ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 66–81
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 66–81
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.066-081

УДК 517.53

ПРО ЗРОСТАННЯ ВИПАДКОВИХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Олег СКАСКІВ, Надія СТАСІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, Львів
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Нехай $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ — послідовності невід'ємних чисел і комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, відповідно. Досліджуємо величини R-порядків $\rho_F(\omega)$ і R-типів $T_F(\omega)$ зростання випадкових рядів Діріхле вигляду $F(z) = F(z,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$ $(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$. Зокрема, у випадку, коли $\beta(\Lambda) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$ доведено таке твердження: якщо $\big(|f_k(\omega)|\big)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то для того, щоб $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ м.н., необхідно і достатньо, щоб $(\forall \varepsilon \in (0,\rho))$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) < +\infty \ \wedge\ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Ключові слова: цілі функції, випадкові ряди Діріхле, R-порядок зростання.

1. Вступ

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – ймовірнісний простір. Крім цього, нехай $\Lambda(\omega) = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f}(\omega) = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ – послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, відповідно, через $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ позначатимемо послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а через $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ – числову послідовність таку, що $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$. Крім цього вважатимемо, що $\lambda_k(\omega) \neq \lambda_m(\omega)$ для всіх $n \neq k$ м.н. (майже напевно).

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50, 11F66

Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас цілих випадкових (м.н. абсолютно збіжних у всій комплексній площині) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F_\omega(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \tag{1}$$

що для фіксованого $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{z\lambda_k}, \tag{2}$$

де $a_k = f_k(\omega_0),\ \lambda_k = \lambda_k(\omega_0)$. А основним об'єктом розгляду у цьому повідомленні є випадкові цілі ряди Діріхле вигляду

$$F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega). \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$, а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+. Через $\widetilde{\mathcal{D}}$ позначимо клас формальних рядів Діріхле вигляду (1) таких, що $\sigma_\mu(F,\omega) := \sup\{x \in \mathbb{R}\colon f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)\} > -\infty$ м.н. Зрозуміло, що $\mathcal{D} \subset \widetilde{\mathcal{D}}$.

Зазначимо, що як у випадку рядів вигляду (2), так і випадкових рядів Діріхле вигляду (3) (або й загального вигляду (1)) питання збіжності таких рядів досліджене у багатьох працях з практично вичерпною повнотою (див., наприклад, [1]–[11]). У [12]–[18] розглядали питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ у випадку $\tau(\Lambda) := \overline{\lim}_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k < +\infty$; з коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ в [13, 14, 15]. У випадку, коли $\tau(\Lambda_+) = 0$, а коефіцієнти ряду Діріхле $(f_k(\omega))$ попарно незалежні в [16, 17] твердження про абсцису абсолютної збіжності отримані в термінах умов на функції розподілу $F_k(x) := P\{\ \omega : |f_k(\omega)| < x\}\,,\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0$. У [19, 20, 21], зокрема, отримано оцінки абсцис збіжності у випадку, коли коефіцієнти ряду Діріхле мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, а послідовність $(\lambda_k(\omega))$ є послідовністю попарно незалежних випадкових величин, при цьому теореми формулюються в термінах обмежень на функції розподілу $F_k(x) := P\{\ \omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0$ (подібно, для випадкових кратних рядів Діріхле в [22]). У [16, 17] і в [20, 21, 22] умова попарної незалежності забезпечує можливість застосування уточненої другої частини леми Бореля-Кантелі (див. [29], [32, с. 84]). У зв'язку з дослідження областей збіжності випадкових кратних рядів Діріхле вкажемо також на праці [24, 25].

Дослідження зростання випадкових рядів Діріхле мають у цілому доволі фрагментарний вигляд (див., наприклад, [13, 14, 18, 26, 27]). У цьому повідомленні ми заповнюємо деякі прогалини для випадкових цілих рядів Діріхле, як вигляду (3), так і загального вигляду (1), які стосуються формул для обчислення R-порядків і R-типів таких рядів. Деякі з отриманих тверджень є новими навіть в інтерпретації для цілих рядів Діріхле з показниками Λ_+ і коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$.

2. Основні поняття, допоміжні твердження про R-порядки та R-типи

Отже, якщо $F \in \mathcal{D}$, то за умовою абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле (1) $\sigma_a(F,\omega) = +\infty$ м.н. Тоді, за твердженням 1 з [19] $\sigma_a(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$ м.н., де $\sigma(F,\omega)$ – абсциса збіжності ряду (1). А якщо додатково припустити, що $\underline{\lim}_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ м.н., то за твердженням 2 з [19]

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

З іншого боку, якщо $\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$ або $h(\omega) := \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0$, і $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд (1), то за твердженням 10 з [19]

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega).$$

Наступне твердження добре відоме у випадку рядів Діріхле вигляду (2) зі зростаючими показниками $\Lambda_+ = (\lambda_k)$.

