ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 32–40
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 32–40
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.032-040

УДК 512.643.4

МАТРИЧНІ ЛІНІЙНІ ОДНО- ТА ДВОБІЧНІ РІВНЯННЯ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Наталія ЛАДЗОРИШИН, Василь ПЕТРИЧКОВИЧ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, 79060, Львів
e-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Визначено необхідні та достатні умови розв'язності матричних лінійних рівнянь $AX + YB = C$ і $AX + BY = C$ над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$. Наведено спосіб розв'язування цих рівнянь, зведенням їх до матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Ключові слова: квадратичне кільце, матричне рівняння Сильвестра, матричне діофантове рівняння, еквівалентність матриць.

1. Вступ

Матричні лінійні рівняння

$$AX + YB = C, \tag{1}$$

(матричне рівняння типу Сильвестра) та

$$AX + BY = C \tag{2}$$

(матричне діофантове рівняння), виникають і застосуться в прикладних напрямах [1, с. 313], [2].

Розв'язування матричних рівнянь (1) і (2) з матрицями коефіцієнтами над полем зводиться до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь над полем, при цьому використовується прямий (кронекерів) добуток матриць [3, с. 413].

Рот [4] довів, що розв'язність матричного рівняння (1) над полем $\mathbb{F}$, а також над кільцем поліномів $\mathbb{F}[\lambda]$ (матричного поліноміального рівняння) рівносильна еквівалентності блочних матриць

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad N = \begin{Vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24, 11R04

Нагадаємо, що матриці A і B над кільцем R називаються еквівалентними, якщо існують такі оборотні над R матриці U і V, що $UBV = A$.

Цей результат поширений для матричного рівняння (1) над комутативними кільцями [5] та іншими кільцями [6].

Один із методів розв'язування матричного поліноміального рівняння (1) ґрунтується на зведенні цього рівняння до рівносильного матричного рівняння такого типу з матрицями-коефіцієнтами над полем, при цьому застосовуються супровідні матриці матричних поліномів [7], [8, с. 240], [9].

Для окремих класів матричних поліноміальних рівнянь (1) і (2) описані їх розв'язки, зокрема встановлені умови єдиності розв'язків з певними властивостями [10], [11]. В [12] запропоновано метод розв'язування рівнянь (1) і (2) над комутативною областю Безу, тобто над кільцем, в якому кожен скінченнопороджений ідеал є головним. Встановлено критерій однозначності часткових розв'язків таких рівнянь.

Ми розглядаємо матричні рівняння (1) і (2) над квадратичними кільцями $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$.

Теорема Рота [4] та її узагальнення про розв'язність матричного рівняння (1) є критерієм для цього рівняння над кільцями з умовою еквівалентності матриць над ними. Такими є кільця головних ідеалів, адекватні кільця, і загалом кільця елементарних дільників [13], [14], [15, с. 136], [16, с. 54]. Матриці над такими кільцями еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні канонічні діагональні форми (форми Сміта) збігаються. Аналогічно для рівняння (2).

Серед квадратичних кілець є кільця, які не є кільцями елементарних дільників, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, в якому не існує поняття найбільшого спільного дільника елементів.

У цій статті запропоновано критерій розв'язності матричних рівняння (1) і (2) над будь-яким квадратичним кільцем. В [17] описані цілочислові розв'язки цих матричних рівнянь над квадратичними кільцями.

2. Квадратичні кільця

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел; $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа. Квадратичне кільце $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ визначається наступним чином [18, с. 311].

Якщо

$$k \equiv 2 \pmod 4 \text{ або } k \equiv 3 \pmod 4, \qquad \text{то} \qquad \mathbb{Z}\big[\sqrt{k}\big] = \Big\{x + y\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z}\Big\},$$

якщо

$$k \equiv 1 \pmod 4, \qquad \text{то} \qquad \mathbb{Z}\big[\sqrt{k}\big] = \Big\{\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k} \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x - y \text{ ділиться на } 2\Big\}.$$

При $k > 0$ — квадратичне кільце називається дійсним, а при $k < 0$ — уявним.

