \|u(\cdot,t)\|_{H_b(\Omega)} = 0, \tag{8}$$

де $\omega\in\mathbb{R}$, а γ – функція, яка визначена в (5).

Цю задачу коротко називатимемо задачею (1),(2), (8), а функцію u – узагальненим розв'язком задачі (1),(2),(8).

Далі нам буде потрібний ще такий функційний простір. Нехай $\omega\in\mathbb{R}$, $\beta\in C(S)$, $\beta(t)>0$ для всіх $t\in S$. Розглянемо гільбертів простір

$$L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega)) := \left\{ f\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)) \;\Big|\; \int_S \beta(t) e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt < \infty \right\}$$

зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} = \int_S \beta(t)\, e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds} (f(\cdot,t), g(\cdot,t))_{L^2(\Omega)}\, dt$$

та нормою

$$\|f\|_{L^2_{\omega,\beta}(S;L^2(\Omega))} := \left(\int_S \beta(t)\, e^{2\omega\int_0^t\gamma(s)\,ds} \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \right)^{1/2},$$

де γ визначено в (5).

Через $\mathrm{mes}_n G$, де G – вимірна множина в $\mathbb{R}^n$, позначатимемо міру Лебега множини G.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{F})$ *і, крім того, у випадку* $b_0 = 0$ *матимемо*

$$Lmes_n\Omega < 1. \tag{9}$$

Припустимо, що $\omega < 1 - Lmes_n\Omega$, *коли виконується умова* (9), *і* $\omega < (1 - Lmes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку, і маємо включення*

$$f_\alpha \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega)) \quad \forall \alpha\ |\alpha| = m, \quad f_{\widehat{0}} \in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega)). \tag{10}$$

Тоді існує і тільки один узагальнений розв'язок задачі (1), (2),(8), *причому для нього правильна оцінка*

$$e^{\omega \int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds} \|u(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{\alpha\in A} \|D^\alpha u\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left[\|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m} \|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \right], \quad \tau \in S, \tag{11}$$

де $S_\tau := (-\infty, \tau]$ $\forall \tau \in (-\infty, 0]$ $(S_0 = S)$, $C_1 > 0$ *– стала, що залежать лише від* L, $mes_n\Omega$, b_0 *та* ω.

4. Обгрунтування основних результатів

При доведенні теореми 1 важливу роль відіграватиме твердження, яке є відомим (див., наприклад, [3]), але ми сформулюємо його у зручній для нас формі.

Лема 1. *Нехай функції* $w \in L^2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))$ *і* $g_\alpha \in L^2(\Omega \times (0,T))$ $(|\alpha| \in M)$, *де* $T > 0$ *такі, що правильна тотожність*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left\{ -bwv\varphi' + \left(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v \right) \varphi \right\} dxdt = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall \varphi \in C^1_c(0,T). \tag{12}$$

Тоді $w \in C([0,T]; H_b(\Omega))$ *і для будь-яких* $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ *та довільної* $\theta \in C^1([0,T])$ *матимемо*

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\|w(\cdot,\tau_2)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\|w(\cdot,\tau_1)\|^2_{H_b(\Omega)} - \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega)}\theta'(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_\Omega \left(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w \right) \theta\,dxdt = 0. \tag{13}$$

Також нам буде потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3), (\mathcal{B}), (\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2)$ *і у випадку* $b_0 = 0$ *– умова* (9). *Припустимо, що* $\omega < 1 - Lmes_n\Omega$, *коли виконується умова* (9), *і* $\omega < (1 - Lmes_n\Omega)/b_0$ *в іншому випадку. Тоді, якщо* u_1 *та* u_2 *– узагальнені розв'язки,* *відповідно, задач, які відрізняються від задачі* (1), (2), (8) *тільки тим, що в першій з них* $f_\alpha = f_{\alpha,1}$, *а в другій* $-$ $f_\alpha = f_{\alpha,2}$ $(|\alpha| \in \{0, m\})$, *де*

$$f_{\widehat{0},k}\in L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega))\ (k \in \{1,2\}),\ f_{\alpha,k} \in L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega))\ (k\in\{1,2\};\ |\alpha| = m), \tag{14}$$

