ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 87–95
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 87–95

УДК 517.53

ПРО МАТРИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Оксана МУЛЯВА[1], Юрій ТРУХАН[2], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій,*
вул. Володимирівська 68, Київ, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, м. Львів, 79000
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

Послідовність (x_n) комплексних чисел називається аналітичною стосовно зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_n) додатних чисел, якщо ряд Діріхле з коефіцієнтами x_n і показниками λ_n має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$. Узагальненим порядком послідовності (x_n) будемо називати узагальнений порядок відповідного ряду Діріхле. Знайдено необхідну і достатню умову для того, щоб матриця (a_{nk}) відображала клас цілих послідовностей узагальненого порядку $\leq \varrho \in (0, +\infty)$ на клас цілих послідовностей узагальненого порядку $\leq \mu \in (0, +\infty)$.

Ключові слова: ряд Діріхле, матричне відображення, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай $\xi = (\xi_n)$ – послідовність ненульових комплексних чисел, а $s(\xi) = \{x : \xi_n x_n \to 0\,(n \to \infty)\}$. Якщо позначимо $||x||_\xi = \sup\{|\xi_n x_n| : n \geq 0\}$, то простір $(s(\xi), ||\cdot||_\xi)$ є [1] банаховим і компактним. Нехай $A = (a_{nk})_{n,\,k\geq 0}$ необмежена праворуч і донизу матриця з комплексними елементами a_{nk}. Для послідовності комплексних чисел $x = (x_k)_{k\geq 0}$ означимо $y = (y_n)$ рівністю $y := x \cdot A^T$, тобто $y_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{nk} x_k$ (припускаємо, що усі ряди в останній рівності збіжні). В [2] досліджено умови, за яких матриця A відображає $s(\xi)$ в $s(\eta) = \{y : \eta_n y_n \to 0\,(n \to \infty)\}$.

Нехай $(\xi^{(j)})$ і $(\eta^{(i)})$ – послідовності послідовностей (тобто $\xi^{(j)} = (\xi_n^{(j)})$ і $\eta^{(i)} = (\eta_k^{(i)})$) такі, що $s(\xi^{(k)}) \subset s(\xi^{(j)})$ і $s(\eta^{(k)}) \subset s(\eta^{(j)})$ для $k > j$. Приймемо $S = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$ і $T = \bigcap\limits_i s(\eta^{(i)})$. За означенням матриця A відображає S в T, якщо для кожного i існує таке j, що A відображає $s(\xi^{(j)})$ в $s(\eta^{(i)})$. Правильне [2] таке твердження.

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50

Лема 1. *Нехай $S = \bigcap_j s(\xi^{(j)})$ і для кожного j існує таке $k > j$, що $\sum_n |\xi_n^{(j)}/\xi_n^{(k)}| < +\infty$, а $T = \bigcap_i s(\eta^{(i)})$ та для кожного i існує таке $l > i$, що $|\eta_n^{(i)}/\eta_n^{(l)}| \to 0$ $(n \to \infty)$. Для того, щоб матриця A відображала S в T, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n та k $|\eta_n^{(i)} a_{nk}/\xi_k^{(j)}| \le M$.*

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $\lambda_0 = 0$. Послідовність $x = (x_n)$ комплексних чисел будемо називати аналітичною стосовно послідовності λ, якщо ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad z = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < \sigma_a$ приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \le x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \le x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{пз}} \subset L^0$.

Припустимо, що $\alpha \in L$ та $\beta \in L$. Якщо $\sigma_a = +\infty$, то ряд Діріхле (1) називається цілим, послідовність $x = (x_n)$ називається [3] цілою стосовно послідовності λ, а узагальненим порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ такого ряду Діріхле (і послідовності $x = (x_n)$) називається [4] величина $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup\limits_{\sigma \to +\infty} \dfrac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}$. Відомо [4-5], що за певних умов на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ і на послідовність λ правильна формула $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha,\beta}[x]$, де $\varrho_{\alpha,\beta}[x] =: \varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left((-\ln |x_n|)/\lambda_n\right)}$. Для фіксованого $\varrho \in (0, +\infty)$ через $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ позначимо клас всіх цілих стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ узагальненого порядку $\varrho_{\alpha,\beta}[x] \le \varrho$. Використовуючи лему 1, в [3] доведено, що за певних умов на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ і на послідовність λ для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$|a_{nk}| \exp\left\{\lambda_n \left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_n)}{t}\right)\right) - \lambda_k \left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(\lambda_k)}{r}\right)\right)\right\} \le M.$$

У запропонованій замітці розглянемо випадок, коли ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютною збіжності (загальний випадок, коли $\sigma_a = h \in (-\infty, +\infty)$, зводиться до випадку $\sigma_a = 0$ заміною z на $z - h$).