Відомо, що існує скінченна кількість квадратичних евклідових кілець, а саме 17 дійсних і 5 уявних квадратичних кілець. Кожне евклідове кільце є кільцем головних ідеалів. Однак, обернене твердження не виконується. Так, зокрема квадратичні кільця з детермінантами $k = -19, -43, -67, -167$ є кільцями головних ідеалів, але не є евклідовими. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

3. Матричне лінійне рівняння $AX+YB=C$

Через $M(m,n,\mathbb{K})$ і $M(n,\mathbb{K})$ позначимо множини $(m\times n)$ - і $(n\times n)$ - матриць над кільцем $\mathbb{K}$, відповідно.

Нехай $A\in M(m,n,\mathbb{K})$, $B\in M(n,l,\mathbb{K})$, $C\in M(m,l,\mathbb{K})$. Ці матриці можна записати у вигляді

$$A=A_1+A_2\sqrt{k},\quad B=B_1+B_2\sqrt{k},\quad C=C_1+C_2\sqrt{k}, \tag{4}$$

якщо $k\equiv 2,3 \pmod 4$ і

$$A=\frac{1}{2}\bigl(A_1+A_2\sqrt{k}\bigr),\quad B=\frac{1}{2}\bigl(B_1+B_2\sqrt{k}\bigr),\quad C=\frac{1}{2}\bigl(C_1+C_2\sqrt{k}\bigr), \tag{5}$$

де елементи матриць $A_1-A_2,\ B_1-B_2,\ C_1-C_2$ діляться на 2, якщо $k\equiv 1 \pmod 4$ і $A_i,\ B_i,\ C_i,\ i=1,2$ – матриці над $\mathbb{Z}$ відповідних розмірів.

Надалі через $Row_i(A)$ будемо позначати i-й рядок матриці A, а A^T – транспонована матриця.

Теорема 1. *Матричне рівняння* (1) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями вигляду* (4) *або* (5) *має розв'язок* $X\in M(n,l,\mathbb{K})$, $Y\in M(m,n,\mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes B_1^T & \boldsymbol{c}_1\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes B_2^T & \boldsymbol{c}_2\end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes B_1^T & \mathbf{0}\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes B_2^T & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 2,3 \pmod 4$ *і*

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & 2\boldsymbol{c}_1\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & 2\boldsymbol{c}_2\end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & \mathbf{0}\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 1 \pmod 4$, *де* I_l *– одинична матриця* l*-го порядку, а*
$\boldsymbol{c}_i=\bigl\|Row_1(C_i)\dots Row_m(C_i)\bigr\|^T,\ i=1,2.$

Доведення. Нехай $k\equiv 2,3 \pmod 4$. Тоді матриці X,Y можна записати у вигляді

$$X=X_1+X_2\sqrt{k},\quad Y=Y_1+Y_2\sqrt{k}, \tag{6}$$

де $X_i\in M(n,l,\mathbb{Z})$, $Y_i\in M(m,n,\mathbb{Z})$, $i=1,2$. У рівняння (1) підставимо вирази (4) і (6) замість відповідних матриць, отримуємо таке рівняння:

$$\bigl(A_1+A_2\sqrt{k}\bigr)\bigl(X_1+X_2\sqrt{k}\bigr)+\bigl(Y_1+Y_2\sqrt{k}\bigr)\bigl(B_1+B_2\sqrt{k}\bigr)=C_1+C_2\sqrt{k}.$$

Звідси запишемо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases}A_1X_1+A_2X_2k+Y_1B_1+Y_2B_2k=C_1\\ A_2X_1+A_1X_2+Y_1B_2+Y_2B_1=C_2.\end{cases}$$

Розписавши поелементно добутки A_iX_j і Y_iB_j, $i,j = 1,2$ і врахувавши означення кронекерового добутку матриць, цю систему подаємо у вигляді

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_l & A_2 k \otimes I_l \\ A_2 \otimes I_l & A_1 \otimes I_l \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} I_m \otimes B_1^T & I_m \otimes B_2^T k \\ I_m \otimes B_2^T & I_m \otimes B_1^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix},$$

де $\mathbf{x}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(X_i) \dots Row_n(X_i) \end{Vmatrix}^T$; $\mathbf{y}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(Y_i) \dots Row_m(Y_i) \end{Vmatrix}^T$;
$\mathbf{c}_i = \begin{Vmatrix} Row_1(C_i) \dots Row_m(C_i) \end{Vmatrix}^T$, $i = 1,2$.