то правильна оцінка

$$e^{\omega\int_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u_1(\cdot,\tau) - u_2(\cdot,\tau)\|_{H_b(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))}+$$
$$+\sum_{\alpha\in A}\|D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left[\|f_{\widehat{0},1} - f_{\widehat{0},2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S_\tau;L^2(\Omega))} + \sum_{|\alpha|=m}\|f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S_\tau;L^2(\Omega))}\right], \quad \tau \in S, \tag{15}$$

де $C_1 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* L, $\mathrm{mes}_n\Omega$, b_0 *і* ω.

Доведення. Вводимо для кожних α $(|\alpha| \in M)$, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $t \in S$ позначення

$$u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad a_{\alpha,12}(x,t) := a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t)) - a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t)),$$

$$c_{12}(x,y,t) := c(x,y,t,u_1(y,t)) - c(x,y,t,u_2(y,t)), \quad f_{\alpha,12}(x,t) := f_{\alpha,1}(x,t) - f_{\alpha,2}(x,t).$$

З (6) отримаємо таку інтегральну тотожність:

$$\iint_Q \left\{ - b u_{12} v\varphi' + \sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12} D^\alpha v\varphi + \left(\int_\Omega c_{12}(x,y,t)\,dy\right) v\varphi\right\} dxdt =$$

$$= \iint_Q \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,12} D^\alpha v\varphi\,dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega),\ \forall\varphi \in C^1_c(-\infty,0). \tag{16}$$

На підставі леми 1 з (16) випливає, що

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int_\Omega b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega b|u_{12}|^2\theta'\,dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega \left\{\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}\, D^\alpha u_{12}+\right.$$
$$\left.+\left(\int_\Omega c_{12}(x,y,t)\,dy\right)u_{12}\right\}\theta\,dxdt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in\{0,m\}} f_{\alpha,12} D^\alpha u_{12}\theta\,dxdt, \tag{17}$$

де $\theta \in C^1(S)$, $\theta(t) > 0$ $\forall t \in S$, та $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні.

Використовуючи нерівність Коші:

$$ac \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}c^2 \quad \forall a, c \in \mathbb{R},\ \forall\varepsilon > 0, \tag{18}$$

оцінимо праву частину рівності (17) так:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m} f_{\alpha,12}\, D^{\alpha}u_{12}\theta\, dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt+ \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_{\alpha}}|f_{\alpha,12}|^2\theta\, dxdt,$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} f_{\widehat{0},12}\, u_{12}\theta\, dxdt \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\, dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\, dxdt, \tag{20}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

З умови $(\mathcal{A}_3)$ отримуємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M} a_{\alpha,12}(x,t)D^{\alpha}u_{12}\theta\, dxdt \geqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt. \tag{21}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ і нерівність Коші-Буняковського, отримуємо

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} c_{12}(x,y,t)\, dy\right)u_{12}\theta\, dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}|c(x,y,t,u_1(y,t)) - c(x,y,t,u_2(y,t))|\, dy\right)|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma(t)\left(\int_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\, dy\right)|u_{12}(x,t)|\,\theta(t)\, dxdt =$$

$$= L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\left(\int_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\, dx\right)\left(\int_{\Omega}|u_{12}(y,t)|\, dy\right)\theta(t)\, dt =$$

$$= L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(t)\left(\int_{\Omega}|u_{12}(x,t)|\ dx\right)^2\theta(t)\, dt \leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta\, dxdt. \tag{22}$$

З (17), на підставі (19) – (22), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_{\Omega} b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\, dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} b|u_{12}|^2\theta'\, dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_{\alpha}|D^{\alpha}u_{12}|^2\theta\, dxdt - L\mathrm{mes}_n\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega}\gamma\,|u_{12}|^2\,\theta dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha|D^\alpha u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}|f_{\alpha,12}|^2\theta\,dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma|u_{12}|^2\theta\,dxdt+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\theta\,dxdt,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – довільні додатні числа.