2. Попередні результати. Добре відомо [5, с. 10], [6, с. 115] таке: якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ і

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln |x_n|}{\lambda_n} = 0, \tag{2}$$

то ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Будемо вважати, що

$$\varlimsup_{n \to \infty} |x_n| = +\infty. \tag{3}$$

Ця умова є необхідною і достатньою для того, щоб максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{|x_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}\colon n \geq 0\} \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$. З огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ звідси випливає, що $M(\sigma, F) \uparrow +\infty$ при $\sigma \uparrow 0$.

За умов $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненим порядком $\varrho^0_{\alpha\beta}[F]$ ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності називається [7] величина

$$\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(1/|\sigma|)}. \tag{4}$$

Цю ж величину будемо також називати узагальненим порядком відповідної аналітичної послідовності $x = (x_n)$, вважаючи, що $\varrho^0_{\alpha,\beta}[x] = \varrho^0_{\alpha,\beta}[F]$.

Правильні [7] такі твердження.

Лема 2. *Нехай $\alpha \in L_{пз}$, $\beta \in L_{пз}$ і при $x_0 \leq x \to +\infty$*

$$\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))} \uparrow +\infty, \quad \alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1 + o(1))\alpha(x) \tag{5}$$

для кожного $c \in (0, +\infty)$, а $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta(\lambda_n/\ln n)\right)$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = k^{01}_{\alpha,\beta}[x] =: \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|x_n|)}. \tag{6}$$

Лема 3. *Нехай $\alpha \in L_{пз}$, $\beta \in L_{пз}$ і при $x_0 \leq x \to +\infty$*

$$\frac{x}{\alpha^{-1}(c\beta(x))} \uparrow +\infty, \quad \beta\left(\frac{x}{\alpha^{-1}(c\alpha(x))}\right) = (1 + o(1))\beta(x) \tag{7}$$

для кожного $c \in (0, +\infty)$, а $\alpha(\ln n) = o(\beta(\lambda_n))$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = k^{02}_{\alpha,\beta}[x] =: \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha\left(\ln|x_n|\right)}{\beta(\lambda_n)}. \tag{8}$$

Зауважимо, що з умов леми 2 випливає, що функція α зростає повільніше, ніж функція β , а умови леми 3 свідчать про те, що функція α зростає швидше, ніж функція β. Якщо функції α і β мають однакове зростання, то жодну з формул (6) чи (8) використовувати не можна. Наприклад, якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln^+ x$, то з (4) отримаємо означення класичного порядку $\varrho^0[F]$, а для його обчислення за умови $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ при $n \to \infty$, можна скористатись [8] формулою

$$\varrho^0[F] = (\varrho^0[x]) = \frac{k^0[x]}{1 - k^0[x]}, \quad k^0[x] =: \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+\ln|x_n|}{\ln\lambda_n}. \tag{9}$$

Для фіксованого $\varrho \in (0, +\infty)$ через $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ позначимо клас всіх аналітичних стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ узагальненого порядку $\varrho^0_{\alpha,\beta}[x] \leq \varrho$.

Лема 4. *Нехай (ϱ_j) – послідовність додатних чисел і $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j \to \infty)$. Припустимо, що функції α та β і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 2. Тоді, якщо приймемо $\xi^{(j)}_n = \exp\left\{-\dfrac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j\right)}\right\}$, то $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що $\bigcap\limits_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$. Оскільки

$$s(\xi^{(j)}) = \{(x_n)\colon \xi^{(j)}_n x_n \to 0\,(n \to \infty)\},$$

то для всіх досить великих n

(10) $$|x_n| \le \frac{1}{\xi_n^{(j)}} = \exp\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j\right)}\right\},$$

звідки $\dfrac{\ln|x_n|}{\lambda_n} \le \dfrac{1}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j\right)} \to 0 \quad (n\to\infty)$. З іншого боку, з умови (3) випливає, що

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|x_n|}{\lambda_n} \ge 0.$$

Тому правильна рівність (2). Методом від супротивного легко довести, що з умови $\alpha(\lambda_n) = o\left(\beta(\lambda_n/\ln n)\right)$ при $n\to\infty$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n\to\infty)$. Отже, ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютної збіжності.