Отже, маємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_l & A_2 k \otimes I_l & I_m \otimes B_1^T & I_m \otimes B_2^T k \\ A_2 \otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes B_2^T & I_m \otimes B_1^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Матричні рівняння (1) і (7) рівносильні, тобто рівняння (1) над $\mathbb{K}$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли має розв'язок рівняння (7) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і кожному розв'язку рівняння (7) відповідає розв'язок рівняння (1), і навпаки.

Відповідно до [19, c. 272] матричне рівняння (7) має розв'язок над $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_l & A_2 k \otimes I_l & I_m \otimes B_1^T & I_m \otimes B_2^T k & \mathbf{c}_1 \\ A_2 \otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes B_2^T & I_m \otimes B_1^T & \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} A_1 \otimes I_l & A_2 k \otimes I_l & I_m \otimes B_1^T & I_m \otimes B_2^T k & \mathbf{0} \\ A_2 \otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes B_2^T & I_m \otimes B_1^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

З цих матриць отримуємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes B_1^T & \mathbf{c}_1 \\ (A_1 + A_2) \otimes I_l & A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes B_2^T & \mathbf{c}_2 \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} (A_1 + A_2 k) \otimes I_l & A_1 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T k) & I_m \otimes B_1^T & \mathbf{0} \\ (A_1 + A_2) \otimes I_l & A_2 \otimes I_l & I_m \otimes (B_1^T + B_2^T) & I_m \otimes B_2^T & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Отже, у випадку, коли $k \equiv 2,3 \pmod 4$ теорему доведено.

Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Тоді матриці X, Y можна записати у вигляді

$$X = \frac{1}{2}\big(X_1 + X_2\sqrt{k}\big), \quad Y = \frac{1}{2}\big(Y_1 + Y_2\sqrt{k}\big), \tag{8}$$

де $X_i \in M(n,l,\mathbb{Z})$, $Y_i \in M(m,n,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$. Зауважимо, що за визначенням елементів квадратичного кільця $\mathbb{K}$, всі елементи матриць $X_1 - X_2$ і $Y_1 - Y_2$ діляться на 2. Отже, нехай матриці X_1 і Y_1 мають вигляд $X_1 = X_2 + 2\tilde{X}$, $Y_1 = Y_2 + 2\tilde{Y}$, де $\tilde{X} \in M(n,l,\mathbb{Z})$, $\tilde{Y} \in M(m,n,\mathbb{Z})$.

Підставивши в (1) вирази з (8) і записавши невідомі матриці у вигляді

$$X = \frac{1}{2}\big(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}\big), \quad Y = \frac{1}{2}\big(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}\big), \tag{9}$$

матимемо

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+\frac{1}{2}(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(B_1+B_2\sqrt{k})=\frac{1}{2}(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши обидві частини цього рівняння на 4, отримуємо

$$(A_1+A_2\sqrt{k})(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k})(B_1+B_2\sqrt{k})=2(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Звідси одержуємо систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$ вигляду

$$\begin{cases}(A_1+A_2k)X_2+Y_2(B_1+B_2k)+2A_1\tilde{X}+2\tilde{Y}B_1=2C_1\\ (A_1+A_2)X_2+Y_2(B_1+B_2)+2A_2\tilde{X}+2\tilde{Y}B_2=2C_2.\end{cases}$$

Аналогічно, як у випадку $k\equiv 2,3 \pmod 4$, врахувавши означення кронекерового добутку матриць до цієї системи, отримуємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{x}_1\\ \tilde{\mathbf{x}}\\ \mathbf{y}_1\\ \tilde{\mathbf{y}}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2\mathbf{c}_1\\ 2\mathbf{c}_2\end{matrix}\right\|, \tag{10}$$

де $\tilde{\mathbf{x}}=\left\|Row_1(\tilde{X})\dots Row_n(\tilde{X})\right\|^T$; $\tilde{\mathbf{y}}=\left\|Row_1(\tilde{Y})\dots Row_m(\tilde{Y})\right\|^T$.