Взявши в цій нерівності $\theta(t):=2e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}$, $t\in S$, матимемо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2dx-e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2dx-$$

$$-2\omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}b\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2dxdt+$$

$$+2(\delta+(1-\delta))\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt-$$

$$-2L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\;\;dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt,\tag{23}$$

де $\delta\in(0,1)$ – довільне число.

Звідси та з (4) випливає нерівність

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx-e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx-$$

$$-2\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+2(1-\delta)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+2\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{\alpha\in A}K_\alpha\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt-2L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt. \tag{24}$$

З (24), використавши позначеня (5), отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2dx-e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2dx+$$

$$+\big[2(1-\delta)-\varepsilon_1\big]\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt+$$

$$+(2(\delta-L\mathrm{mes}_n\Omega-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\})-\varepsilon_2)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt+\frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\frac{1}{\gamma}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$1-L\mathrm{mes}_n\Omega-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}>0. \tag{26}$$

Справді, нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega>0$. Тоді $\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. Розглянемо два випадки: 1) $\omega\leqslant 0$, 2) $0<\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. В першому випадку ($\omega\leqslant 0$) маємо $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}\leqslant 0$, а отже, нерівність (26) правильна. В другому випадку маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}=\omega\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}b(x)\leqslant\omega<1-L\mathrm{mes}_n\Omega,$$

звідки випливає нерівність (26). Тепер нехай $1-L\mathrm{mes}_n\Omega\leqslant 0$. Тоді $b_0>0$ і $\omega b_0<1-L\mathrm{mes}_n\Omega$. Оскільки

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}=\omega\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}b(x)=\omega b_0,$$

то і в цій ситуації нерівність (26) правильна.

Виберемо у (25) $\delta\in(0,1)$ таке, щоб виконувалась нерівність

$$\delta-L\mathrm{mes}_n\Omega-\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}>0,$$

і візьмемо $\varepsilon_1 = 1-\delta$, $\varepsilon_2 = \delta - L\text{mes}_n\Omega - \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\{\omega b(x)\}$. У підсумку одержимо

$$e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_2}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_2)|^2\,dx - e^{2\omega\int\limits_0^{\tau_1}\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau_1)|^2\,dx +$$

$$+C_3\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha(t)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\right]\leqslant$$

$$\leqslant C_4\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\right], \tag{27}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що залежать лише від L, $\text{mes}_n\Omega$, b_0 та ω.

З (8) випливає умова

$$e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,t)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t\to-\infty. \tag{28}$$

Фіксуючи довільно вибране $\tau_2 = \tau \in S$, спрямуємо τ_1 до $-\infty$ в (27), враховуючи (14) та (28). У підсумку отримаємо

$$e^{2\omega\int\limits_0^\tau\gamma(s)\,ds}\int\limits_\Omega b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx +$$

$$+C_3\left[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\in M}\gamma_\alpha e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|D^\alpha u_{12}|^2\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega \gamma e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_{12}|^2\,dxdt\right]\leqslant \tag{29}$$

$$\leqslant C_4\left[\int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\alpha,12}|^2\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\tau}\int\limits_\Omega\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|f_{\widehat{0},12}|^2\,dxdt\right]. \tag{30}$$

Звідси легко одержуємо оцінку (15). □

Доведення теореми 1. Доведемо *єдиність* узагальненого розв'язку задачі (1), (2), (8). Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1), (2), (8). Згідно з лемою 2 (див. (15)) матимемо

$$\iint\limits_Q \gamma(t)e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dxdt \leqslant 0. \tag{31}$$

Звідки випливає, що $u_1(x,t)-u_2(x,t) = 0$ для м.в. $(x,t)\in Q$. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Доведемо $\widehat{\text{і}}$снування узагальненого розв'язку задачі (1), (2),(8) та його оцінку. Почнемо з апріорної оцінки узагальненого розв'язку. Припустимо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2),(8). Легко бачити, використовуючи умови $(\mathcal{A}_1)$ та $(\mathcal{C}_1)$, що $u = 0$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (8) при $f_\alpha = 0$ ($|\alpha|\in\{0,m\}$), а тому на підставі леми 2 (див. оцінку (15)) при $u_1 = u$, $f_{\alpha,1} = f_\alpha$ та $u_2 = 0, f_{\alpha,2} = 0$ ($|\alpha| \in \{0, m\}$) маємо оцінку (11).