З нерівності (10) випливає також, що для будь-якого j

$$k^{01}_{\alpha,\beta}[x] = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln|x_n|)} \le \varrho_j$$

і оскільки $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j\to\infty)$, то за лемою 2 $\varrho^0_{\alpha,\beta}[F] = k^{01}_{\alpha,\beta}[x] \le \varrho$, тобто $s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$, і отже, $\bigcap\limits_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$.

Навпаки, якщо $(x_n)\in\Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$, то

$$|x_n| \le \exp\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/(\varrho+o(1))\right)}\right\}, \quad n\to\infty,$$

і

$$|x_n\xi_n^{(j)}| \le \exp\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/(\varrho+o(1))\right)} - \frac{\lambda_n}{\beta^{-1}\left(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j\right)}\right\}, \quad n\to\infty.$$

Оскільки $\beta\in L_{\text{пз}}$, то $\beta^{-1}(c_1x) = o(\beta^{-1}(c_2x))$ при $x\to+\infty$ для будь-яких $0\le c_1 < c_2 \le +\infty$, тобто завдяки умові (5) $\dfrac{x}{\beta^{-1}\left(\alpha(x)/c_1\right)} = o\left(\dfrac{x}{\beta^{-1}\left(\alpha(x)/c_2\right)}\right)$ при $x\to+\infty$ і з огляду на нерівність $\varrho_j > \varrho$ з останньої нерівності отримуємо співвідношення $|x_n\xi_n^{(j)}| \to 0$ $(n\to\infty)$, тобто $(x_n)\in s(\xi^{(j)})$ для кожного j, і отже, $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) \subset \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Лему 4 доведено. □

Лема 5. *Нехай (ϱ_j) – послідовність додатних чисел і $\varrho_j\downarrow\varrho$ $(j\to\infty)$. Припустимо, що функції α та β і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 3. Тоді, якщо приймемо $\xi_n^{(j)} = \exp\{-\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n))\}$, то $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$.*

Доведення. З означення $s(\xi^{(j)})$ випливає, що для всіх досить великих n

(11) $$|x_n| \le 1/\xi_n^{(j)} = \exp\{\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n))\},$$

звідки з огляду на умову (7) матимемо

$$\frac{\ln|x_n|}{\lambda_n} \le \frac{\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n)}{\lambda_n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84

і оскільки $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln|x_n|}{\lambda_n} \geq 0$, то правильна рівність (2). Завдяки (7) з умови $\alpha(\ln n) = o(\beta(\lambda_n))$ $(n\to\infty)$ випливає, що $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n\to\infty)$. Отже, ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютної збіжності.

З нерівності (11) випливає також, що для будь-якого j

$$k^{02}_{\alpha,\beta}[x] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\ln|x_n|)}{\beta(\lambda_n)} \leq \varrho_j$$

і оскільки $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j\to\infty)$, то за лемою 3 $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = k^{02}_{\alpha,\beta}[x] \leq \varrho$, тобто $s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$, і отже, $\bigcap\limits_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$.

Навпаки, якщо $(x_n) \in \Omega_{\alpha,\beta}(\varrho)$, то $|x_n| \leq \exp\{\alpha^{-1}((\varrho+o(1))\beta(\lambda_n))\}$ $(n\to\infty)$ і

$$|x_n\xi^{(j)}_n| \leq \exp\{\alpha^{-1}((\varrho+o(1))\beta(\lambda_n)) - \alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n))\}, \quad n\to\infty.$$

Оскільки $\alpha \in L_{\text{пз}}$, то $\alpha^{-1}(c_1x) = o(\alpha^{-1}(c_2x))$ при $x\to+\infty$ для будь-яких $0 \leq c_1 < c_2 \leq +\infty$, тобто $\alpha^{-1}(c_1\beta(x)) = o(\alpha^{-1}(c_2\beta(x)))$ при $x\to+\infty$ і з огляду на нерівність $\varrho_j > \varrho$ з останньої нерівності отримуємо співвідношення $|x_n\xi^{(j)}_n| \to 0$ $(n\to\infty)$, тобто $(x_n) \in s(\xi^{(j)})$ для кожного j, і отже, $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) \subset \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Лему 5 доведено. □

Нарешті, для фіксованого $\varrho \in (0, +\infty)$ через $\Omega^0(\varrho)$ позначимо клас всіх аналітичних стосовно $\lambda = (\lambda_n)$ послідовностей $x = (x_n)$ класичного порядку $\varrho^0[x] \leq \varrho$. Тоді правильна така лема.