Матричне рівняння (10) над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ еквівалентне до матричного рівняння (1) над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$.

Відомо, що рівняння (10) має розв'язок $X=\frac{1}{2}\left(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k}\right)$, $Y=\frac{1}{2}\left(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k}\right)$ тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & 2\mathbf{c}_1\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & 2\mathbf{c}_2\end{matrix}\right\|$$

і

$$\left\|\begin{matrix}(A_1+A_2k)\otimes I_l & 2A_1\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^Tk) & I_m\otimes 2B_1^T & \mathbf{0}\\ (A_1+A_2)\otimes I_l & 2A_2\otimes I_l & I_m\otimes(B_1^T+B_2^T) & I_m\otimes 2B_2^T & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$. Теорему доведено. □

4. Матричне лінійне рівняння $AX+BY=C$

Теорема 2. *Матричне рівняння* (2) *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *з матрицями* $A,B\in M(m,n,\mathbb{K})$, $C\in M(m,l,\mathbb{K})$ *вигляду* (4) *або* (5) *має розв'язок* $X,Y\in M(n,l,\mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

$$\left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & A_1 & B_1 & C_1\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & A_2 & B_2 & C_2\end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0}\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 2,3 \pmod 4$ *і*

$$\left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & 2A_1 & 2B_1 & 2C_1\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & 2A_2 & 2B_2 & 2C_2\end{matrix}\right\| \; i \; \left\|\begin{matrix}A_1+A_2k & B_1+B_2k & 2A_1 & 2B_1 & \mathbf{0}\\ A_1+A_2 & B_1+B_2 & 2A_2 & 2B_2 & \mathbf{0}\end{matrix}\right\|,$$

якщо $k\equiv 1 \pmod 4$.

Доведення. Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod 4$, тоді матриці X, Y можна записати у вигляді (6). Підставивши вирази (4) і (6) у рівняння (2), матимемо таке рівняння:

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_1 + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_1 + Y_2\sqrt{k}) = C_1 + C_2\sqrt{k}.$$

З цього рівняння легко отримати таку систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2k + B_1Y_1 + B_2Y_2k = C_1 \\ A_2X_1 + A_1X_2 + B_2Y_1 + B_1Y_2 = C_2 \end{cases}.$$

З цієї системи одержуємо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Матричне рівняння (11) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли еквівалентні над $\mathbb{Z}$ такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Із цих матриць одержуємо еквівалентні до них такі матриці:

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & A_1 & B_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & A_2 & B_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Теорема для випадку $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ доведена.

Нехай $k \equiv 1 \pmod 4$. Як і в теоремі 1 невідомі матриці можна записати у вигляді (9), де $\tilde{X}, X_2,\ \tilde{Y}, Y_2 \in M(n, l, \mathbb{Z})$. Підставивши в (2) вирази з (5) і (9), одержуємо

$$\frac{1}{2}(A_1+A_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(X_2+2\tilde{X}+X_2\sqrt{k})+\frac{1}{2}(B_1+B_2\sqrt{k})\frac{1}{2}(Y_2+2\tilde{Y}+Y_2\sqrt{k}) = \frac{1}{2}(C_1+C_2\sqrt{k}).$$

Домноживши обидві частини цього рівняння на 4, отримуємо

$$(A_1 + A_2\sqrt{k})(X_2 + 2\tilde{X} + X_2\sqrt{k}) + (B_1 + B_2\sqrt{k})(Y_2 + 2\tilde{Y} + Y_2\sqrt{k}) = 2(C_1 + C_2\sqrt{k}).$$

Звідси маємо таку систему матричних рівнянь над $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2k)X_2 + (B_1 + B_2k)Y_2 + 2A_1\tilde{X} + 2B_1\tilde{Y} = 2C_1 \\ (A_1 + A_2)X_2 + (B_1 + B_2)Y_2 + 2A_2\tilde{X} + 2B_2\tilde{Y} = 2C_2. \end{cases}$$

