ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 96–112
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 96–112

УДК 517.53

АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ВИПАДКОВИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Олег СКАСКІВ, Надія СТАСІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79001, Львів
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних і комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Досліджуємо абсциси збіжності $\sigma_{зб}(F,\omega)$ і абсолютної збіжності $\sigma(F,\omega)$ випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega).$$

Зокрема, у випадку, коли $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, а (ξ_n) – послідовність комплекснозначних випадкових величин таких, що $(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon\ c_1 \leqslant |\xi_n| \leqslant c_2$ м.н., (δ_n) – послідовність невід'ємних випадкових величин таких, що $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon\ M(e^{x\delta_n}) \leqslant C_1 = C_1(x) < +\infty$, доведено такі твердження.

1. Якщо $M\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) \geqslant \sigma(F_3)$ м.н., де $F_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}$. Якщо додатково припустити, що $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ M(e^{x\delta_n}) \geqslant C_2(x)$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ м.н.
2. Якщо $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(F,\omega) \geqslant \sigma(F_4)$ м.н. Якщо додатково припустити, що $(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \geqslant 1)\colon P\{\omega\colon |a_n| e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$ і $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \neq \infty$ м.н., а також
$$(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ De^{x\delta_n} \geqslant C_3(x),$$
то $\sigma(F,\omega) = \sigma(F_4)$ м.н., де $F_4(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}$.

Ключові слова: аналітичні функції, випадкові ряди Діріхле, абсциси збіжності.

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50, 11F66

1. Вступ. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір. Крім того, нехай $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$ та $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, відповідно, послідовності невід'ємних і комплекснозначних випадкових величин на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Нехай також $\Lambda_+ = (\lambda_k)$ позначає числову послідовність таку, що $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$. Через $\mathcal{D}(\Lambda)$ позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \tag{1}$$

що при фіксованому $\omega = \omega_0$ є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле; $\mathcal{D} = \bigcup_\Lambda \mathcal{D}(\Lambda)$, а $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ – підклас рядів з класу $\mathcal{D}$ з фіксованою послідовністю показників Λ_+. Вважатимемо, що для кожного ряду (1) з класу $\mathcal{D}$ існує $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F,\omega) < 0$ таке, що

$$f_k(\omega) e^{x_1\lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty) \text{ м.н.} \tag{2}$$

Також вважатимемо, що означення класу $\mathcal{D}$ містить умову (2). Зрозуміло, що є ряди вигляду (1), у яких такого x_1 може не існувати.

Через $\sigma_\mu(F,\omega)$ позначимо (див. [1]) абсцису існування максимального члена ряду (1), тобто,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sup\Big\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0\ (k \to +\infty)]\Big\}.$$

Через $\mu(x,F,\omega) = \sup\big\{|f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)}\colon k \geqslant 0\big\}$ $(x < \sigma_\mu(F,\omega))$ позначаємо максимальний член ряду (1).

Через $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)$ і $\sigma(F,\omega)$ позначимо, відповідно, абсциси збіжності й абсолютної збіжності, а через $\sigma_u(F,\omega)$ і $\sigma_b(F,\omega)$, відповідно, абсциси рівномірної збіжності й обмеженості ряду вигляду (1) при фіксованому $\omega \in \Omega$. Отож,

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sup\{x\colon \text{ ряд (1) збіжний у півплощині } \{z\colon \mathrm{Re}\ z \leqslant x\}\};$$

$$\sigma(F,\omega) = \sup\{x\colon \text{ ряд (1) абсолютно збіжний у півплощині } \{z\colon \mathrm{Re}\ z \leqslant x\}\};$$

$$\sigma_u(F,\omega) = \sup\{x\colon \text{ ряд (1) рівномірно збіжний у півплощині } \{z\colon \mathrm{Re}\ z \leqslant x\}\};$$

$$\sigma_b(F,\omega) = \sup\{x\colon \text{ ряд (1) обмежений у півплощині } \{z\colon \mathrm{Re}\ z \leqslant x\}\}.$$

У цьому випадку вважатимемо, що сума F ряду (1) у кожному з чотирьох останніх означень абсцис збіжності є аналітичною принаймні у відповідній відкритій півплощині. Зрештою, у другому та третьому означенні абсцис абсолютної і рівномірної збіжності це є наслідком теореми Веєрштрасса про рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій. Для детермінованих рядів Діріхле вживатимемо ті самі позначення, але не вживатимемо у позначенні літери ω. Наприклад, $\sigma(F)$ позначає абсцису абсолютної збіжності детермінованого ряду Діріхле F.

Позначимо також

$$\tau(\Lambda,\omega) := \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)}, \quad \tau(\Lambda_+) := \tau(\Lambda_+,\omega).$$

Зауваження 1. 1^0. З умови (2) випливає, що $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant x_1 > -\infty$ для кожного ряду $F \in \mathcal{D}$ м.н., де $x_1 = x_1(F,\omega)$ з умови (2). Тобто, клас $\mathcal{D}$ містить лише ті ряди Діріхле F вигляду (1), що $\sigma_\mu(F,\omega) > -\infty$ м.н.

2^0. Якщо $\sigma_\mu(F,\omega) = -\infty$, то й $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = -\infty$.

3^0. Якщо ряд (1) абсолютно збіжний у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то $x_0 \leqslant \sigma(F,\omega) \leqslant \sigma_u(F,\omega)$.

У [2] для класичних рядів Діріхле (рядів Діріхле з показниками $\lambda_n = \ln(n+1)$) Г. Бор отримав рівність абсцис рівномірної збіжності й обмеженості суми $\sigma_u(F) = \sigma_b(F)$, а у [3] він довів, що $\sigma_u(F) \leqslant \sigma(F)+1/2$ (це так званий ефект Бора). Боненбласт і Хілле [4] встановили точність сталої $1/2$ у цій нерівності.

Нерівність $\sigma(F) \leqslant \sigma_u(F) \leqslant \sigma_b(F)$, доведену у випадку $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$, знаходимо в [4], [5, с. 132]. Зауважимо, також, що для $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ виконуються нерівність Ж. Валірона

$$\sigma_{зб}(F) \leqslant \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)$$

(див. [6, p. 9], [7], [5, с. 114–115], [8], [9, с. 13]) та нерівність ([4, p. 621], [5, с. 132])

$$\sigma_b(F) \leqslant \sigma(F) + \tau(\Lambda_+)/2.$$

Остання нерівність є точною, про що свідчить приклад ряду Діріхле з [4, p. 622], для якого $\sigma_u(F) - \sigma(F) = \tau(\Lambda_+)/2$, бо в загальному $\sigma_u(F) - \sigma(F) \leqslant \sigma_b(F) - \sigma(F) \leqslant \tau(\Lambda_+)/2$, звідки отримуємо, що й $\sigma_b(F) - \sigma(F) = \tau(\Lambda_+)/2$ для функції з [4]. Наступне просте твердження не містить апріорної умови монотонності послідовності показників $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$.