Лема 6. *Нехай (ϱ_j) – послідовність додатних чисел і $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j\to\infty)$. Припустимо, що $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ при $n\to\infty$. Тоді, якщо приймемо $\xi^{(j)}_n = \exp\{-\lambda_n^{\varrho_j/(1+\varrho_j)}\}$, то $\Omega^0(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$.*

Доведення. З означення $s(\xi^{(j)})$ одержуємо $|x_n| \leq \exp\{\lambda_n^{\varrho_j/(1+\varrho_j)}\}$ для всіх досить великих n, звідки легко випливає рівність (2), а оскільки з умови $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n\to\infty)$, тобто ряд Діріхле (1) має нульову абсцису абсолютної збіжності. З цієї нерівності випливає також, що для будь-якого j

$$k^0[x] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+\ln|x_n|}{\ln\lambda_n} \leq \frac{\varrho_j}{\varrho_j+1}$$

і, оскільки $\varrho_j/(1+\varrho_j) \downarrow \varrho/(1+\varrho)$ $(j\to\infty)$, а з (9) випливає, що $k^0[x] = \varrho^0[x]/(1+\varrho^0[x])$, то $\varrho^0[x] \leq \varrho$, тобто $s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0(\varrho)$ для будь-якого j, і отже, $\bigcap\limits_j s(\xi^{(j)}) \subset \Omega^0(\varrho)$.

Навпаки, якщо $(x_n) \in \Omega^0(\varrho)$, то $|x_n| \leq \exp\{\lambda_n^{\varrho/(1+\varrho)+o(1)}\}$ $(n\to\infty)$ і

$$|x_n\xi^{(j)}_n| \leq \exp\{\lambda_n^{\varrho/(1+\varrho)+o(1)} - \lambda_n^{\varrho_j/(1+\varrho_j)}\} \to 0, \quad n\to\infty,$$

тобто $(x_n) \in s(\xi^{(j)})$ для кожного j, і отже, $\Omega^0(\varrho) \subset \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Лему 6 доведено. □

3. Основні результати. Використовуючи леми 1 і 4, доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 1. *Нехай функції $\alpha \in L$ та $\beta \in L$ і послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ задовольняють умови леми 2, $\varrho \in (0, +\infty)$ і $\mu \in (0, +\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}| \exp\left\{\frac{\lambda_k}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_k)/r)} - \frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/t)}\right\} \le M. \tag{12}$$

Доведення. Нехай (μ_i) – така послідовність додатних чисел, що $\mu_i \downarrow \mu$, а

$$\eta_n^{(i)} = \exp\left\{-\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\mu_i)}\right\}.$$

За лемою 4 $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu) = \bigcap\limits_i s(\eta^{(i)})$ і $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Легко перевірити таке: якщо $\varrho_k < \varrho_j$ для $k > j$, то $\xi_n^{(j)} \le \xi_n^{(k)}$ для $k > j$, звідки згідно з означенням випливає, що $s(\xi^{(k)}) \subset s(\xi^{(j)})$ для $k > j$. Подібно, якщо $\mu_k < \mu_j$ для $k > j$, то $s(\eta^{(k)}) \subset s(\eta^{(j)})$ для $k > j$.

Для $l > i$, як у доведенні співвідношення $|\xi_n^{(j)} x_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ в лемі 4, отримуємо

$$\frac{\eta_n^{(i)}}{\eta_n^{(l)}} = \exp\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\mu_l))} - \frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\mu_i))}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нарешті, подібно для $k > j$ отримуємо

$$\sum_n \left|\frac{\xi_n^{(j)}}{\xi_n^{(k)}}\right| = \sum_n \exp\left\{\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho_k))} - \frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j))}\right\} =$$

$$= \sum_n \exp\left\{-\frac{\lambda_n(1+o(1))}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\varrho_j))}\right\}, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