Твердження 1. *Якщо при фіксованих $x\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, ряд Діріхле $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{(x+iy)\lambda_k(\omega)}$ рівномірно збіжний по $y \in \mathbb{R}$ до $F_\omega(x+iy)$, то для кожного $m \geqslant 0$*

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} F_\omega(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{4}$$

Доведення. Для фіксованних $n \geqslant m \geqslant 0$ розглянемо експоненційний поліном $Q_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}$. Тоді скінченну послідовність $(\lambda_k(\omega))_{k=0}^n$ при фіксованому ω можна впорядкувати за зростанням і, тому (див., наприклад, [9, с.13])

$$f_m(\omega)e^{x\lambda_m(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} Q_n(x+iy)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy. \tag{5}$$

Зауважимо спочатку, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2T}\Big|\int\limits_{-T}^{T} \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)e^{-i\lambda_m(\omega)y}dy\Big| \leqslant \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big|dy \leqslant$$
$$\leqslant \sup\Big\{\big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| : y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Але $F_\omega(x+iy) = Q_n(x+iy) + \big(F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big)$, тому послідовно за допомогою рівності (5), скориставшись рівномірною збіжністю, отримуємо

$$\varlimsup_{T\to+\infty} \Big| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} F_\omega(x+iy) e^{-iy\lambda_m(\omega)} dy - f_m(\omega) e^{x\lambda_m(\omega)} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{T\to+\infty} \Big| \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} Q_n(x+iy) e^{-i\lambda_m(\omega)y} dy - f_m(\omega) e^{x\lambda_m(\omega)} \Big| +$$

$$+ \sup\Big\{ \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| : y \in \mathbb{R} \Big\} =$$

$$= \sup\Big\{ \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| : y \in \mathbb{R} \Big\} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

□

Зауваження 1. Нескладно помітити, що у попередньому твердженні умову рівномірної збіжності при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ можна замінити на істотно слабшу в загальному умову, зокрема, наприклад, можна вважати, що при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ виконується

$$\lim_{n\to+\infty} \varlimsup_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \big|F_\omega(x+iy) - Q_n(x+iy)\big| dy = 0.$$

Нехай L – клас неперервних функцій $\alpha\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ і таких, що $\alpha(x) \uparrow +\infty$ $(0 < x \uparrow +\infty)$. Для функції $\alpha \in L$ її ***R-порядком*** і ***R-типом*** називаємо, відповідно, величини

$$\rho[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{x}, \qquad T[\alpha] := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\exp\{\rho[\alpha]x\}}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F вигляду (2) через

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{і} \qquad \mu(x,F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

позначимо, відповідно, максимум модуля і максимальний член ряду; $\nu(x,F) = \max\{n : |a_n| e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду (2).

Величинами R-порядку і R-типу цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2) називають, відповідно, числа

$$\rho_F := \rho[\ln M(\cdot, F)], \qquad T_F := T[\ln M(\cdot, F)].$$

Нехай $\rho_\mu = \rho[\ln \mu]$, $T_\mu = T[\ln \mu]$, відповідно, R-порядок і R-тип максимального члена $\mu(x,F)$ ряду Діріхле. Для $x \in \mathbb{R}$ і цілого ряду Діріхле F_ω вигляду (1) при фіксованому $\omega \in \Omega$ у відповідних позначеннях пишемо

$$M(x,F_\omega) = M(x,F,\omega), \quad \mu(x,F_\omega) = \mu(x,F,\omega), \quad \rho_F(\omega), \quad T_F(\omega), \quad \rho_\mu(\omega), \quad T_\mu(\omega).$$

З рівності (4) негайно отримуємо такий стандартний аналог нерівності Коші (у випадку монотонної системи показників див., наприклад, теорема 1.5 [9])

$$\mu(x,F_\omega) \leqslant M(x,F_\omega)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому для R-порядків і R-типів матимемо

$$\rho_\mu(\omega) \leqslant \rho_F(\omega), \quad T_\mu(\omega) \leqslant T_F(\omega).$$

Зауважимо, якщо

$$\sup\{\lambda_k\colon k \geqslant 0\} := \gamma < +\infty,$$

то $\ln M(x, F_\omega) = O(x)$, $\ln \mu(x, F_\omega) = O(x)$ $(x \to +\infty)$. Тому скрізь надалі вважатимемо, що $\gamma = +\infty$.

Нескладно переконатись. що правильне таке твердження. У випадку цілих рядів Діріхле $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ вигляду (2) це теорема 1 з [28, c.265].