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{D}$.*

1^0. *Для кожного ω виконуються нерівності*

$$\sigma(F,\omega) \leqslant \sigma_u(F,\omega) \leqslant \sigma_b(F,\omega) \leqslant \sigma_{зб}(F,\omega) \leqslant \sigma_\mu(F,\omega).$$

2^0. *Якщо додатково припустити, що для кожного фіксованого $x < \sigma_b(F,\omega)$ функція $g(y) = F(x+iy)$ є майже періодичною в метриці Безіковича* ([10, 11, 12]), *то*

$$\sigma_b(F,\omega) \leqslant \sigma(F,\omega) + \tau(\Lambda,\omega)/2.$$

Зауваження 2. Якщо для функції $F \in \mathcal{D}$ існує підпослідовність часткових сум її ряду Діріхле рівномірно збіжна на $\Pi(\alpha,\beta) = \{z = x+iy \colon \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ y \in \mathbb{R}\}$, то F є рівномірно майже періодичною функцією в $\Pi(\alpha,\beta)$ (тим паче, майже періодичною в метриці Безіковича).

Доведення. Справді, збіжний ряд $\sum |f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}$ для кожного фіксованого $x < \sigma(F,\omega)$ є збіжною мажорантою для ряду $\sum f_n(\omega)e^{z\lambda_n(\omega)}$ у півплощині $\{z : \mathrm{Re}\, z \leqslant x\}$. Звідси, за ознакою Веєрштрасса рівномірної збіжності випливає, що $\sigma(F,\omega) \leqslant \sigma_u(F,\omega)$. Нерівності $\sigma_b(F,\omega) \leqslant \sigma_{зб}(F,\omega) \leqslant \sigma_\mu(F,\omega)$ очевидні.

Далі, доведемо нерівність $\sigma_u(F,\omega) \leqslant \sigma_b(F,\omega)$. Оскільки для $x < \sigma_u(F,\omega)$

$$R_N := \sup\left\{\left|F(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(\omega)e^{z\lambda_n(\omega)}\right| \colon \mathrm{Re}\, z \leqslant x\right\} \to 0 \quad (N \to +\infty),$$

а $|F(z)| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} f_n(\omega)e^{z\lambda_n(\omega)}\right| + R_N$, то

$$\sup\{|F(z)| \colon \mathrm{Re}\, z \leqslant x\} \leqslant \sup\left\{\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(\omega)e^{z\lambda_n(\omega)}\right| \colon \mathrm{Re}\, z \leqslant x\right\} + R_N < +\infty.$$

Отже, $\sigma_u(F,\omega) \leqslant \sigma_b(F,\omega)$. Нерівність $\sigma_b(F,\omega) \leqslant \sigma(F,\omega) + \tau(\Lambda,\omega)/2$, по-суті, є цитованою вище нерівністю з [4, p. 621], [5, с. 132], бо у випадку $\tau(\Lambda,\omega) = +\infty$ вона є очевидною. У випадку $\tau(\Lambda,\omega) < +\infty$ для всіх досить великих $n \geqslant n_0(\omega) = n_0$ маємо $\lambda_n(\omega) > \dfrac{\ln n}{\tau(\Lambda,\omega) - \varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому за нерівністю Коші-Буняковського при $x_0 = \sigma_b(F,\omega) - \varepsilon,\ x = x_0 - \varepsilon - \tau(\Lambda,\omega)/2$

$$\left(\sum_{n\geqslant n_0} |f_n(\omega)| e^{x\lambda_n(\omega)}\right)^2 \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} |f_n(\omega)|^2 e^{2x_0\lambda_n(\omega)} \sum_{n\geqslant n_0} e^{-(\tau(\Lambda,\omega)+2\varepsilon)\lambda_n(\omega)}.$$

Другий ряд у правій частині останньої нерівності є збіжним. Якщо переконаємося у збіжності першого ряду у правій частині, то отримаємо, що

$$\sigma(F,\omega) \geqslant x = \sigma_b(F,\omega) - 2\varepsilon - \tau(\Lambda,\omega)/2,$$

звідки при $\varepsilon \to +0$ одержимо, що

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \sigma_b(F,\omega) - \tau(\Lambda,\omega)/2.$$

Бажана збіжність першого ряду випливатиме з рівності Парсеваля ([10, 11, 12])

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(\omega)|^2 e^{2x_0\lambda_n(\omega)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(x_0+iy,\omega)|^2 dy,$$

позаяк $M(x_0,F) := \sup\{|F(x_0+iy,\omega)|\colon y \in \mathbb{R}\} < +\infty$ при кожному фіксованому ω за вибором x_0. $\square$

Твердження відомої гіпотези Блекуела для випадкових степеневих рядів, доведеної в [13] (див. також [14]) у випадку незалежних випадкових величин $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$, узагальнювалось на клас $\mathcal{D}(\Lambda_+)$ у [1, 15]. У випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda_+) := \overline{\lim}_{k\to+\infty} \ln k/\lambda_k < +\infty$, $0 < c_1 \leqslant |Z_k(\omega)| \leqslant c_2 < +\infty$ м.н. і математичними сподіваннями $\mathbf{E}Z_k = 0$ $(k \geqslant 0)$, у [1] доведено, що $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \leqslant \sigma(F,\omega) + \tau(\Lambda_+)/2$ м.н., а у статті [16] те ж саме доведено у випадку послідовності показників $\lambda_k = \ln(k+1)$ і мультиплікативної системи $(Z_k(\omega))$, тобто такої, що $Z_{m\cdot n}(\omega) = Z_m(\omega)\cdot Z_n(\omega)$ $(\forall m,n \in \mathbb{N}, \forall\omega)$ (у цьому випадку $\tau(\Lambda_+) = 1$).

У [17, 18] результати з [1] переносились на випадкові кратні ряди Діріхле. Pfedf;bvj, що у [19] ймовірнісні методи застосовані для доведення ряду теорем про поводження рядів Діріхле з незалежними показниками. Отримані результати застосовано у теорії $\zeta-$функції і при дослідженні поведінки розв'язків хвильового рівняння при $t \to \infty$. У статті [20] досліджуються степеневі ряди вигляду $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{X_k(\omega)}$, де $(X_k(\omega))$ – строго зростаючий цілочисельний стохастичний процес.

У цілому ряді праць [21, 22, 23, 24] також розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda_+)$, $\tau(\Lambda_+) < +\infty$, з коефіцієнтами вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ ([21, 22]). У випадку, коли $\tau(\Lambda_+) = 0$, а коефіцієнти ряду Діріхле $(f_k(\omega))$ попарно незалежні в [23, 24] твердження про абсцису абсолютної збіжності отримані в термінах умов на функції розподілу

$$F_k(x) := P\{\ \omega : |f_k(\omega)| < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0.$$

У працях [25, 26, 27], зокрема, отримано оцінки абсцис збіжності у випадку, коли коефіцієнти ряду Діріхле мають вигляд $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$, а послідовність $(\lambda_k(\omega))$ є послідовністю попарно незалежних випадкових величин. Як і в [23, 24], так і в [25, 26, 27] умова попарної незалежності забезпечує можливість застосування уточненої другої леми Бореля-Кантелі (див. [28], [29, p. 84]).

При цьому в [25, 26, 27] умови формулюються в термінах обмежень на функції розподілу

$$F_k(x) := P\{\ \omega : \lambda_k(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R},\ k \geqslant 0.$$

Ми доведемо ряд тверджень про співвідношення між абсцисами збіжності для рядів з $\mathcal{D}$, уникаючи (наскільки це взагалі можливо) апріорних умов окремо як на показники, так і на коефіцієнти.