З умов $\beta \in L_{\text{пз}}$ і $\alpha(\lambda_n) = o(\beta(\lambda_n/\ln n))$ $(n \to \infty)$ випливає, що $\alpha(\lambda_n)/\varrho_j \le$ $\le \beta(\lambda_n/(2\ln n))$ для всіх досить великих n. Тому з (13) випливає, що

$$\sum_n \left|\frac{\xi_n^{(j)}}{\xi_n^{(k)}}\right| \le \sum_n \exp\{-2(1+o(1))\ln n\} < +\infty.$$

Отже, можемо застосувати лему 1 до $S = \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ і $T = \Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, за якою для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$\exp\left\{-\frac{\lambda_n}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_n)/\mu_i)}\right\} |a_{nk}| \exp\left\{\frac{\lambda_k}{\beta^{-1}(\alpha(\lambda_k)/\varrho_j)}\right\} \le M.$$

Звідси легко отримуємо (12). Теорему 1 доведено. □

Якщо використати леми 1 і 5, прийдемо до такої теореми.

Теорема 2. *Нехай функції $\alpha \in L$ та $\beta \in L$ і послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ задовольняють умови леми 3, $\varrho \in (0, +\infty)$ і $\mu \in (0, +\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}| \exp\{\alpha^{-1}(r\beta(\lambda_k) - \alpha^{-1}(t\beta(\lambda_n)\} \le M. \tag{14}$$

Доведення. Нехай, як раніше $\mu_i \downarrow \mu$, а $\eta_n^{(i)} = \exp\{-\alpha^{-1}(\mu_i\beta(\lambda_n)\}$. За лемою 5 $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu) = \bigcap\limits_i s(\eta^{(i)})$ і $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Легко перевірити таке: якщо $\varrho_k < \varrho_j$ для $k > j$, то $\xi_n^{(j)} \le \xi_n^{(k)}$ для $k > j$, тобто $s(\xi^{(k)}) \subset s(\xi^{(j)})$ для $k > j$. Подібно, якщо $\mu_k < \mu_j$ для $k > j$, то $s(\eta^{(k)}) \subset s(\eta^{(j)})$ для $k > j$.

Для $l > i$, як у доведенні співвідношення $|\xi_n^{(j)} x_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ в лемі 5, матимемо

$$\eta_n^{(i)}/\eta_n^{(l)} = \exp\left\{\alpha^{-1}(\mu_l\beta(\lambda_n) - \alpha^{-1}(\mu_i\beta(\lambda_n)\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нарешті, подібно для $k > j$ отримуємо

$$\sum_n \left|\xi_n^{(j)}/\xi_n^{(k)}\right| = \sum_n \exp\left\{-\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n) + \alpha^{-1}(\varrho_k\beta(\lambda_n)\}\right\} =$$
$$= \sum_n \exp\left\{-(1+o(1))\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n)\right\} \le \sum_n \exp\left\{-2(1+o(1))\ln n\right\} < +\infty,$$

бо з умов $\alpha \in L_{пз}$ і $\alpha(\ln n) = o\left(\beta(\lambda_n)\right)$ $(n \to \infty)$ випливає, що $2\ln n \le \alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_n))$ для всіх досить великих n.

Якщо приймемо $S = \Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ і $T = \Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, то за лемою 1 для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$\exp\{-\alpha^{-1}(\mu_i\beta(\lambda_n)\}|a_{nk}| \exp\{\alpha^{-1}(\varrho_j\beta(\lambda_k)\} \le M.$$

Звідси легко отримуємо (14). Теорему 2 доведено. □

Нарешті, використовуючи леми 1 і 6, доведемо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ при $n \to \infty$, $\varrho \in (0, +\infty)$ і $\mu \in (0, +\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0(\varrho)$ в $\Omega^0(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k*

$$|a_{nk}| \exp\{\lambda_k^{r/(1+r)} - \lambda_n^{t/(1+t)}\} \le M. \tag{15}$$

Доведення. Вибираючи $\eta_n^{(i)} = \exp\{-\lambda_n^{\mu_i/(1+\mu_i)}\}$, де $\mu_i \downarrow \mu$, за лемою 6 отримуємо $\Omega^0(\mu) = \bigcap\limits_i s(\eta^{(i)})$ і $\Omega^0(\varrho) = \bigcap\limits_j s(\xi^{(j)})$. Як раніше, легко бачити, що $s(\xi^{(k)}) \subset s(\xi^{(j)})$ і $s(\eta^{(k)}) \subset s(\eta^{(j)})$ для $k > j$. Для $l > i$ маємо

$$\eta_n^{(i)}/\eta_n^{(l)} = \exp\{\lambda_n^{\mu_l/(1+\mu_l)} - \lambda_n^{\mu_i/(1+\mu_i)}\} \to 0$$