Твердження 2. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (1)

$$\rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(\omega)\ln\lambda_k(\omega)}{-\ln|f_k(\omega)|}.$$

Твердження 3 ([28, Theorem 3, p. 265])**.** *Якщо $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ має вигляд* (2) *і виконується умова $\beta(\Lambda_+) := \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$, то $\rho_F = \rho_\mu$, і отже, $\rho_F = k_F = \rho_\mu$.*

Зауваження 2. Твердження 3 за умови $\beta(\Lambda) = 0$ є застосовним при фіксованому $\omega \in \Omega$ до кожного ряду Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (3), при цьому $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|}$ м.н.

Твердження 4. *Для кожного ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}$ вигляду* (1) *м.н.*

$$T_\mu(\omega) = K_F(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(\omega)}{e\rho}|f_k(\omega)|^{\rho/\lambda_k(\omega)}, \quad \rho = \rho_\mu(\omega).$$

Якщо ж виконується умова $\tau(\Lambda, \omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$, то $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = k_F(\omega)$, $T_F(\omega) = T_\mu(\omega) = K_F(\omega)$ м.н.

Справді, перша частина, як і твердження 2, доводиться за допомогою стандартних міркувань. Далі, при фіксованому ω такому, що $\tau(\Lambda, \omega) = 0$, для всіх досить великих $k \geqslant k_0 = k_0(\omega)$ маємо $\lambda_k(\omega) > \ln k/\varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\{-2\ln k\} < +\infty,$$

звідки $C(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)\} < +\infty$, і отже,

$$M(x, F_\omega) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)| e^{(x+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} e^{-2\varepsilon\lambda_k(\omega)} \leqslant C(\varepsilon)\mu(x + 2\varepsilon, F_\omega).$$

Звідси отримуємо, що $T_F(\omega) \leqslant T_\mu(\omega) \cdot e^{2\varepsilon\rho_F(\omega)}$. Спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, остаточно одержуємо, що $T_F(\omega) = T_\mu(\omega)$.

Твердження 5. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}$ *має вигляд* (1) *і* $h = h(\omega) := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{-\ln|f_k(\omega)|} < 1$. *Тоді для кожного* $\varepsilon \in (0, 1-h)$ *і всіх* $x \geqslant 0$

$$M(x, F_\omega) \leqslant C(\varepsilon)\Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-\varepsilon}, F_\omega\big)\Big)^{1-h-\varepsilon}, \quad C(\varepsilon) = C(\varepsilon,\omega) < +\infty.$$

Зокрема, $\rho_F(\omega) \leqslant \rho_\mu(\omega)/(1-h(\omega))$ *м.н., а також* $\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega)$ *м.н. за умови* $h(\omega) = 0$ *м.н.*

Справді, якщо $F_\omega \in \mathcal{D}$ має вигляд (1), то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. З умови $h = h(\omega) < 1$ випливає, що для кожного $2\varepsilon \in (0, 1-h)$ виконується нерівність $-\ln|f_k(\omega)| > \ln k/(h+\varepsilon)$ для всіх досить великих $k \geqslant k_0$. Тоді

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) = C(\varepsilon,\omega) &:= \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} = \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{h+2\varepsilon}{h+\varepsilon}\ln k\Big\} < \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Тому для всіх $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} M(x, F_\omega) &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-h-2\varepsilon} e^{x\lambda_k(\omega)} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(|f_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)/(1-h-2\varepsilon)}\Big)^{1-h-2\varepsilon} |f_k(\omega)|^{h+2\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant \Big(\mu\big(\frac{x}{1-h-2\varepsilon}, F_\omega\big)\Big)^{1-h-2\varepsilon} C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Звідси, $\rho_F(\omega) \leqslant \rho_\mu(\omega)/(1-h-2\varepsilon)$. Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$.

3. Зростання випадкових рядів з детермінованими показниками

Наслідуючи Ф. Тян (F. Tian) ([13]), спершу розглянемо питання про формули для визначення величин R-порядів і R-типів випадкових рядів Діріхле $F_\omega \in \mathcal{D}$ вигляду (3) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k \cdot Z_k(\omega)$. Доведемо таке твердження.

Твердження 6. *Нехай* $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ *і має вигляд* (2), *а* $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ *має вигляд* (3), *де* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. *Якщо* $\rho_\mu = \rho[\ln\mu(\cdot, F)] < +\infty$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln\lambda_k} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{6}$$

і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ *або* $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, *то* $F_\omega \in \mathcal{D}$ *і* $\rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|a_k|}$ *м.н.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що за твердженням 5 $\rho_\mu = k_F$, тому

$$(\forall\varepsilon)(\exists k_0)(\forall k \geqslant k_0)\colon \quad |\ln|a_k|| > \frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln\lambda_k,$$

звідки, за умовою $\beta(\Lambda) = 0$ отримуємо, що $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$.