Твердження 2. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1) *і* $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ *м.н. Тоді*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \text{м.н.}$$

Зауваження 3. Якщо $F \in \mathcal{D}$, множина $J \subset \mathbb{N}$ необмежена і $|f_k(\omega)| \to +\infty$ $(k \to +\infty,\ k \in J)$, то $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty,\ k \in J)$, бо інакше $\sigma_\mu(F,\omega) = -\infty$.

Доведення твердження 2. **i**). У випадку $\alpha_0(\omega) = +\infty$ для кожного $\Delta > 0$ і для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$ виконуються нерівності

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) < -2\Delta, \quad \lambda_k(\omega) > \lambda(\omega)/2 > 0 \ \text{ м.н.},$$

звідки, зокрема,

$$|f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} < e^{-\Delta\lambda_k(\omega)} \quad (k \geqslant k_0(\omega)),$$

а тому для кожного $\Delta \in (\frac{2}{\lambda(\omega)}\ln\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ і довільного $\varepsilon \in (0,1)$

$$|f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} < \varepsilon \quad (k \geqslant k_0(\omega)) \quad \text{м.н.}$$

Звідси,

$$\lim_{k\to+\infty} |f_k(\omega)|e^{\Delta\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Отже, $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant \Delta$ м.н., де $\Delta \in \left(\frac{2}{\lambda(\omega)}\ln\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ – довільне. Звідси, $\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(\omega) = +\infty$ м.н.

ii). У випадку $\alpha_0(\omega) = -\infty$, якщо би виконувалось $\sigma_\mu(F,\omega) > -\infty$, то для $\sigma \leqslant \sigma_\mu(F,\omega),\ \varepsilon > 0$ ми б отримали

$$|f_k(\omega)|e^{(\sigma-\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < c = c(\sigma,\omega) \in (1,+\infty) \iff \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} > \sigma - \varepsilon + \frac{-\ln c}{\lambda_k(\omega)}.$$

Останнє, у випадку $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$, суперечить тому, що $\alpha_0(\omega) = -\infty$.

iii). Нехай тепер $\alpha_0(\omega) \neq \infty$. Зауважимо, що у цьому випадку для кожної послідовності $k_j \to +\infty$ такої, що $\lim_{j\to+\infty, k=k_j} \dfrac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0(\omega)$ отримаємо

$$\ln|f_k(\omega)| \to \infty\ (k = k_j \to +\infty) \Longrightarrow \lambda_k(\omega) \to +\infty\ (k = k_j \to +\infty).$$

Якщо додатково припустити, що $\alpha_0(\omega) \neq 0$, то й

$$\lambda_k(\omega) \to +\infty\ (k = k_j \to +\infty) \Longrightarrow \ln|f_k(\omega)| \to \infty\ (k = k_j \to +\infty).$$

З іншого боку, якщо для деякого $x_1 = x_1(\omega) = x_1(F,\omega) \neq 0$ виконується (2), то

$$\ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty \quad (k \to +\infty).$$

Тому, не існує такої послідовності $k_j \to +\infty$, що $\lim\limits_{j\to+\infty, k=k_j} \dfrac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0(\omega)$ і $\ln|f_k(\omega)| = O(1),\ \lambda_k(\omega) = O(1)$ $(k = k_j \to +\infty)$.

Далі, для довільного $\varepsilon > 0$ і послідовності $k_j \to +\infty$ такої, що $\dfrac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0(\omega) + o(1)$ $(k = k_j \to +\infty)$, матимемо

$$|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} = e^{(o(1)+2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} > e^{\varepsilon\lambda_k(\omega)} \to +\infty \quad (k = k_j \to +\infty).$$

Звідси, $\sigma_\mu(F,\omega) < \alpha_0(\omega) + 2\varepsilon$ і, через довільність $\varepsilon > 0$, $\sigma_\mu(F,\omega) \leqslant \alpha_0(\omega)$.

Доведемо тепер протилежну нерівність $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant \alpha_0(\omega)$.

Нехай спочатку $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $\sigma_\mu(F,\omega) < \alpha_0(\omega)$, а $\varepsilon > 0$ нехай таке, що $\sigma_\mu(F,\omega) + 2\varepsilon < \alpha_0(\omega)$. За означенням $\alpha_0(\omega)$, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $k_0(\omega)$ таке, що нерівність

$$\ln|f_k(\omega)|/\lambda_k(\omega) < -(\alpha_0(\omega) - \varepsilon)$$

виконується для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$. Тоді

$$|f_k(\omega)| < \exp\{-(\alpha_0(\omega) - \varepsilon)\lambda_k(\omega)\} \quad (k \geqslant k_0(\omega)).$$

Звідки, у випадку $\lambda_k(\omega) \to +\infty$ $(k \to +\infty)$

$$|f_k(\omega)|e^{(\alpha_0(\omega)-2\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < e^{-\varepsilon\lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

тобто $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant \alpha_0(\omega) - 2\varepsilon > \sigma_\mu(F,\omega)$. Суперечність.

Припустимо тепер, що $f_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$. Тоді $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant 0$ і $\alpha_0(\omega) \geqslant 0$. Тому, у випадку $\alpha_0(\omega) > 0$ і $\varepsilon \in \big(0, (\alpha_0(\omega) - \sigma_\mu(F,\omega))/2\big)$ маємо $\lambda_k(\omega) < \dfrac{-\ln|f_k(\omega)|}{\alpha_0(\omega) - \varepsilon}$, і тому,

$$|f_k(\omega)|e^{(\sigma_\mu(F,\omega)+\varepsilon)\lambda_k(\omega)} < \exp\left\{\left(1 - \frac{\sigma_\mu(F,\omega)+\varepsilon}{\alpha_0(\omega)-\varepsilon}\right)\ln|f_k(\omega)|\right\} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Суперечність з означенням $\sigma_\mu(F,\omega)$. Залишається розглянути випадок $\alpha_0(\omega) = 0 > \sigma_\mu(F,\omega)$. Тоді $\dfrac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} > -2\varepsilon$ $(k \geqslant k_0(\omega))$, звідки

$$|f_k(\omega)|e^{-\varepsilon\lambda_k(\omega)} < \exp\left\{\frac{1}{2}\ln|f_k(\omega)|\right\} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Отже, $\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant -\varepsilon$, але $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому $\alpha_0(\omega) = 0 > \sigma_\mu(F,\omega) \geqslant 0$. Знову отримуємо суперечність.

