ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 119–125
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 119–125

УДК 519.21

РІВНЯННЯ ДЛЯ ТВІРНОЇ ФУНКЦІЇ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З МІГРАЦІЄЮ

Христина ЯКИМИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

Розглянуто марківський гіллястий процес з міграцією $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. Задано перехідні ймовірності, знайдено вигляд диференціального рівняння для твірної функції процесу, а також виведено систему рівнянь Колмогорова для цієї моделі процесу.

Ключові слова: гіллястий процес, твірна функція, неперервний час, міграція, перехідні ймовірності, рівняння Колмогорова.

1. Вступ. Гіллясті процеси виникають як моделі популяційних динамік для частинок, які мають різну природу, подібні до атомів, молекул, клітин, мікроорганізмів, рослин, тварин, індивідуумів, цін, інформації, тощо. Отже, багато реальних ситуацій, зокрема, фізичних, хімічних, біологічних, демографічних, екологічних та економічних можна змоделювати за допомогою різних типів гіллястих процесів.

Гіллясті процеси з міграцією вперше паралельно розглянуто у працях Н. Янева і К. Мітова [1] та С. В. Нагаєва і Л. В. Хан [2]. Глясті міграційні процеси здебільшого досліджують у випадку дискретного часу, хоча є праці, де розглянуто випадок неперервного часу, зокрема варто зазначити [3], [4], [5], [6]. Гіллястий процес з еміграцією для випадку неперервного часу досліджено у праці Ш. Форманова та С. Каверіна [7].

У [8] досліджено випадок, коли імміграція та еміграція описуються за допомогою одного випадкового процесу. Доцільно розділити еміграцію та імміграцію і дослідити як зміниться поведінка процесу.

Мета нашої праці — описати модель процесу через перехідні ймовірності, які визначаються інтенсивностями еволюції частинок p_k, імміграції q_k та еміграції r_n, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 0, \ldots, m$, а m — деяке фіксоване натуральне число.

2. Опис моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом. Розглянемо марківський гіллястий процес з одним типом частинок і міграцією $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$. $\mu(t)$ позначає кількість частинок у момент часу $t \in [0, \infty)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 60J80

Вважаємо, що у початковий момент часу в системі існує одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1. \tag{1}$$

Процес $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$ при $\Delta t \to 0$ задається такими перехідними ймовірностями

$$P\{\mu(t + \Delta t) = j \mid \mu(t) = i\} =$$

$$= \begin{cases} 1 + q_0\Delta t + o(\Delta t), & i = j = 0; \\ q_j\Delta t + o(\Delta t), & i = 0,\ j = 1, 2, \ldots; \\ \left(p_0 + \sum\limits_{l=1}^{m} r_l\right)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 0; \\ 1 + (q_0 + r_0 + p_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 1; \\ (p_j + q_{j-1})\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,\ j = 2, \ldots; \\ \sum\limits_{l=i}^{m} r_l\Delta t + o(\Delta t) & 1 < i \leqslant m,\ j = 0; \\ (p_0 + r_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \ldots,\ j = i - 1; \\ r_{i-j}\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \ldots,\ j < i - 1; \\ 1 + (q_0 + r_0 + ip_1)\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \ldots,\ i = j; \\ (ip_{j-i+1} + q_{j-i})\Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \ldots,\ i < j; \\ o(\Delta t), & \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{2}$$

де m — деяке фіксоване натуральне число, а p_k, q_k та r_n задовольняють умови

$$p_k \geqslant 0, \quad k \neq 1, \quad p_1 < 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0,$$

$$q_k \geqslant 0, \quad k \neq 0, \quad q_0 < 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0,$$

$$r_n \geqslant 0, \quad n = 1, \ldots, m, \quad r_0 < 0, \quad \sum_{k=0}^{m} r_k = 0.$$

Зазначимо, що p_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — інтенсивність розмноження частинок, q_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — інтенсивність імміграції частинок, а r_n $(n = 0, \ldots, m)$ — інтенсивність еміграції частинок.

Введемо такі позначення:

$$F_\mu(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\}s^n \text{ — твірна функція процесу } \mu(t),$$

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \quad |s| \leqslant 1, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n, \quad |s| \leqslant 1, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$r(s) = \sum_{n=0}^{m} r_n s^{-n}, \quad 0 < |s| \leqslant 1.$$

3. Рівняння для твірної функції гіллястого процесу з імміграцією та еміграцією.