Ми вже згадували, що за твердженням 10 з [19], застосованим до ряду F_ω

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k}.$$

Але,

$$\delta := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|Z_k(\omega)|\big|}{\big|\ln|a_k|\big|} \leqslant (\rho+\varepsilon) \lim_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k\ln\lambda_k} = 0.$$

Тому отримуємо, що м.н.

$$\sigma_a(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} \cdot \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = \sigma_\mu(F) = +\infty,$$

тобто, $F_\omega \in \mathcal{D}$. Оскільки, як вище відзначалося

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = 0, \tag{7}$$

то $\ln k = o(\ln|a_k Z_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$. Тому для обчислення величини порядку $\rho_F(\omega)$ за твердженням 5 матимемо

$$\rho_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k\ln\lambda_k}{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k\ln\lambda_k}{-\ln|a_k|} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right)^{-1} = k_F.$$

При цьому ми знову скористалися співвідношенням (7). □

Зазначимо також таку нескладну модифікацію попереднього твердження.

Твердження 7. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2), а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}(\Lambda)$ і має вигляд (3), де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо $\rho_\mu = \rho[\ln\mu(\cdot,F)] \in (0,+\infty)$,*

$$B_1 = \left\{\omega\colon \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} = \delta(\omega) \geqslant 0\right\},$$

$$B_2 = \left\{\omega\colon \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} = \Delta(\omega) < 0\right\},$$

$$B_3 = \left\{\omega\colon \lim_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k\ln\lambda_k} = 0\right\},$$

$$B_4 = \left\{\omega\colon \theta(\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right| < 1\right\}$$

і виконується одна з двох умов $\beta(\Lambda) = 0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, то $(\exists B \in \mathcal{A},\ P(B) = 0)$:

i) $\omega \in B_1 \setminus B,\ \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F} > 0 \implies \sigma_a(F,\omega) = +\infty$;

ii) $\omega \in B_1 \setminus B \implies \frac{1}{\rho_\mu(\omega)} \geqslant \delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F}$;

iii) $\omega \in B_2 \setminus B\ \wedge\ \sigma_a(F,\omega) = +\infty \implies \frac{1}{\rho_F(\omega)} \leqslant \Delta(\omega) + \frac{1}{\rho_F}$;

$$iv)\ \omega \in B_3 \setminus B \implies \rho_F(\omega) = \rho_\mu = k_F := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|a_k|};$$

$$v)\ \omega \in B_4 \setminus B \implies \sigma_a(F,\omega) = +\infty\ \wedge\ \left|\frac{\rho_F}{\rho_F(\omega)} - 1\right| \leqslant \theta.$$

Доведення. Оскільки $F(0) \neq \infty$, то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ м.н. Спочатку зазначимо, що п. $iv)$ доводиться аналогічно, як твердження 6.

У випадку $\omega \in B_1$, оскільки $-\ln|a_k| > \lambda_k \ln \lambda_k/(\rho_F + \varepsilon)$ і

$$-\ln|Z_k(\omega)| > (\delta(\omega) - \varepsilon)\lambda_k \ln \lambda_k$$

для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$, то

$$-\ln|f_k(\omega)| \geqslant \left(\delta(\omega) - \varepsilon + \frac{1}{\rho_F + \varepsilon}\right)\lambda_k \ln \lambda_k.$$

Звідси, вибираючи $\varepsilon > 0$ так, щоб виконувалось $\delta(\omega) - \varepsilon + \dfrac{1}{\rho_F + \varepsilon} > 0$, з умови $\beta(\Lambda) = 0$ нескладно отримуємо, що $\sigma_\mu(\omega) = +\infty$.

Стосовно доведення п.п. $ii)$, $iii)$, зауважимо таке: оскільки $\varliminf(a-b) \geqslant \varliminf a - \varlimsup b$, то

$$\frac{1}{\rho_F} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = \varliminf_{k\to+\infty}\left(\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} - \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} - \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} = \frac{1}{k_F(\omega)} - \Delta(\omega).$$

Подібно, оскільки $\varliminf(a-b) \leqslant \varliminf a - \varliminf b$, то $\frac{1}{\rho_F} \leqslant \frac{1}{k_F(\omega)} - \delta(\omega)$. Але $k_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) \leqslant \rho_F(\omega)$.