Нехай тепер $\ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty$ при деякому $x_1 \neq \infty$, але ні $f_k(\omega) \not\to 0$, ні $\lambda_k(\omega) \not\to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Тоді існують такі дві необмежені множини натуральних чисел $J_1,\ J_2$, що $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ і

$$f_k(\omega) \to 0\ (k \to +\infty, k \in J_1), \quad \lambda_k(\omega) \to +\infty\ (k \to +\infty, k \in J_2).$$

Позначимо $E_k(\omega) := \ln|f_k(\omega)| + x_1\lambda_k(\omega) \to -\infty$. Означимо тепер потрібні множини індексів, наприклад, так:

$$J_1 = \{k \in \mathbb{N} : -\ln|f_k(\omega)| \geqslant |E_k(\omega)|/2\}, \quad J_2 = \{k \in \mathbb{N} \setminus J_1 : |x_1|\lambda_k(\omega) \geqslant |E_k(\omega)|/2\}.$$

Якщо припустити, що $k \notin J_1 \cup J_2$, то $-\ln|f_k(\omega)| < |E_k(\omega)|/2$, $|x_1|\lambda_k(\omega) < |E_k(\omega)|/2$, і тому, $|E_k(\omega)| = -\ln|f_k(\omega)| + |x_1|\lambda_k(\omega) < |E_k(\omega)|$, що неможливо. Тобто $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$.

Позначимо

$$\alpha_0^{(l)}(\omega) \stackrel{def}{=} \varliminf_{k\to+\infty,\ k\in J_l} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}, \quad l \in \{1,2\},$$

а також

$$F_{(l)}(z) = \sum_{k\in J_l} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},\ l \in \{1,2\}, \quad F = F_{(1)} + F_{(2)}.$$

Тоді, за доведеним $\sigma_\mu(F_{(l)},\omega) = \alpha_0^{(l)}(\omega)$, $l \in \{1,2\}$ м.н. Зауважимо, що

$$\alpha_0(\omega) = \inf\left\{\alpha_0^{(1)}(\omega), \alpha_0^{(2)}(\omega)\right\}.$$

Крім того,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \inf\left\{\sigma_\mu(F_{(1)},\omega), \sigma_\mu(F_{(2)},\omega)\right\}.$$

Це остаточно доводить твердження 2. $\square$

Для детермінованих рядів Діріхле вигляду (1) (тобто, при фіксованому $\omega = \omega_0 \in \Omega$) нескладно доводиться таке твердження. Воно у запропонованому вигляді доведене в [25] (також див. [26, 27], де це твердження формулюється у наведеному нижче вигляді).

Твердження 3 ([25]). *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1). *Тоді для довільних функцій $\gamma, \delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geqslant 0$ і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \tag{3}$$

виконуються нерівності

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geqslant \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega). \tag{4}$$

У випадку рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників Λ_+ це твердження див. в [8, 9]. У цьому повідомленні ми, зокрема, доповнимо це твердження (див. далі твердження 5).

Зауваження 4. 1^0. Якщо $F \in \mathcal{D}$ (тобто виконується умова (2)), то при $\gamma(\omega) = 0$, $\delta(\omega) = -x_1$

$$(\gamma(\omega) - 1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \to +\infty \quad (k \to +\infty) \quad \text{м.н.} \tag{5}$$

Клас таких пар функцій (γ, δ), для яких виконується умова (5), позначимо через $\mathcal{L}$.

2^0. Зрозуміло, що з умови (3) також випливає, що виконується умова (5), але при цьому, взагалі кажучи, немає жодних окремих умов на послідовності $\mathbf{f}$ та Λ.

За умови (5), зокрема, маємо таке твердження.

Твердження 4. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1).

1^0. *Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що для деяких $\delta(\omega) \in \mathbb{R}$, $\gamma(\omega) \in [0,1)$ виконується умова* (5), *то $\sigma_\mu(F,\omega) > \dfrac{-\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}$. Власне,*

$$\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant -\inf\left\{\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)} : (\gamma,\delta) \in \mathcal{L}\right\} \quad \textit{м.н.}$$

2^0. *Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що для деяких $\delta(\omega) \in \mathbb{R}$ і $\gamma(\omega) \in [0,1)$ умова* (5) *не виконується, то $\sigma_\mu(F,\omega) < \dfrac{-\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}$. Власне,*

$$\sigma_\mu(F,\omega) < -\sup\left\{\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)} : (\gamma,\delta) \notin \mathcal{L}\right\} \quad \textit{м.н.}$$

Доведення. 1^0. З умови (5) випливає, що

$$|f_k(\omega)| \exp\left\{-\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}\lambda_k(\omega)\right\} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Залишається пригадати зауваження 1

2^0. Якщо умова (5) не виконується, то

$$\varliminf_{n\to+\infty} (\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) < +\infty.$$

Тому існує послідовність (k_n) така, що $k_n \to +\infty$ і

$$(\gamma(\omega)-1)\ln|f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \leqslant C < +\infty$$

$(k = k_n,\ n \geqslant 1)$, звідки

$$|f_k(\omega)| \exp\left\{-\frac{\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}\lambda_k(\omega)\right\} \not\to 0 \quad (k = k_n \to +\infty).$$

А тому, $\sigma_\mu(F,\omega) < \dfrac{-\delta(\omega)}{1-\gamma(\omega)}$. □

З тверджень 2 і 3 негайно отримуємо таке твердження.

Твердження 5. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1) *і $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ м.н. Якщо для довільних функцій $\gamma, \delta \colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geqslant 0$ м.н. виконується умова* (3), *то м.н. виконуються співвідношення*

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) = \gamma(\omega)\sigma_\mu(\omega) - \delta(\omega) \geqslant \gamma(\omega)\sigma_{\textit{зб}}(F,\omega) - \delta(\omega). \tag{6}$$

Вибираючи у твердженні 5 $\delta(\omega) = 0,\ \gamma(\omega) = 1 - \gamma_1(\omega)$, отримуємо такий наслідок.

Твердження 6. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ має вигляд* (1), $\varliminf\limits_{k\to+\infty} \lambda_k(\omega) := \lambda(\omega) > 0$ *м.н., а для деякої функції $\gamma_1(\omega) \colon \Omega \to (-\infty, 1]$*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} < +\infty \quad \textit{м.н.} \tag{7}$$

Тоді

$$\sigma(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F,\omega) \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

Вибираючи у твердженні 5 $\gamma(\omega)=1$, отримуємо такий наслідок.

Твердження 7. *Нехай $F\in\mathcal{D}$ і*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Тоді

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \alpha_0(\omega)-\delta(\omega) = \sigma_\mu(F,\omega)-\delta(\omega) \geqslant \sigma_{зб}(F,\omega)-\delta(\omega) \quad \text{м.н.} \tag{10}$$

Доведення. Оскільки $\lambda_k(\omega)\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$, то з умови (9) випливає, що $\delta(\omega)>0$ м.н. і $\lambda_k(\omega)\to+\infty$ $(k\to+\infty)$ м.н. Залишається застосувати твердження 5 з $\gamma(\omega)=1$. □

З твердження 7 елементарно отримуємо таке твердження.

Твердження 8. *Нехай $F\in\mathcal{D}$ і $\tau(\Lambda,\omega)<+\infty$ м.н. Тоді*

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \alpha_0(\omega)-\tau(\Lambda,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega)-\tau(\Lambda,\omega) \geqslant \sigma_{зб}(F,\omega)-\tau(\Lambda,\omega) \quad \text{м.н.}, \tag{11}$$

а у випадку, коли $(\lambda_k(\omega))$ – послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\tau(\Lambda,\omega)<+\infty$ м.н., існує таке $\tau\in[0,+\infty)$, що $\tau(\Lambda,\omega)=\tau$ м.н. і

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \alpha_0(\omega)-\tau = \sigma_\mu(F,\omega)-\tau \geqslant \sigma_{зб}(F,\omega)-\tau \quad \text{м.н.} \tag{12}$$

Доведення. Якщо $\omega\in\Omega$ таке, що $\tau(\Lambda,\omega)<+\infty$, то умова (9) виконується з $\delta(\omega)=\tau(\Lambda,\omega)+\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ – довільне. Залишається застосувати нерівності (10) з твердження 7 і перейти до границі при $\varepsilon\to+0$.