Теорема 1. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$, $t \in [0,\infty)$, *при* $|s| \leqslant 1$ *та* $s \neq 0$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = f(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + g(s)F_\mu(t,s) +$$

$$+\sum_{n=0}^{m} P\{\mu(t)=n\}\left(s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t)=n\} s^n r(s) \tag{3}$$

з початковою умовою

$$F_\mu(0,s) = s. \tag{4}$$

Доведення. Використовуючи формулу повної ймовірності, отримаємо

$$F_\mu(t+\Delta t, s) = M(M(s^{\mu(t+\Delta t)} \mid \mu(t))), \tag{5}$$

$$M(s^{\mu(t+\Delta t)} \mid \mu(t)=n) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t+\Delta t)=k \mid \mu(t)=n\} s^k. \tag{6}$$

Враховуючи (2) для процесу $\mu(t)$, знайдемо вигляд (6) для різних n.

Якщо $n=0$, то отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t+\Delta t)=k|\mu(t)=0\} s^k = s^0(1+q_0\Delta t + o(\Delta t)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\big(q_k\Delta t + o(\Delta t)\big)s^k = 1 + g(s)\Delta t + o(\Delta t).$$

У випадку $n=1$, а

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t+\Delta t)=k \mid \mu(t)=1\} s^k = (p_0\Delta t + \sum_{k=1}^{m} r_k\Delta t + o(\Delta t))s^0 +$$

$$+\big(1+(p_1+q_0+r_0)\Delta t + o(\Delta t)\big)s^1 + \sum_{k=2}^{\infty}\big(p_k\Delta t + q_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)\big)s^k =$$

$$= s + (f(s) + g(s)s + \sum_{k=1}^{m} r_k + r_0 s)\Delta t + o(\Delta t).$$

Якщо $1 < n \leqslant m$, то одержуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t+\Delta t)=k \mid \mu(t)=n\} s^k = s^0\big(\sum_{k=n}^{m} r_k\Delta t + o(\Delta t)\big) +$$

$$+s^1 r_{n-1}\Delta t + \ldots + s^{n-1} r_1 \Delta t + s^{n-1} n p_0 \Delta t + s^n\big(1 + (np_1 + q_0 + r_0)\Delta t + o(\Delta t)\big) +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\big(np_{k-n+1}\Delta t + q_{k-n}\Delta t + o(\Delta t)\big)s^k = s^n + ns^{n-1}f(s)\Delta t +$$

$$+s^n g(s)\Delta t + s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k}\Delta t + \sum_{k=n+1}^{m} r_k \Delta t + o(\Delta t).$$

Для $n > m$ отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t+\Delta t) = k \mid \mu(t) = n\} s^k = s^{n-m} r_m \Delta t + \ldots + s^{n-1} r_1 \Delta t +$$

$$+s^{n-1} n p_0 \Delta t + s^n \big(1 + (np_1 + q_0 + r_0)\Delta t + o(\Delta t)\big) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(np_{k-n+1} q_k \Delta t + q_{k-n}\Delta t + o(\Delta t)\big) s^k =$$

$$= s^n + n s^{n-1} f(s)\Delta t + s^n g(s)\Delta t + s^n r(s)\Delta t + o(\Delta t).$$

Отож, враховуючи (5),

$$F_\mu(t+\Delta t, s) = P\{\mu(t) = 0\}(1 + g(s)\Delta t + o(\Delta t)) +$$

$$+P\{\mu(t) = 1\}(s + (f(s) + g(s)s + \sum_{k=1}^{m} r_k + r_0 s)\Delta t + o(\Delta t)) +$$

$$+\sum_{n=2}^{m} P\{\mu(t) = n\}\big(s^n + \big(n s^{n-1} f(s) + s^n g(s) + s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\big)\Delta t + +o(\Delta t)\big)$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t) = n\}\big(s^n + \big(n s^{n-1} f(s) + s^n g(s) + s^n r(s)\big)\Delta t + o(\Delta t)\big) =$$

$$= F_\mu(t,s) + \Delta t\big(f(s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + g(s)F_\mu(t,s) + \sum_{n=0}^{m} P\{\mu(t) = n\}\left(s^n \sum_{k=0}^{n} r_k s^{-k} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k\right) +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{\mu(t) = n\} s^n r(s)\big) + o(\Delta t).$$

Звідки випливає (3).

Початкова умова (4) випливає з (1). □

4. Система рівнянь Колмогорова для гіллястого процесу з міграцією.