Тепер для кожного $m \in \mathbb{N}$ і α, $|\alpha| \in \{0, m\}$ визначимо $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := f_\alpha(\cdot, t)$, якщо $-m < t \leqslant 0$, і $f_{\alpha,m}(\cdot, t) := 0$, якщо $t \leqslant -m$, та розглянемо задачу на знаходження функції $u_m \in L^2(-m, 0; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C([-m, 0]; H_b(\Omega))$, що задовольняє початкову умову

$$u_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{32}$$

(як елемент простору $C([-m, 0]; H_b(\Omega))$) та рівняння (1) в Q_m в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q_m} \left\{ -bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, t, \delta u_m) D^\alpha v\varphi + \left(\int\limits_\Omega c(x, y, t, u_m(y, t))\, dy \right) v\varphi \right\} dxdt =$$
$$= \iint\limits_{Q_m} \sum_{|\alpha| \in \{0, m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi \, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_c^1(-m, 0). \tag{33}$$

Існування та єдиність розв'язку цієї задачі легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [16]). Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо нулем u_m на весь циліндр $\overline{Q}$ і залишимо позначення u_m для цього продовження. Зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m належить до простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap C(S; H_b(\Omega))$ та задовольняє інтегральну тотожність (6) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α ($|\alpha| \in \{0, m\}$), тобто

$$\iint\limits_{Q} \left\{ -bu_m v\varphi' + \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, t, \delta u_m) D^\alpha v\varphi + \left(\int\limits_\Omega c(x, y, t, u_m(y, t))\, dy \right) v\varphi \right\} dxdt =$$
$$= \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha| \in \{0, m\}} f_{\alpha,m} D^\alpha v\varphi \, dxdt \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), \ \forall \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{34}$$

Це означає, що u_m є узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (8) з $f_{\alpha,m}$ замість f_α ($|\alpha| \in \{0, m\}$). Звідси та доведеного вище, зокрема, випливають (див. (11)) оцінки

$$e^{2\omega \int_0^\tau \gamma(s)\, ds} \|u_m(\cdot, \tau)\|^2_{H_b(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \left[\int\limits_{-\infty}^{\tau} \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\gamma_\alpha} e^{2\omega \int_0^t \gamma(s)\, ds} \|f_\alpha(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt + \right. \tag{35}$$
$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\gamma} e^{2\omega \int_0^t \gamma(s)\, ds} \|f_{\widehat{0}}(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \right], \ \tau \in S,$$

$$\sum_{|\alpha| \in M} D^\alpha \|u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^2_{\omega,\gamma}(S; L^2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\sum_{|\alpha| = m} \|f_\alpha\|_{L^2_{\omega,1/\gamma_\alpha}(S; L^2(\Omega))} + \|f_{\widehat{0}}\|_{L^2_{\omega,1/\gamma}(S; L^2(\Omega))} \right], \tag{36}$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω.

Нехай k, l – довільні натуральні числа, $l > k$. Застосуємо твердження леми 2 до функцій u_k і u_l. У підсумку отримаємо оцінку, яка аналогічна до (15), а саме,