Якщо $\omega \in B_4$, то

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\ln k} \geqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \cdot \left(1 - \varlimsup_{k\to+\infty}\left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|\right) =$$
$$= (1 - \theta(\omega)) \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} = +\infty.$$

Тому, за твердженням 10 з [19], застосованим до ряду F_ω

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{\big|\ln|a_k||Z_k(\omega)|\big|}{\lambda_k} \geqslant$$
$$\geqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} \cdot \left(1 - \varlimsup_{k\to+\infty}\left|\frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right|\right) = \sigma_\mu(F)(1 - \theta(\omega)) = +\infty.$$

Далі, за твердженням 5

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k| - \ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \cdot \varliminf_{k\to\infty}\left(1 - \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) =$$
$$= k_F(1 - \theta(\omega)).$$

Подібно отримуємо

$$\frac{1}{\rho_F(\omega)} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k \ln\lambda_k} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1 - \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = k_F(1+\theta(\omega)).$$

Але $k_F = \rho_F$. □

Отримаємо тепер у вигляді простого наслідку такий аналог теореми 2 з [13].

Твердження 8. *Нехай $(Z_k(\omega))$ — послідовність випадкових величин така, що*

(8) $$(\exists\alpha>0)\colon\ \sup\{\mathbf{M}|Z_k|^{\alpha}, \mathbf{M}|Z_k|^{-\alpha}\colon k\geqslant 0\} < +\infty,$$

а ряд Діріхле $F\in\mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (2), а $F_\omega \in \widetilde{\mathcal{D}}$ має вигляд (3), де $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$. Якщо виконується умова $\beta(\Lambda)=0$ або $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k\to+\infty)$, то $F_\omega\in\mathcal{D}$ і

$$\rho_F(\omega) = \rho_\mu(\omega) = \rho_F = k_F \quad \text{м.н.}$$

Доведення. З умови (8) випливає, що

$$\ln|Z_k(\omega)| = O(\ln k) \quad (r\to+\infty) \quad \text{м.н.}$$

Справді, за нерівністю Маркова $P\{\omega\colon |\xi(\omega)|\geqslant a\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\xi}{a}$, $a>0$, тому для $\eta>0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geqslant k^{1+\eta}\} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{M}(|Z_k(\omega)|^{\alpha})/k^{1+\eta} < +\infty.$$

Звідси, за першою частиною леми Бореля-Кантелі серед подій $\big(\{\omega\colon |Z_k(\omega)|^{\alpha} \geqslant k^{1+\eta}\}\big)$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці, виконується скінченна їхня кількість, отже, м.н. для всіх достатньо великих k виконується нерівність $|Z_k(\omega)| < k^{(1+\eta)/\alpha}$. Подібно з оцінкою знизу. Отже, за умовою $\beta(\Lambda)=0$ отримуємо, що $\ln|Z_k(\omega)| = o(\lambda_k\ln\lambda_k)$ $(k\to+\infty)$ м.н., тобто виконуються умови твердження 6. □

Зауваження 3. У статті [13] замість умови $\beta(\Lambda)=0$ вимагається виконання умови $\tau(\Lambda) = \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{\lambda_k} < +\infty$. Зрозуміло, що умова $\beta(\Lambda)=0$ випливає з останньої умови і в загальному, умова $\beta(\Lambda)=0$ є слабшою за умову $\tau(\Lambda)<+\infty$.

Відзначимо також такий наслідок з тверджень 2 і 3.

Твердження 9. *Нехай $F_\omega\in\mathcal{D}(\Lambda)$ і має вигляд (3). Якщо $\beta(\Lambda_+)=0$, а $(f_k(\omega))$ – послідовність незалежних випадкових величин, то $\rho_F(\omega)\equiv\rho\in[0,+\infty]$ м.н., при цьому*

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\lambda_k\ln\lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho.$$

Справді, за законом нуля й одиниці Колмогорова, випадкова величина $k_F(\omega)$ є майже напевне сталою, тобто існує $\rho\in[0,+\infty]$ таке, що $k_F(\omega)\equiv\rho$ м.н. Залишається застосувати твердження 2 і 3.

Наступна теорема містить умови, які мають задовольняти випадкові величини $f_k(\omega)$ для того, щоб для довільного наперед заданого $\rho\in[0,+\infty]$ виконувалась рівність $\rho_F(\omega)=\rho$ м.н. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, *має вигляд* $F_\omega(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, *а* $\big(|f_k(\omega)|\big)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_+$. *Якщо* $\beta(\Lambda) = 0$, *то:*

a) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon \in (0,\rho))\colon \ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln\lambda_k}\big)\Big) < +\infty \ \wedge \ \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln\lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

b) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = 0$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln\lambda_k} + 0\big)\Big) < +\infty.$$

c) *для того, щоб* $\rho_F(\omega) = +\infty$ *м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(1 - F_k\big(e^{-\varepsilon\lambda_k \ln\lambda_k}\big)\Big) = +\infty.$$