За законом нуля і одиниці Коломогорова $\tau(\Lambda,\omega)\equiv\tau\in[0,+\infty]$ м.н., але за умовою $\tau(\Lambda,\omega)<+\infty$ м.н. Тому з нерівностей (11) негайно отримуємо (12). □

Позначимо

$$h_1(\omega)=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k}, \quad h_2(\omega)=\underline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k}.$$

З твердження 6, подібно до твердження 8, отримуємо таке твердження. Заззначимо, що його п. 1^0 в [27] наведений без доведення з прогалиною у його формулюванні.

Твердження 9. *Нехай $F\in\mathcal{D}$ і має вигляд* (1).

1^0. *Якщо $\omega\in\Omega$ таке, що $h_1(\omega)\in[-\infty,0)$, то нерівності* (8) *виконуються з $\gamma_1(\omega)=\frac{1}{h_1(\omega)}$, якщо $h_2(\omega)\in(1,+\infty]$, то нерівності* (8) *виконуються з $\gamma_1(\omega)=\frac{1}{h_2(\omega)}$. При цьому вважаємо, що $1/\infty=0$.*

2^0. *Якщо $(|f_k(\omega)|)$ – послідовність незалежних випадкових величин, то у випадку, коли $h_1(\omega)\in(-\infty,0)$ м.н. або $h_2(\omega)\in(1,+\infty)$ м.н., відповідно, існують $h_1\in(-\infty,0)$ або $h_2\in(1,+\infty)$, відповідно, такі, що $h_1(\omega)=h_1$ м.н. або $h_2(\omega)=h_2$ м.н., відповідно, і нерівності* (8) *виконуються м.н. з $\gamma_1(\omega)=\frac{1}{h_1}$ або з $\gamma_1(\omega)=\frac{1}{h_2}$, відповідно.*

Доведення. Нехай спочатку $h_1(\omega) < 0$. Переконаємось, що твердження 6 можна застосувати з

$$\gamma_1(\omega) = h_2(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1-\varepsilon/2)), \tag{13}$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – довільне. Зауважимо, що у випадку $h_1(\omega) = -\infty$, в рівності (13) вважаємо, що $h_1(\omega) < 0$ – довільне. Далі, за умовою, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$

$$\frac{\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} > -h_1(\omega)(1-\varepsilon).$$

Тоді при $h_2(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1-\varepsilon/2))$, $0 < \varepsilon < 1$, оскільки $h_2(\omega) < 0$, то

$$|f_k(\omega)|^{h_2(\omega)} \leqslant \exp\{-h_2(\omega)h_1(\omega)(1-\varepsilon)\ln k\} = \exp\left\{-\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\ln k\right\},$$

але $\dfrac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2} > 1$. Тому за твердженням 6

$$\sigma(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \quad \text{м.н.},$$

де $\gamma_1(\omega) = 1/(h_1(\omega)(1-\varepsilon/2))$. Залишається скористатися довільністю $\varepsilon \in (0,1)$.

У випадку $h_2(\omega) > 1$ вибираємо $\gamma_1 = h_0(\omega) + 2\varepsilon$, $h_0(\omega) = 1/h_2(\omega)$ ($h_0(\omega) = 0$ у випадку $h_2(\omega) = +\infty$) і розкриваємо означення нижньої границі з $h_0 + \varepsilon$. Справді, за умовою, для кожного $\varepsilon > 0$ такого, що $h_0(\omega) + \varepsilon < 1$ існує $k_0(\omega)$ таке, що для всіх $k \geqslant k_0(\omega)$

$$\frac{\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} < \frac{-1}{h_0(\omega)+\varepsilon}.$$

Тоді

$$|f_k(\omega)|^{h_0(\omega)+2\varepsilon} = \exp\{(h_0(\omega)+2\varepsilon)\ln|f_k(\omega)|\} \leqslant \exp\left\{-\frac{h_0(\omega)+2\varepsilon}{h_0(\omega)+\varepsilon}\ln k\right\}.$$

Тому знову за твердженням 6

$$\sigma(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \quad \text{м.н.},$$

де $\gamma_1(\omega) = h_0(\omega) + 2\varepsilon$. Залишається скористатися довільністю $\varepsilon \in (0,1)$.

Доведення п. 2^0 завершуємо цілком так само, як і у доведенні твердження 8, посиланням на закон нуля й одиниці. Справді, за законом нуля й одиниці Колмогорова $h_1(\omega) \equiv h_1 \in [-\infty, 0)$ м.н. або $h_2(\omega) \equiv h_2 \in (1, +\infty]$ м.н., але за умовою $h_1(\omega) > -\infty$ м.н. або $h_2(\omega) < +\infty$ м.н. Це повністю завершує доведення п. 2^0. □

Зауваження 5. Твердження, подібні до п. 1^0 твердження 9, у випадку рядів Діріхле з послідовністю показників Λ_+ знаходимо у [32, наслідки 2 і 3], а перша частина твердження 8, по-суті, є іншою формою запису наслідку 1 з [32], встановленого також у випадку рядів Діріхле з послідовністю показників Λ_+.

З тверджень 8 і 9 випливає таке твердження (у цьому зв'язку див. також [30, 8, 9, 6, 31, 5, 32], [25, 26, 27]).

Твердження 10. *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо $\omega \in \Omega$ таке, що $\tau(\Lambda, \omega) \stackrel{def}{=} \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$ або $\ln k = o(\ln|f_k(\omega)|)$ $(k \to +\infty)$, то виконуються рівності*

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(\omega).$$

Доведемо тепер таке твердження.

Твердження 11. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і має коефіцієнти вигляду $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ $(k \geqslant 0)$. Якщо виконуються умови $(\exists c_1,\ c_2 \in (0, +\infty))\colon c_1 \leqslant |Z_k(\omega)| \leqslant c_2$ м.н.,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = Z(\omega) \text{ м.н.}, \tag{14}$$

а $\gamma_1 = 1/h_1$ у випадку $h_1 < 0$ і $\gamma_1 = 1/h_2$ у випадку $h_2 > 1$, то

$$\sigma(F, \omega) \geqslant (1-\gamma_1)(\alpha_0^*(\omega) - Z(\omega)) = (1-\gamma_1)\sigma_\mu(F, \omega) \geqslant (1-\gamma_1)\sigma_{зб}(F, \omega) \quad \text{м.н.}, \tag{15}$$

де

$$\alpha_0^*(\omega) := \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)}, \quad h_1 := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k}, \quad h_2 := \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k}.$$

Доведення твердження 11. Зауважимо, що як з умови $h_1 < 0$, так і з умови $h_2 > 1$ випливає, що $\ln k = o(\ln|a_k|)$ $(k \to +\infty)$. Тому з умови $(\exists c_1,\ c_2 \in (0, +\infty))\colon c_1 \leqslant |Z_k(\omega)| \leqslant c_2$ м.н. випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{16}$$

Оскільки $\varlimsup_{n\to+\infty} c_n d_n = \varlimsup_{n\to+\infty} c_n \cdot \lim_{n\to+\infty} d_n$ у випадку довільної дійсної послідовності c_n, і дійсної послідовності $d_n \geqslant 0$ $(n \geqslant n_0)$, то

$$h_1(\omega) := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = h_1,$$

а також

$$h_2(\omega) := \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln k} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\ln k} \lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\ln|a_k|}\right) = h_2.$$

Далі, за умовою (14)

$$\alpha_0(\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n(\omega)} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|Z_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)} = \alpha_0^*(\omega) - Z(\omega).$$

Оскільки виконується умова (16), то звідси за твердженням 9 зі співвідношень (8) отримуємо (15).