З цієї системи одержимо матричне рівняння над $\mathbb{Z}$ вигляду

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & B_1 + B_2k & 2A_1 & 2B_1 \\ A_1 + A_2 & B_1 + B_2 & 2A_2 & 2B_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2C_1 \\ 2C_2 \end{Vmatrix}.$$

Доведення завершено. □

Наслідок 1. *Нехай $\mathbb{Z}[i]$ – кільце цілих гаусових чисел і рівняння* (2) *з коефіцієнтами вигляду*

$$A = A_1 + A_2i, \quad B = B_1 + B_2i, \quad C = C_1 + C_2i,$$

де $A_i, B_i \in M(m,n,\mathbb{Z})$, $C_i \in M(m,l,\mathbb{Z})$, $i = 1,2$ *має розв'язок* $X, Y \in M(n,l,\mathbb{Z}[i])$ *в тому і тільки в тому випадку, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & C_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & C_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 & -A_2 & B_1 & -B_2 & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

еквівалентні над $\mathbb{Z}$.

Наслідок 2. *Матричне рівняння* $AX = B$ *з матрицями* $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $B \in M(m,l,\mathbb{K})$ *вигляду* (4) *або* (5) *має розв'язок* $X \in M(n,l,\mathbb{K})$ *тоді і тільки тоді, коли еквівалентні над* $\mathbb{Z}$ *такі матриці:*

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & A_1 & B_1 \\ A_1 + A_2 & A_2 & B_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & A_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ *і*

$$\begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & 2A_1 & 2B_1 \\ A_1 + A_2 & 2A_2 & 2B_2 \end{Vmatrix} \quad i \quad \begin{Vmatrix} A_1 + A_2k & 2A_1 & \mathbf{0} \\ A_1 + A_2 & 2A_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

якщо $k \equiv 1 \pmod 4$.

За доведеннями теореми 1 і теореми 2 одержуємо спосіб розв'язування матричних рівнянь (1) і (2). Розв'язування матричних лінійних рівнянь над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ зводиться до розв'язування матричних лінійних рівнянь над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$.

5. Матричні лінійні рівняння (1) і (2), визначники матриць-коефіцієнтів яких взаємно прості

Нехай у рівнянні (1) $(n \times n)$ - матриці A, B, C над кільцем головних ідеалів і визначники A і B взаємно прості. Під кільцем головних ідеалів розуміємо комутативне кільце з одиницею без дільників нуля, в якому кожен ідеал є головним [20, с. 1]. Тоді з [21] випливає, що матриці M і N вигляду (3) еквівалентні. Отже, рівняння (1) розв'язне. Для матричного рівняння (1) над квадратичними кільцями таке твердження неправильне. Серед квадратичних кілець є кільця, матричне рівняння (1) над якими за умови, що визначники матриць A і B взаємно прості, може бути нерозв'язне.

Приклад 1. Нехай

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X + Y \begin{Vmatrix} 0 & 2+\sqrt{-5} \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 5+2\sqrt{-5} & 4-\sqrt{-5} \end{Vmatrix}$$

– матричне рівняння над кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Визначники матриць $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} 0 & 2+\sqrt{-5} \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ взаємно прості, але це рівняння нерозв'язне.

Відомо, що матричне рівняння (2), де A, B, C – $(n \times n)$ - матриці над кільцем головних ідеалів розв'язне тоді і тільки тоді, коли лівий найбільший спільний дільник матриць (A, B) є лівим дільником матриці C. Якщо $(detA, detB) = 1$, то очевидно, рівняння (2) розв'язне.