Доведення. **a)** *Необхідність.* За умовою $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall\omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = \rho.$$

Оскільки ряд Діріхле при $\omega \in B$ в точці $z = 0$ збіжний, то $-\ln|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і за означенням $\varlimsup$ матимемо

$$(\forall\omega \in B)(\forall\varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega))\colon \ |f_k(\omega)| < \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{\rho+\varepsilon}\right\}.$$

Розглянемо подію

$$A_k(\varepsilon) := \left\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geqslant \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{\rho+\varepsilon}\right\}\right\}.$$

Зауважимо, що, $B \subset C(\varepsilon) := \bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon)$, і тому $P(C(\varepsilon)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon)$ – подія“ серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій”, а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі (див. [29], [32, p. 84]) отримуємо, що

$$\sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon)) < +\infty. \tag{9}$$

Залишається скористатись рівністю

$$P(A_k(\varepsilon)) = 1 - P(\overline{A}_k(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{\rho+\varepsilon}\right\}\right).$$

Далі, за означенням $\varlimsup$ маємо, що для кожного $\omega \in B$ існує послідовність $m_j \to +\infty$ така, що при $k = m_j$, $j \geqslant 1$

$$|f_k(\omega)| > \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln\lambda_k}{\rho-\varepsilon}\right\}.$$

Звідси $B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon)$, де

$$A_k^1(\varepsilon) = \{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}.$$

Тоді $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Зауважимо, що $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій". Оскільки

$$P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}\right),$$

то залишається довести, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty. \tag{10}$$

Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) < +\infty$. Але тоді за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C}^1(\varepsilon)) = 1$, звідки $P(\overline{C}^1(\varepsilon)) = 0$. Суперечність. Тому, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$.

Достатність. Зберігаємо позначення з доведення необхідності. З умови випливає, що виконується умова (9). Тому за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що ймовірність події $C(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon))$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C(\varepsilon)) = 1$. Зауважимо, що для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho + \varepsilon}\right\}$. Звідси для кожного $\omega \in C(\varepsilon)$ і для всіх $k \geqslant k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} \leqslant \rho + \varepsilon.$$

Далі, подібно одержуємо таке: оскільки $P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\rho - \varepsilon}\right\}\right)$, то виконується (10). Звідси за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки $|f_{m_k}(\omega)| > \exp\left\{-\dfrac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{\rho - \varepsilon}\right\}$. Тому для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} \geqslant \rho - \varepsilon.$$

Позначимо тепер $C^2(\varepsilon) = C(\varepsilon) \bigcap C^{(1)}(\varepsilon)$. Тоді $P\left(\bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)\right) = 1$, і отже, остаточно отримуємо

$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k(\omega)|} = \rho$ для кожного $\omega \in \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^{(2)}(1/m)$, тобто, м.н.

b) *Необхідність.* За умовою $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B)=1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = 0.$$

Оскільки, за означенням верхньої границі для кожного $\omega \in B$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$

$$|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon_1}\lambda_k \ln \lambda_k\right\} \quad \text{для всіх} \quad k \geqslant k_0(\omega),$$

то, міркуючи подібно, як в доведенні необхідності в п. **a)**, введемо спочатку до розгляду події

$$A_k(\varepsilon_1) := \left\{\omega\colon |f_k(\omega)| \geqslant \exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\right\}\right\}, \qquad C(\varepsilon_1) := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k(\varepsilon_1),$$

а потім знову зауважимо, що $B \subset C(\varepsilon_1)$, тому $P(C(\varepsilon_1)) = 1$. Оскільки $C(\varepsilon_1)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$ відбувається лише скінченна кількість подій", а попарна незалежність подій $A_k(\varepsilon_1)$ випливає з попарної незалежності випадкових величин $|f_k(\omega)|$, то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі знову $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty$.

Залишається знову скористатись рівністю

$$P(A_k(\varepsilon_1)) = 1 - P\left(\overline{A}_k(\varepsilon_1)\right) = 1 - F_k\left(\exp\left\{-\frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon_1}\right\}\right)$$

і вибрати $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$.