Теорема 2. *Для процесу $\mu(t)$, $t \in (0,\infty)$ правильна система рівнянь Колмогорова*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dP\{\mu(t) = 0\}}{dt} = P\{\mu(t) = 0\} q_0 + P\{\mu(t) = 1\} p_0 + \sum_{k=1}^{m} P\{\mu(t) = k\} \sum_{j=k}^{m} r_j, \\ &\frac{dP\{\mu(t) = n\}}{dt} = \sum_{k=0}^{n} P\{\mu(t) = k\} q_{n-k} + \sum_{k=1}^{n+1} k P\{\mu(t) = k\} p_{n+1-k} + \\ &\qquad + \sum_{k=n}^{n+m} P\{\mu(t) = k\} r_{k-n}, \ n \geqslant 1. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Доведення. Нехай ймовірності станів процесу $P\{\mu(t)=n\}$, $n=0,1,2,\ldots$, у певний момент часу відомі. Знайдемо ймовірності станів системи в момент часу $t+\Delta t$.

Розглянемо $P\{\mu(t+\Delta t)=0\}$. Враховуючи (2), отримаємо

$$P\{\mu(t+\Delta t)=0\}=P\{\mu(t)=0\}P\{\mu(t+\Delta t)=0\mid\mu(t)=0\}+$$
$$+P\{\mu(t)=1\}P\{\mu(t+\Delta t)=0\mid\mu(t)=1\}+P\{\mu(t)=2\}P\{\mu(t+\Delta t)=0\mid\mu(t)=2\}+$$
$$+P\{\mu(t)=3\}P\{\mu(t+\Delta t)=0\mid\mu(t)=3\}+\ldots+$$
$$+P\{\mu(t)=m\}P\{\mu(t+\Delta t)=0\mid\mu(t)=m\}=$$
$$=P\{\mu(t)=0\}\big(1+\sum_{k=0}^{m}r_k\Delta t+o(\Delta t))(1+q_0\Delta t+o(\Delta t)\big)+$$
$$+P\{\mu(t)=1\}\big(p_0\Delta t+\sum_{k=1}^{m}r_k\Delta t+o(\Delta t)\big)+P\{\mu(t)=2\}\big(\sum_{k=2}^{m}r_k\Delta t+o(\Delta t)\big)+$$
$$+P\{\mu(t)=3\}\big(\sum_{k=3}^{m}r_k\Delta t+o(\Delta t)\big)+\ldots+P\{\mu(t)=m\}\big(r_m\Delta t+o(\Delta t)\big)=$$
$$=P\{\mu(t)=0\}+\Delta t\Bigg(P\{\mu(t)=0\}q_0+P\{\mu(t)=1\}p_0+\sum_{k=1}^{m}P\{\mu(t)=k\}\sum_{j=k}^{m}r_j\Bigg)+o(\Delta t).$$

Отже,

$$P\{\mu(t+\Delta t)=0\}=P\{\mu(t)=0\}+\Delta t\Bigg(Q(t)q_0+P\{\mu(t)=1\}p_0+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}P\{\mu(t)=k\}\sum_{j=k}^{m}r_j\Bigg)+o(\Delta t).$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dP\{\mu(t)=0\}}{dt}=P\{\mu(t)=0\}q_0+P\{\mu(t)=1\}p_0+\sum_{k=1}^{m}P\{\mu(t)=k\}\sum_{j=k}^{m}r_j.$$

Розглянемо $P\{\mu(t)=1\}$

$$P\{\mu(t+\Delta t)=1\}=P\{\mu(t)=0\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=0\}+$$
$$+P\{\mu(t)=1\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=1\}+P\{\mu(t)=2\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=2\}+$$
$$+P\{\mu(t)=3\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=3\}+\ldots+$$
$$+P\{\mu(t)=m+1\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=m+1\}=P\{\mu(t)=1\}+$$
$$+\Delta t\Bigg(\sum_{k=0}^{1}P\{\mu(t)=k\}q_{1-k}+\sum_{k=1}^{2}P\{\mu(t)=k\}p_{2-k}+\sum_{k=1}^{m+1}P\{\mu(t)=k\}r_{k-1}\Bigg)+o(\Delta t).$$

Звідки легко одержати рівняння

$$\frac{dP\{\mu(t)=1\}}{dt}=\sum_{k=0}^{1}P\{\mu(t)=k\}q_{1-k}+\sum_{k=1}^{2}kP\{\mu(t)=k\}p_{2-k}+\sum_{k=1}^{m+1}P\{\mu(t)=k\}r_{k-1}.$$