Приклад 2. Рівняння

$$\begin{Vmatrix} 6+3\sqrt{-5} & 1 \\ 3+3\sqrt{-5} & 1 \end{Vmatrix} X + \begin{Vmatrix} -1 & -1+4\sqrt{-5} \\ -1 & -3+3\sqrt{-5} \end{Vmatrix} Y = \begin{Vmatrix} 7+3\sqrt{-5} & 10+2\sqrt{-5} \\ 6+3\sqrt{-5} & 7+2\sqrt{-5} \end{Vmatrix}$$

над $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не має розв'язків. Визначники матриць $\begin{Vmatrix} 6+3\sqrt{-5} & 1 \\ 3+3\sqrt{-5} & 1 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} -1 & -1+4\sqrt{-5} \\ -1 & -3+3\sqrt{-5} \end{Vmatrix}$ взаємно прості.

Список використаної літератури

1. T. Kaczorek, *Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory*, Commun. and Control Eng. Ser., Springer, London, UK, 2007.
2. V. Kucera, *Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries*, Kybernetika **9** (1973), no. Suppl(2), 94–107.
3. P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, New York: Academic Press, 1985.
4. W. E. Roth, *The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), no. 3, 392–396. DOI: 10.2307/2031890
5. W. H. Gustafson, *Roth's theorems over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **23** (1979), 245–251. DOI: 10.1016/0024-3795(79)90106-X
6. R. Hartwig, *Roth's equivalence problem in unit regular rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), no. 1, 39–44. DOI: 10.2307/2042033
7. В. М. Петричкович, *Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц*, Мат. заметки **37** (1985), no. 6, 789–796; **English version**: V. M. Petrichkovich, *Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices*, Math. Notes **37** (1985), no. 6, 431–435. DOI: 10.1007/BF01157677.
8. В. Петричкович, *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями*, Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015.
9. S. Chen, Y. Tian, *On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices*, J. Frankl. Inst. **351** (2014), 5376–5385. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2014.09.024.
10. J. Feinstein, J. Bar-ness, *On the uniqueness of the minimal solution the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$*, J. Franklin Inst. **310** (1980), no. 2, 131–134. DOI: 10.1016/0016-0032(78)90012-1
11. N. S. Dzhaliuk, V. M. Petrychkovych, *The structure of solutions of the matrix linear unilateral polynomial equation with two variables*, Carpathian Math. Publ. **9** (2017), no. 1, 48–56. DOI: 10.15330/cmp.9.1.48-56.
12. N. S. Dzhaliuk, V. M. Petrychkovych, *The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings*, ISRN Algebra (2012), Article ID 205478, 14 pages. DOI: 10.5402/2012/205478.
13. O. Helmer, *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 225–236. DOI: 10.1090/S0002-9904-1943-07886-X
14. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), no. 2, 464–491. DOI: 10.1090/S0002-9947-1949-0031470-3
15. B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings*, Math. Studies, Monograph Series, **XVI**, VNTL Publishers, Lviv, 2012.

16. В. П. Щедрик, *Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників,* Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017.
17. Н. Б. Ладзоришин, *Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх та різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **58** (2015), no. 2, 47–54; **English version**: N. B. Ladzoryshyn, *Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings,* J. Math. Sci. **223** (2017), no. 1, 50–59. DOI: 10.1007/s10958-017-3337-0
18. Г. Хассе, *Лекції по теории чисел*, Москва, Наука, 1953.
19. П. С. Казімірський, *Розклад матричних многочленів на множники (видання друге, виправлене)*, Львів, Ін-т приклад. пробл. мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015.
20. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972.
21. M. Newman, *The Smith normal form of a partitioned matrix*, J. Res. Natl. Bur. Stand., Sect. B **78** (1974), no. 1, 3–6. DOI: 10.6028/jres.078B.002

Стаття: надійшла до редколегії 15.10.2018
доопрацьована 21.11.2018
прийнята до друку 26.12.2018

MATRIX LINEAR UNILATERAL AND BILATERAL EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS

Natalia LADZORYSHYN, Vasyl PETRYCHKOVYCH

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 3b Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine
e-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

We give necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of matrix linear equations $AX + YB = C$ and $AX + BY = C$ over the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$. The method of solving which reduces these equations to matrix linear equations over the ring of integers $\mathbb{Z}$, is given.

Key words: quadratic ring, Sylvester matrix equation, matrix Diophantine equation, equivalence of matrices.