Достатність. Оскільки за умовою $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k(\varepsilon_1)) < +\infty$, то для $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$ за першою частиною леми Бореля-Кантелі матимемо, що ймовірність події $C(\varepsilon_1)$ – "серед елементів послідовності $(A_k(\varepsilon_1))$ відбувається лише скінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C(\varepsilon_1)) = 1$. Звідси для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$ виконується нерівність $|f_k(\omega)| < \exp\left\{-\dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\varepsilon}\right\}$. Тому для кожного $\omega \in C(\varepsilon_1)$ і для всіх $k \geqslant k_1(\omega)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leqslant \varepsilon.$$

Для завершення доведення розглянемо $C^{(2)} := \bigcap_{m=1}^{+\infty} C(m)$. Маємо $P(C^{(2)}) = 1$, тому для всіх $\omega \in C^{(2)}$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \leqslant 1/m,$$

звідки $\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = 0$.

c) *Необхідність.* За умовою, $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B)=1)(\forall \omega \in B)$:

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty.$$

Звідси за означенням верхньої границі $(\forall \varepsilon>0)(\forall \omega \in B)(\exists (m_k), m_k \to +\infty)$:

$$\frac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} > 1/\varepsilon \implies |f_{m_k}(\omega)| > -\varepsilon \lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k},$$

звідки $B \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N} A_k^1(\varepsilon) := C^1(\varepsilon)$, де $A_k^1(\varepsilon) = \{\omega\colon |f_k(\omega)| > \exp\{-\varepsilon\lambda_k \ln \lambda_k\}\}$. Тоді $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Оскільки знову $C^1(\varepsilon)$ – подія "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій", а

$$P(A_k^1(\varepsilon)) = 1 - F_k\left(\exp\{-\varepsilon\lambda_k \ln\lambda_k\} + 0\right),$$

то подібно до того, як це робили раніш, міркуючи від супротивного, за першою частиною леми Бореля-Кантелі доводимо, що $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$.

Достатність. За умовою для кожного $\varepsilon > 0$ матимемо $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k^1(\varepsilon)) = +\infty$. За уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі звідси отримуємо, що ймовірність події $C^1(\varepsilon)$ – "серед елементів послідовності $(A_k^1)(\varepsilon)$ відбувається нескінченна кількість подій" дорівнює одиниці, $P(C^1(\varepsilon)) = 1$. Отже, знову для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$ існує послідовність $m_k \to +\infty$ така, що $\omega \in A_{m_k}^1$, звідки $|f_{m_k}(\omega)| > \exp\big\{-\varepsilon\lambda_{m_k}\ln\lambda_{m_k}\big\}$. Тому для кожного $\omega \in C^{(1)}(\varepsilon)$

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} \geqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_{m_k} \ln \lambda_{m_k}}{-\ln|f_{m_k}(\omega)|} \geqslant 1/\varepsilon.$$

Зауважимо, що $P\left(\bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)\right) = 1$, і отже, остаточно отримуємо

$$\rho_F(\omega) = k_F(\omega) = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln|f_k(\omega)|} = +\infty$$

для кожного $\omega \in \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} C^1(1/m)$, тобто м.н. □

Сформулюємо тепер таку теорему. Схема її доведення цілком подібна до схеми доведення попередньої теореми з тією відмінністю, що замість твердження 6 треба використати твердження 4. З огляду на цю подібність наводимо теорему без доведення.

Теорема 2. *Нехай $F_\omega \in \mathcal{D}(\Lambda)$, має вигляд $F_\omega(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, а $\big(|f_k(\omega)|\big)$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $\tau(\Lambda) = 0$, то:*

a) *для того, щоб $T_F(\omega) = T \in (0, +\infty)$ м.н., необхідно і досить, щоб* $(\forall \varepsilon \in (0, T))$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T+\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty \ \wedge \ \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{(T-\varepsilon)e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

b) *для того, щоб $T_F(\omega) = 0$ м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{\varepsilon e\rho}{\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) < +\infty.$$

c) *для того, щоб $T_F(\omega) = +\infty$ м.н., необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\colon \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(\Big(\frac{e\rho}{\varepsilon\lambda_k}\Big)^{\lambda_k/\rho}\Big)\Big) = +\infty.$$

Список використаної літератури

1. H. Bohr, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 203–211. DOI: 10.1515/crll.1913.143.203
2. H. Bohr, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletchen Reihen* $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1913** (1913), no. 4, 441–488.
3. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge University Press, London, 1915, 78 p.
4. G. Valiron, *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. Fr. **52** (1924), 166–174. DOI: 10.24033/bsmf.1051
5. H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet Series*, Ann. Math. (2) **32** (1931), no. 3, 600–622. DOI: 10.2307/1968255
6. С. Мандельбройт, *Ряды Дирихле, принципы и методы*, Мир, Москва, 1973.
7. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1976, 536 с.
8. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса*, Буковинський матем. журн. **1** (2013), no. 3–4, 43–48.
9. М. М. Шеремета, *Цілі ряди Діріхле*, ІСДО, Київ, 1993.
10. О. М. Мулява, *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*, Мат. Студ. **9** (1998), no. 2, 171–176.
11. О. Б. Скасків, А. І. Бандура, *Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції*, пп. Голіней, Львів–Івано-Франківськ, 2015, 108 с.
12. J.–P. Kahane, *Some random series of functions*, 2nd. ed. Cambridge Stud. Adv. Math. **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 308 p.
13. F. Tian, *Growth of random Dirichlet series*, Acta Math. Sci. (Engl. Ed.) **20** (2000), no. 3, 390–396. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30646-X
14. F. Tian, Sun Dao-chun, and Yu jia-rong, *Sur les séries aléatoires de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. **326** (1998), no. 4, 427–431. DOI: 10.1016/S0764-4442(97)89786-8
15. P. V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 1, 33–39.