Зауваження 6. За законом нуля і одиниці Колмогорова випливає таке: якщо $\left(\dfrac{\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}\right)$ – послідовність незалежних випадкових величин, то випадкова величина $\alpha_0(\omega)$ є майже напевне (м.н) сталою, тобто, існує $\sigma \in [-\infty, +\infty]$ таке, що $\alpha_0(\omega) = \sigma$ м.н. Звідси, за твердженням 10, у випадку, коли $\tau(\Lambda, \omega) = 0$ або $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$, маємо, що випадкова величина $\sigma(f, \omega)$ також є майже напевне (м.н) сталою і $\sigma(f, \omega) = \sigma \in [-\infty, +\infty]$ м.н. Власне, звідси те саме твердження випливає у випадку, коли $(|f_k(\omega)|)$ є детермінованою числовою послідовністю, а Λ є послідовністю незалежних випадкових величин, а також у випадку детермінованої послідовності Λ, коли $(|f_k(\omega)|)$ є послідовністю незалежних випадкових величин. У монографії [14] останнє написано у випадку монотонно зростаючої до нескінченності послідовності Λ_+, коли $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ є послідовністю незалежних випадкових величин.

Для $F \in \mathcal{D}$ вигляду (1) з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$ розглянемо ряди Діріхле

$$F_1(z) = F_1(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k(\omega)}, \quad F_2(z) = F_2(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2z\lambda_k(\omega)}, \ (\omega \in \Omega)$$

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_3^*(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 e^{2x\lambda_k}, \quad F_4(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}.$$

Зауважимо, що

$$\sigma(F_3) = \sigma(F_3^*) \text{ і } \sigma_\mu(F_3) = \sigma_\mu(F_3^*) = \sigma_\mu(F_4),\ \sigma_\mu(F_1) = \sigma_\mu(F_2).$$

Наступне твердження – це фактично перша частини теореми 2 з праці [1], яку там доведено для послідовності Λ_+ за апріорного обмеження $\tau(\Lambda_+) < +\infty$. Сформулюємо його в дещо видозміненому вигляді.

Твердження 12. *Нехай $F_4 \in \mathcal{D}$. Тоді*

$$\sigma(F_4) \le \frac{\sigma(F_4) + \sigma_\mu(F_4)}{2} \le \sigma(F_3) \le \inf\left\{\sigma(F_4) + \frac{\tau(\Lambda)}{2}, \sigma_\mu(F_4)\right\},$$

де $\tau(\Lambda) = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{\lambda_k}$.

Доведення. Першу нерівність отримуємо безпосередньо з нерівності $\sigma(F_4) \leqslant \sigma_\mu(F_4)$, до якої вона є рівносильною.

Доведемо другу нерівність. Нехай x і x_0 такі, що

$$x_0 = \sigma_\mu(F_4) - \varepsilon < \sigma_\mu(F_4), \quad x = \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4) - \varepsilon < \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4),$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тоді $|a_n|e^{x_0\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$, і отже, послідовність $\big(|a_n|e^{x_0\lambda_n}\big)$ допускає впорядкування за монотонним незростанням. Позначатимемо це впорядкування $\big(|a_n^*|e^{x_0\lambda_n^*}\big)$. Але

$$\sum |a_n^*| e^{(x-x_0)\lambda_n^*} = \sum |a_n| e^{(x-x_0)\lambda_n} < +\infty,$$

а також

$$\sum |a_n|^2 e^{x\lambda_n} = \sum |a_n^*| e^{x_0\lambda_n^*} \cdot |a_n^*| e^{(x-x_0)\lambda_n^*}.$$

Тому, за ознакою Діріхле, ряд $\sum |a_n|^2 e^{x\lambda_n}$ збіжний. Звідси

$$2\sigma(F_3) \geqslant x = \sigma_\mu(F_4) + \sigma(F_4) - \varepsilon,$$

а з довільності вибору $\varepsilon > 0$ випливає, що $2\sigma(F_3) \geqslant \sigma(F_4) + \sigma_\mu(F_4)$.

У праці [1] третю нерівність, як вже зазначалося вище, доведено у випадку послідовності Λ_+. Оскільки у випадку, коли $\tau(\Lambda) < +\infty$ послідовність нескладно впорядковується за зростанням зі збереженням цієї умови, а перестановка елементів рядів Діріхле F_3, F_4 не змінює їхніх абсцис абсолютної збіжності $\sigma(F_3)$, $\sigma(F_4)$, то залишається скористатися першою частиною теореми 2 з [1]. Якщо ж $\tau(\Lambda) = +\infty$, то третя нерівність стає тривіальною, позаяк $\inf\left\{\sigma(F_4) + \frac{\tau(\Lambda)}{2}, \sigma_\mu(F_4)\right\} = \sigma_\mu(F_4)$ і $\sigma_\mu(F_4) = \sigma_\mu(F_3) \geqslant \sigma(F_3)$. □

З твердження 12 отримуємо таке твердження.

Твердження 13. *Нехай $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, де $(\xi_k(\omega))$ – послідовність випадкових величин таких, що $(\forall k)\colon\ 0 < c_1 \leqslant |\xi_k(\omega)| \leqslant c_2 < +\infty$ м.н. Тоді м.н.*

$$\sigma(F,\omega) \le \frac{\sigma(F,\omega) + \sigma_\mu(F,\omega)}{2} \le \sigma(F_2,\omega) \le \inf\left\{\sigma(F,\omega) + \frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F,\omega)\right\}. \tag{17}$$

Доведення. За твердженням 12 при фіксованому ω

$$\sigma(F_1,\omega) \le \frac{\sigma(F_1,\omega) + \sigma_\mu(F_1,\omega)}{2} \le \sigma(F_2,\omega) \le \inf\left\{\sigma(F_1,\omega) + \frac{\tau(\Lambda,\omega)}{2}, \sigma_\mu(F_1,\omega)\right\}.$$

Звідси отримуємо (17), оскільки за умовою $(\forall k)\colon\ 0 < c_1 \leqslant |\xi_k(\omega)| \leqslant c_2 < +\infty$ м.н., нескладно переконуємося, що

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega),\ \sigma(F,\omega) = \sigma(F_1,\omega) \ \text{ м.н.} \tag{18}$$

□

Введемо тепер у розгляд два такі класи випадкових величин. Через Θ позначимо клас послідовностей комплекснозначних випадкових величин ξ_n таких, що $(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon\ c_1 \leqslant |\xi_n| \leqslant c_2$ м.н. Через Δ позначимо клас невід'ємних випадкових величин δ_n таких, що

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon \quad M(e^{x\delta_n}) \leqslant C_1 = C_1(x) < +\infty.$$

З твердження 13 за допомогою теореми про три ряди отримуємо таке твердження.