$$\sup_{\tau\in S} e^{2\omega\int\limits_0^\tau \gamma(s)\,ds}\|u_k(\cdot,\tau)-u_l(\cdot,\tau)\|^2_{H_b(\Omega)}+$$
$$+\sum_{|\alpha|\in M}\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))}+\|u_k-u_l\|^2_{L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Bigg[\int\limits_{-l}^{-k}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\gamma_\alpha}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_{\alpha,k}(\cdot,t)-f_{\alpha,l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+$$
$$+\int\limits_{-l}^{-k}\frac{1}{\gamma}e^{2\omega\int\limits_0^t\gamma(s)\,ds}\|f_{\widehat{0},k}(\cdot,t)-f_{\widehat{0},l}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\Bigg], \tag{37}$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $L, \mathrm{mes}_n\Omega, b_0$ і ω. З умови (10) випливає, що права частина нерівності (37) прямує до нуля, коли k та l прямують до $+\infty$. Це означає, що послідовность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в просторах $L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))$ та $C(S;H_b(\Omega))$, а послідовність $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ $(\alpha\in A)$ – в $L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$. Оскільки ці простори є повними, то звідси випливає існування функції

$$u\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))\cap L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega))\cap C(S;H_b(\Omega))$$

такої, що $D^\alpha u\in L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega))$ $(\alpha\in A)$ і

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad C(S;H_b(\Omega)),\ L^2_{\omega,\gamma}(S;L^2(\Omega)) \text{ та } L^2_{\mathrm{loc}}(S;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)), \tag{38}$$

$$D^\alpha u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha u \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\omega,\gamma_\alpha}(S;L^2(\Omega)),\ \alpha\in A. \tag{39}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та нерівності (4) і (36), для будь-яких $t_1,t_2\in S$ отримаємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega|a_\alpha(x,t,\delta u_m)|^2\,dxdt\leqslant C_7\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega\left(|h_\alpha|^2\sum_{|\widetilde{\alpha}|\in M}\left|D^{\widetilde{\alpha}}u_m\right|^2+|g_\alpha|^2\right)dxdt\leqslant C_8, \tag{40}$$

де C_7,C_8 – додатні сталі, які не залежать від m, але можуть залежати від t_1, t_2.

З (40) отримуємо, що для кожного α, $|\alpha|\in M$, послідовність $\{a_\alpha(u_m)\}$ є обмеженою в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$. Звідси та з (38) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ (яку також позначатимемо через $\{u_m\}_{m=1}^\infty$) і функцій $\chi_\alpha\in L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$ $(|\alpha|\in M)$ таких, що

$$D^\alpha u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha u \quad \text{майже всюди на} \quad Q,\quad |\alpha|\in M, \tag{41}$$

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\alpha \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)),\quad |\alpha|\in M. \tag{42}$$

З умови $(\mathcal{A}_1)$ та (41) випливає, що

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(u) \quad \text{майже всюди на} \quad Q,\quad |\alpha|\in M. \tag{43}$$

На підставі [17, лема 1.3], з (42) і (43) отримуємо, що $\chi_\alpha = a_\alpha(u)$ ($|\alpha| \in M$), тобто

$$a_\alpha(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_\alpha(u) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)), \quad |\alpha| \in M. \tag{44}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$, для довільних $t_1, t_2 \in S$ ($t_1 < t_2$) встановлюємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left| \int_\Omega c(x,y,t,u_m(y,t))\,dy - \int_\Omega c(x,y,t,u(y,t))\,dy \right|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left| \int_\Omega [c(x,y,t,u_m(y,t)) - c(x,y,t,u(y,t))]\,dy \right|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant L^2 \mathrm{mes}_n\Omega \int_{t_1}^{t_2} \gamma^2(t) \left(\int_\Omega |u_m(y,t) - u(y,t)|\,dy \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant L^2 (\mathrm{mes}_n\Omega)^2 \max_{t\in[t_1,t_2]} \gamma^2(t) \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m - u|^2\,dxdt. \tag{45}$$

З (38) матимемо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u_m - u|^2\,dxdt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{46}$$

На підставі (45) і (46) отримуємо

$$\int_\Omega c(\circ, y, \cdot, u_m(y,\cdot))\,dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega c(\circ, y, \cdot, u(y,\cdot))\,dy \quad \text{сильно в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)). \tag{47}$$