16. L. O. Shapovalovska and O. B. Skaskiv, *On the radius of convergence of random gap power series*, Int. J. Math. Anal., Ruse **9** (2015), no. 38, 1889–1893. DOI: 10.12988/ijma.2015.53115
17. О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська, *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле*, Буковинський матем. журн. **3** (2015), no. 1, 110–114.
18. X. Ding and Y. Xiao, *Natural boundary of random Dirichlet series*, Укр. матем. журн. **58** (2006), no. 7, 997–1005; **reprinted version in:** Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 7, 1129–1138. DOI: 10.1007/s11253-006-0124-3
19. О. Скасків, Н. Стасів, *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками*, Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. **84** (2017), 96–112.
20. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *Convergence of Dirichlet series with random exponents*, Int. J. Appl. Math. **30** (2017), no. 3, 229–238. DOI: 10.12732/ijam.v30i3.2
21. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents*, arXiv:1703.03280, 2017, preprint.
22. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів, *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками та коефіцієнтами*, Буковинський матем. журн. **5** (2017), no. 3–4, 90–97.
23. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the convergence of random multiple Dirichlet series*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 2, 122–137. DOI:10.15330/ms.49.2.122-137
24. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Про області збіжності випадкових подвійних рядів Діріхле*, Mat. Stud. **32** (2009), no. 1, 81–85.
25. O. Yu. Zadorozhna and O. B. Skaskiv, *On domains of convergence of multiple random Dirichlet series*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 1, 51–57.
26. Y. Y. Huo, D. Ch. Sun, *The growth of random Dirichlet series*, J. Math. Res. Expo. **28** (2008), no. 4, 1027–1030.
27. Jia-rong Yu, *Julia lines of random Dirichlet series*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 5, 341–353. DOI: 10.1016/j.bulsci.2004.02.005
28. K. Sugimura, *Übertragung einiger satze aus der theorie der ganzen funktionen auf Dirichletsche reihen*, Math. Z. **29** (1929), no. 1, 264–277. DOI: 10.1007/BF01180529
29. P. Erdős and A. Rényi, *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$, Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. **2** (1959), 93–109.
30. V. V. Petrov, *Sums of idependent random variables*, Springer, New York, 1975.
31. А. И. Мартикайнен, В. В. Петров, *О лемме Бореля–Кантелли*, Исследования по математической статистике. **9**, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **184** (1990), 200–207; **English version:** A. I. Martikainen and V. V. Petrov, *On the Borel-Cantelli lemma*, J. Math. Sci. **68** (1994), no. 4, 540–544. DOI: 10.1007/BF01254279
32. P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley, New York, 1986.

Стаття: надійшла до редколегії 18.11.2018.
доопрацьована 02.12.2018.
прийнята до друку 26.12.2018.

ON THE GROWTH OF RANDOM ENTIRE DIRICHLET SERIES

Oleh SKASKIV, Nadia STASIV

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Let $\Lambda = \big(\lambda_k\big)_{k=0}^{+\infty}$ and $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ be, respectively, a sequence of non-negative numbers and a sequence of complex-valued random variables on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. In the paper we study the values of the R-orders $\rho_F(\omega)$ and the R-types $T_F(\omega)$ of the growth of random Dirichlet series of the form $F(z) = F(z,\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$ $(z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega)$. In particular, in the case, when $\beta(\Lambda) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = 0$, the following assertions are proved: If $\big(|f_k(\omega)|\big)$ is a sequence of pairwise independent random variables with the distribution functions $F_k(x) := P\{\omega\colon |f_k(\omega)| < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, then in order that $\rho_F(\omega) = \rho \in (0, +\infty)$ a.s., it is necessary and sufficient that $(\forall \varepsilon \in (0,\rho))$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(e^{-\frac{1}{\rho+\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\Big)\Big) < +\infty \ \wedge\ \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(1 - F_k\Big(e^{-\frac{1}{\rho-\varepsilon}\lambda_k \ln \lambda_k}\Big)\Big) = +\infty.$$

Key words: entire functions, random Dirichlet series, R-order of the growth.