Твердження 14. *Нехай $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, а $F \in \mathcal{D}$ з коефіцієнтами $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ і показниками $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.*

1. *Якщо $M\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ – послідовність незалежних випадкових величин для кожного $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) \geqslant \sigma(F_3)$ м.н.*
2. *Якщо додатково припустити, що $(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})$: $M(e^{x\delta_n}) \geqslant C_2(x)$, то $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ м.н.*

Зауваження 7. *i)* Оскільки $M(e^{x\delta_n}) = \varphi_{\delta_n}(-ix)$, де φ_δ – характеристична функція відповідної випадкової величини, то, наприклад, у випадку, коли всі δ_n однаково розподілені, $\varphi_{\delta_n}(-ix) = \varphi_{\delta_0}(-ix) := C(x)$. Якщо тепер $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ C(x) \neq \infty$, то в умовах твердження 14 досить взяти $C_1(x) = C_2(x) = C(x)$.

ii) Якщо $(\delta_k(\omega))$ і $(\xi_k(\omega))$ – дві послідовності незалежних випадкових величин, то такою ж є і послідовність $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Доведення твердження 14. Скористаємось такою теоремою Колмогорова і Хінчіна ([33, с. 371]): *Нехай* (η_n) *послідовність дійсних незалежних випадкових величин таких, що* $M\eta_n = 0$ $(n \geqslant 0)$. *Якщо* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M\eta_n^2 < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \eta_n$ *збіжний м.н.*

Якщо тепер (ζ_n) – послідовність комплекснозначних незалежних випадкових величин таких, що $M\zeta_n = 0$ $(n \geqslant 0)$ і $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M|\zeta_n|^2 < +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \zeta_n$ також збіжний м.н., позаяк за теоремою Колмогорова-Хінчіна такими є ряди $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\,\zeta_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\,\zeta_n$.

Зауважимо, що

$$M\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = a_n e^{x\lambda_n} M\big(\xi_n(\omega)e^{x\delta_n(\omega)}\big) = 0$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$. Крім цього,

$$\begin{aligned} M\big(|f_n(\omega)|^2 e^{2x\lambda_n(\omega)}\big) &= |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} M\big(|\xi_n(\omega)|^2 e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \leqslant \\ &\leqslant c_2^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} M\big(e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \leqslant c_2^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} C_1(2x). \end{aligned}$$

Тому за теоремою Колмогорова-Хінчіна, якщо $x < \sigma(F_3)$, то ряд $\sum f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}$ – збіжний м.н. Тому

$$\sigma_{зб}(F,\omega) \geqslant \sigma(F_3) \quad \text{м.н.}$$

Якщо припустити, що виконується умова $(\forall n)(\forall x):\ M(e^{x\delta_n}) \geqslant C_1(x) > 0$, то

$$\begin{aligned} D\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = M\big(|f_n(\omega)|^2 e^{2x\lambda_n(\omega)}\big) &= |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} M\big(|\xi_n(\omega)|^2 e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \geqslant \\ &\geqslant c_1^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} M\big(e^{2x\delta_n(\omega)}\big) \geqslant c_1^2 |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} C_2(2x). \end{aligned}$$

Якщо $x = \sigma_{зб}(F,\omega) - \varepsilon < \sigma_{зб}(F,\omega) \leqslant \sigma_\mu(F,\omega)$ м.н., де $\varepsilon > 0$ – довільне, то ряд $\sum f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}$ – збіжний м.н. Тому за теоремою Колмогорова-Хінчіна, ряд $\sum D\big(f_n(\omega)e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty$, і отже, ряд $\sum |a_n|^2 e^{2x\lambda_n} < +\infty$. Звідси $x = \sigma_{зб}(F,\omega) - \varepsilon < \sigma(F_3)$, звідки, спрямовуючи $\varepsilon \to +0$, отримуємо, що

$$\sigma_{зб}(F,\omega) \leqslant \sigma(F_3) \quad \text{м.н.}$$

Остаточно отримуємо, що $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ м.н. □

Твердження 15. *Нехай* $(\xi_n) \in \Theta$, $(\delta_n) \in \Delta$, *а* $F \in \mathcal{D}$ *з коефіцієнтами* $\mathbf{f} = (f_k(\omega))$ *і показниками* $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k \colon k \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$.

1. *Якщо* $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ *– послідовність незалежних випадкових величин для кожного* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma(F,\omega) \geqslant \sigma(F_4)$ *м.н.*

2. *Якщо додатково припустити, що*

$$(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \geqslant 1)\colon P\{\omega\colon |a_n|e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$

і $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \neq \infty$ *м.н., а також*

$$(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ De^{x\delta_n} \geqslant C_3(x),$$

то $\sigma(F,\omega) = \sigma(F_4)$ *м.н.*

Доведення твердження 15. Зауважимо, що

$$M\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) \leqslant c_2|a_n|e^{x\lambda_n}M\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) \leqslant c_2|a_n|e^{x\lambda_n}C_1(x)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, а також знову

$$D\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) \leqslant M\big(|f_n(\omega)|^2e^{2x\lambda_n(\omega)}\big) \leqslant c_2^2|a_n|^2e^{2x\lambda_n}C_1(2x).$$

За теоремою про два ряди ([33, с.373]), якщо $x < \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\}$, то ряд $\sum |f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}$ – збіжний м.н. Тому, враховуючи, що за твердженням 12, $\min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4)$, отримуємо, що

$$\sigma(F,\omega) \geqslant \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4) \quad \text{м.н.}$$

Якщо додатково припустити, що $|f_n(\omega)| = c|a_n|$ м.н., то

$$M\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = c|a_n|e^{x\lambda_n}M\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) \geqslant c|a_n|e^{x\lambda_n}C_2(x)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$, а також, що

$$D\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) = c^2|a_n|^2e^{2x\lambda_k}D\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) \geqslant C_3(x)c^2|a_n|^2e^{2x\lambda_k}.$$

Тобто

$$\sum M\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty \ \wedge \ \sum D\big(|f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)}\big) < +\infty \Longleftrightarrow \tag{19}$$

$$\sum |a_n|e^{x\lambda_n} < +\infty \ \wedge \ \sum |a_n|^2e^{2x\lambda_n} < +\infty. \tag{20}$$

Якщо тепер $x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon < \sigma(F,\omega)$ м.н., де $\varepsilon > 0$ – довільне, то

$$(\exists a > 0)(\forall n \geqslant 1)\colon P\{\omega\colon |f_n(\omega)|e^{x\lambda_n(\omega)} < ac\} = P\{\omega\colon |a_n|e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1.$$

Отже, за теоремою про два ряди, ряди з дисперсій і математичних сподівань в (19) є збіжними, а тому, збіжними є обидва ряди в (20). Звідси,

$$x = \sigma(F,\omega) - \varepsilon \leqslant \min\{\sigma(F_3), \sigma(F_4)\} = \sigma(F_4).$$

Залишається спрямувати $\varepsilon \to +0$. □

Зауваження 8. Якщо крім всього припустити, що (δ_n) – однаково розподілені, то $D\big(e^{x\delta_n(\omega)}\big) = d(x) \leqslant C_1(2x) \in (0, +\infty)$.