Тепер доведемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1),(2),(8). Для цього спрямуємо m до $+\infty$ в тотожності (34), враховуючи (38), (44), (47) та означення функцій $f_{\alpha,m}$ ($|\alpha| \in \{0, m\}$). У підсумку отримаємо тотожність (6). Тепер, врахувавши (38), спрямуємо m до $+\infty$ в (35). З отриманої нерівності та умови (10) одержуємо виконання умови (8). Отож, ми довели, що u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2),(8). □

Список використаної літератури

1. R. E. Showalter, *Singular nonlinear evolution equations*, Rocky Mt. J. Math. **10** (1980), no. 3, 499–507. DOI: 10.1216/RMJ-1980-10-3-499
2. R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* Amer. Math. Soc., **49**, Providence, 1997.
3. M. M. Bokalo, O. M. Buhrii, and R. A. Mashiyev, *Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. **2013** (2014), no. 6, 67–87.
4. M. M. Bokalo, *Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, Electron. J. Diff. Equ. **2014** (2014), no. 169, 1–13.

5. M. M. Bokalo and I. V. Skira, *Almost periodic solutions for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearty*, Int. J. Evol. Equ. **10** (2017), no. 3-4, 297–314.
6. A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Матем. сб. **42** (1935), no. 2, 199–216.
7. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*, УМН **31** (1976), no. 6(192), 142–166; **English version:** O. A. Oleĭnik and G. A. Iosif'yan, *An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains* Russ. Math. Surv. **31** (1976), no. 6, 153–178. DOI: 10.1070/RM1976v031n06ABEH001583
8. П. Я. Пукач, *О задаче без начальных условий для одной нелинейной вырождающейся параболической системы*, Укр. мат. журн. **46** (1994), no. 4, 454–456; **English version:** P. Ya. Pukach, *On the problem without initial conditions for a nonlinear degenerating parabolic system*, Ukr. Math. J. **46** (1994), no. 4, 484–487. DOI: 10.1007/BF01060422
9. С. П. Лавренюк, М. Б. Пташник, *Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболическои системы*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 5, 667–673; **English version:** S. P. Lavrenyuk and M. B. Ptashnik, *Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system*, Differ. Equ. **36** (2000), no. 5, 739–748. DOI: 10.1007/BF02754233
10. M. Bokalo and A. Lorenzi, *Linear evolution first-order problems without initial conditions.* Milan J. Math. **77** (2009), 437–494. DOI: 10.1007/s00032-009-0107-6
11. Н. П. Процах, *Задача без початкових умов для нелінійного ультрапараболічного рівняння з виродженням*, Мат. методи фіз.-мех. поля **52** (2009), no. 1, 7–19; **English version**: N. P. Protsakh, *A problem without initial conditions for a nonlinear ultraparabolic equation with degeneration*, J. Math. Sci. **168** (2010), no. 4, 505–522. DOI: 10.1007/s10958-010-0003-1
12. O. Buhrii and N. Buhrii, *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity*, New Trends in Mathematical Sciences **5** (2017), no. 3, 128–153. DOI: 10.20852/ntmsci.2017.191
13. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017), 859-–883. DOI: 10.1515/math-2017-0069
14. M. Loayza, *Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms*, Electron. J. Diff. Equ. **2013** (2013), no. 228, 1–12.
15. R. E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Monographs and Studies in Mathematics (Monographs in differential equations), Vol. **1**, Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977.
16. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, пер. с нем., Мир, Москва, 1978.
17. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

Стаття: надійшла до редколегії 23.11.2018
доопрацьована 04.12.2018
прийнята до друку 26.12.2018

WELL-POSEDNESS OF THE FOURIER PROBLEM FOR HIGHER-ORDER WEAKLY NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Mykola BOKALO, Iryna SKIRA

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

The existence and uniqueness of a weak solution of the Fourier problem for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems are investigated. In addition, some properties of the weak solutions of the Fourier problem are considered.

Key words: Fourier problem, problem without initial condition, degenarated parabolic equation, elliptic-parabolic equation, integro-differential equation, functional-differential equation.