Для $P\{\mu(t)=2\}$ диференціальне рівняння набуде вигляду

$$\frac{dP\{\mu(t)=2\}}{dt}=\sum_{k=0}^{2}P\{\mu(t)=k\}q_{2-k}+\sum_{k=1}^{3}kP\{\mu(t)=k\}p_{3-k}+\sum_{k=2}^{m+2}P\{\mu(t)=k\}r_{k-2}.$$

Знайдемо вигляд рівняння для довільного $n>2$

$$\begin{gathered}
P\{\mu(t+\Delta t)=n\}=P\{\mu(t)=0\}P\{\mu(t+\Delta t)=n\mid\mu(t)=0\}+\\
+P\{\mu(t)=1\}P\{\mu(t+\Delta t)=n\mid\mu(t)=1\}+\\
+P\{\mu(t)=2\}P\{\mu(t+\Delta t)=n\mid\mu(t)=2\}+\ldots+\\
+P\{\mu(t)=n\}P\{\mu(t+\Delta t)=n\mid\mu(t)=n\}+\\
+P\{\mu(t)=n+1\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=n+1\}+\ldots+\\
+P\{\mu(t)=m+n\}P\{\mu(t+\Delta t)=1\mid\mu(t)=m+n\}=\\
=P\{\mu(t)=0\}(q_n\Delta t+o(\Delta t))+P\{\mu(t)=1\}((p_{n-1}+q_n)\Delta t+o(\Delta t))+\\
+P\{\mu(t)=2\}((2p_{n-2}+q_{n-1})\Delta t+o(\Delta t))+\ldots+\\
+P\{\mu(t)=n\}((np_1+q_0+r_0)\Delta t+o(\Delta t))+\\
+P\{\mu(t)=n+1\}(((n+1)p_0+r_1)\Delta t+o(\Delta t))+\\
+\sum_{k=2}^{m}P\{\mu(t)=n+k\}(r_k\Delta t+o(\Delta t)).
\end{gathered}$$

Отож, для довільного $n>2$ рівняння набуде вигляду

$$\frac{dP\{\mu(t)=n\}}{dt}=\sum_{k=0}^{n}P\{\mu(t)=k\}q_{n-k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}kP\{\mu(t)=k\}p_{n+1-k}+\sum_{k=n}^{n+m}P\{\mu(t)=k\}r_{k-n}.$$

Що і потрібно було довести. □

Список використаної літератури

1. N. Yanev and K. Mitov, *Controlled branching processes: the case of random migration*, C. R. Acad. Bulg. Sci. **33** (1980), 473–475.
2. С. В. Нагаев, Л. В. Хан, *Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией*, Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), no. 3, 523–534; **Englis version:** S. V. Nagaev and L. V. Khan, *Limit theorems for a critical Galton–Watson branching process with migration*, Theory Probab. Appl. **25** (1981), no. 3, 514–525.
3. Д. Алимов, В. Н. Решетняк, *Ветвящийся процес с иммиграцией и ограниченой эмиграцией*, Прикладные задачи теории вероятностей. Сб. научн. труд., Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982, С. 4–14.
4. O. P. Srivastava and S. C. Gupta, *On a continuous-time branching process with migration*, Statistica **49** (1989), no. 4, 547–552.
5. A. Y. Chen and E. Renshaw, *Markov branching processes regulated by emigration and large immigration*, Stochastic Processes Appl. **57** (1995), no. 2, 339–359.
6. I. Rahimov and W. S. Al-Sabah, *Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration*, Arab J. Math. Sci. **6** (2000), no. 2, 81–97.

7. Ш. К. Форманов, С. В. Каверин, *Марковские ветвящиеся процессы с эмиграцией, I*, Изв. Акад. наук УзССР. Сер. физ.-мат. наук. **5** (1986), 23–28.
8. І. Базилевич, Хр. Якимишин, *Диференціальні рівняння для гіллястих процесів з неперервним часом та міграцією*, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **82** (2016), 20–26.

Стаття: надійшла до редколегії 09.07.2017
доопрацьована 12.04.2018
прийнята до друку 24.04.2018

EQUATION FOR GENERATION FUNCTION FOR BRANCHING PROCESSES WITH MIGRATION

Khrystyna YAKYMYSHYN

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

In this paper a Markov branch process with the migration $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$, was considered. Also there were determined transition probabilities, obtained differential equation for a generating function, and the process system of Kolmogorov equations for this model was derived.

Key words: branching process, generating function, continuous time, migration, transition probabilities, Kolmogorov equation.