Список використаної літератури

1. P. V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud. **20** (2003), no 1, 33–39.
2. H. Bohr, *Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 203–211.
3. H. Bohr, *Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletchen Reihen* $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1913** (1913), no. 4, 441–488.
4. H. F. Bohnenblust and E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet Series*, Ann. Math. (2) **32** (1931), no. 3, 600–622.
5. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1976, 536 с.
6. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge University Press, London, 1915, 78 p.

7. G. Valiron, *Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. Fr. **52** (1924), 166–174.
8. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса*, Буковинський матем. журн. **1** (2013), no. 3–4, 43–48.
9. О. Б. Скасків, А. І. Бандура, *Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції*, пп. Голіней, Львів–Івано-Франківськ, 2015, 108 с.
10. Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщённого сдвига*, Наука, Москва, 1973, 312 с.
11. A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge, Dover Publ., 1955, 180 p.
12. Н. П. Гиря, *Розподіл значень голоморфних майже періодичних функцій багатьох змінних*, Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук, Харків, 2007.
13. C. Ryll-Nardzewski, *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Stud. Math. **13** (1953), 30–36.
14. J.–P. Kahane, *Some random series of functions*, 2nd. ed. Cambridge Stud. Adv. Math. **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 308 p.
15. X. Ding and Y. Xiao, *Natural boundary of random Dirichlet series*, Укр. матем. журн. **58** (2006), no. 7, 997–1005; **reprinted version in:** Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 7, 1129–1138.
16. H. Hedenmalm, *Topics in the theory of Dirichlet series*, Вісн. Харків. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і мех. **475** (2000), 195–203.
17. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Про області збіжності випадкових подвійних рядів Діріхле*, Mat. Stud. **32** (2009), no. 1, 81–85.
18. O. Yu. Zadorozhna and O. B. Skaskiv, *On domains of convergence of multiple random Dirichlet series*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 1, 51–57.
19. Е. М. Никишин, *Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения*, Матем. сб. **96(138)** (1975), no. 1, 3–40; **English version:** E. M. Nikishin, *Dirichlet series with independent exponents and some of their applications*, Math. USSR-Sb. **25** (1975), no. 1, 1–36.
20. Ph. Holgate, *Some power series with random gaps*, Adv. Appl. Probab. **21** (1989), no. 3, 708–710.
21. Tian F., Sun Dao-chun, and Yu jia-rong, *Sur les séries aléatoires de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. **326** (1998), no. 4, 427–431.
22. F. Tian, *Growth of random Dirichlet series*, Acta Math. Sci. (Engl. Ed.) **20** (2000), no. 3, 390–396.
23. L. O. Shapovalovska and O. B. Skaskiv, *On the radius of convergence of random gap power series*, Int. J. Math. Anal., Ruse **9** (2015), no. 38, 1889–1893.
24. О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська, *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле*, Буковинський матем. журн. **3** (2015), no. 1, 110–114.
25. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *Convergence of Dirichlet series with random exponents*, Int. J. Appl. Math. **30** (2017), no. 3, 229–238.
26. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents*, arXiv:1703.03280, 2017, preprint.
27. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів, *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками та коефіцієнтами*, Буковинський матем. журн. **5** (2017), no. 3-4, 90–97.
28. P. Erdős and A. Rényi, *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$, Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. **2** (1959), 93–109.
29. P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley, New York, 1986.
30. М. М. Шеремета, *Цілі ряди Діріхле*, ІСДО, Київ, 1993.
31. С. Мандельбройт, *Ряды Дирихле, принципы и методы*, Мир, Москва, 1973.

32. О. М. Мулява, *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*, Мат. Студ. **9** (1998), no. 2, 171–176.
33. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, Москва, 1980, 576 с.

ABSCISSAS OF CONVERGENCE OF DIRICHLET SERIES WITH RANDOM EXPONENTS

Oleh SKASKIV, Nadia STASIV

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska Str.,79000, Lviv
e-mails: olskask@gmail.com, n-stas@ukr.net

Let $\Lambda = \big(\lambda_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, $\lambda_k(\omega) \in \mathbb{R}_+$, and $\mathbf{f} = \big(f_k(\omega)\big)_{k=0}^{+\infty}$, $f_k(\omega) \in \mathbb{C}$, be two sequences of random variables on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. In the paper, we study the abscissas of convergence $\sigma_{\mathrm{conv}}(F,\omega)$ and of absolute convergence $\sigma(F,\omega)$ of a random Dirichlet series of the form

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}\ (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega).$$

In particular, in the case when $\lambda_k(\omega) = \lambda_k + \delta_k(\omega)$, $\{\lambda_k\colon k \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}_+$, $f_k(\omega) = a_k\xi_k(\omega)$, where (ξ_k) is a sequence of random variables such that $\xi_k \in \mathbb{C}$, $(\exists c_j \in (0,+\infty))(\forall n)\colon\ c_1 \leqslant |\xi_n| \leqslant c_2$ a.s., and (δ_n) is a sequence of random variables such that $\delta_n \in \mathbb{R}$, $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\colon\quad M(e^{x\delta_n}) \leqslant C_1 = C_1(x) < +\infty$, the following assertions are proved:

1. If $M\big(\xi_n e^{x\delta_n}\big) = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$ and any $x \in \mathbb{R}$, and $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ is a sequence of independent random variables for each $x \in \mathbb{R}$, then $\sigma_{\mathrm{conv}}(F,\omega) \geqslant \sigma(F_3)$ a.s., where $F_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 e^{2x\lambda_k}$. If we additionally assume that
$$(\exists C_2(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ M(e^{x\delta_n}) \geqslant C_2(x),$$
then $\sigma_{\mathrm{conv}}(F,\omega) = \sigma(F_3)$ a.s.
2. If $\big(\xi_k e^{x\delta_k}\big)$ is a sequence of independent random variables for every $x \in \mathbb{R}$, then $\sigma(F,\omega) \geqslant \sigma(F_4)$ a.s. If we additionally assume that
$$(\forall x, x < \sigma(F,\omega))(\exists a > 0)(\forall n \geqslant 1)\colon P\{\omega\colon |a_n| e^{x\lambda_n(\omega)} < a\} = 1$$
and $(\forall n \in \mathbb{N})\colon |\xi_n(\omega)| = c \neq \infty$ a.s., also
$$(\exists C_3(x) > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}):\ De^{x\delta_n} \geqslant C_3(x),$$
then $\sigma(F,\omega) = \sigma(F_4)$ a.s., where $F_4(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k| e^{x\lambda_k}$.

Key words: analytic functions, random Dirichlet series, abscissas of convergence.

Стаття: надійшла до редколегії 09.05.2018.
прийнята до друку 22.05.2018.