при $n \to \infty$, а для $k > j$ з огляду на умову $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$ $(n \to \infty)$ отримуємо

$$\sum_n \left|\xi_n^{(j)}/\xi_n^{(k)}\right| = \sum_n \exp\left\{-(1+o(1))\lambda_n^{\varrho_j/(1+\varrho_j)}\right\} < +\infty,$$

Тому, якщо приймемо $S = \Omega^0(\varrho)$ і $T = \Omega^0(\mu)$, то за лемою 1 для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного i існували такі j і $M \in (0, +\infty)$, що для всіх n і k

$$\exp\{-\lambda_n^{\mu_i/(1+\mu_i)}\}|a_{nk}|\exp\{\lambda_k^{\varrho_j/(1+\varrho_j)}\} \leq M.$$

Звідси легко отримуємо (15). Теорему 3 доведено. □

4. Доповнення. Розглянемо випадки, коли одна з функцій α чи β є степеневою. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\alpha(x) \equiv x$ або $\beta(x) \equiv x$. Позначимо $\varrho^0_{\alpha,*}[F] = \varrho^0_{\alpha,\beta}[F]$, якщо $\beta(x) \equiv x$, і $\varrho^0_{*,\beta}[F] = \varrho^0_{\alpha,\beta}[F]$, якщо $\alpha(x) \equiv x$. Для знаходження $\varrho^0_{\alpha,*}[F]$ і $\varrho^0_{*,\beta}[F]$ через коефіцієнти правильні [9] такі твердження.

Лема 7. *Якщо $\alpha \in L_{пз}$ і $\alpha(x/\alpha(x)) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$, а $\ln n = o(\lambda_n/\alpha(\lambda_n))$ при $n \to \infty$, то*

$$\varrho^0_{\alpha,*}[F] = k^{01}_{\alpha,*}[x] =: \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\lambda_n)\ln|x_n|}{\lambda_n}.$$

Лема 8. *Якщо $\beta \in L_{пз}$, $x/\beta(x) \uparrow +\infty$ і $\beta(x/\beta(x)) = (1+o(1))\beta(x)$ при $x_0 \leq x \to +\infty$, а $\ln n = o(\beta(\lambda_n))$ при $n \to \infty$, то*

$$\varrho^0_{*,\beta}[F] = k^{02}_{*,\beta}[x] =: \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|x_n|}{\beta(\lambda_n)}.$$

Позначимо $\Omega^0_{\alpha,*}[\varrho] = \Omega^0_{\alpha,\beta}[\varrho]$, якщо $\beta(x) \equiv x$, і $\Omega^0_{*,\beta}[\varrho] = \Omega^0_{\alpha,\beta}[\varrho]$, якщо $\alpha(x) \equiv x$. Подібно до лем 4 та 5 нескладно довести такі дві леми.

Лема 9. *Нехай (ϱ_j) – послідовність додатних чисел і $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j \to \infty)$. Припустимо, що функція α і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 7. Тоді, якщо приймемо $\xi_n^{(j)} = \exp\{-\varrho_j\lambda_n/\alpha(\lambda_n)\}$, то $\Omega^0_{\alpha,*}(\varrho) = \bigcap_j s(\xi^{(j)})$.*

Лема 10. *Нехай (ϱ_j) – послідовність додатних чисел і $\varrho_j \downarrow \varrho$ $(j \to \infty)$. Припустимо, що функція β і послідовність (λ_n) задовольняють умови леми 8. Тоді, якщо приймемо $\xi_n^{(j)} = \exp\{-\varrho_j\beta(\lambda_n)\}$, то $\Omega^0_{*,\beta}(\varrho) = \bigcap_j s(\xi^{(j)})$.*

Використовуючи леми 1 і 9, подібно до теорем 1 та 2, отримуємо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай функції $\alpha \in L$ та $\beta \in L$ і послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ задовольняють умови леми 7, $\varrho \in (0, +\infty)$ і $\mu \in (0, +\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{\alpha,*}(\varrho)$ в $\Omega^0_{\alpha,*}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що $|a_{nk}|\exp\{r\lambda_k/\alpha(\lambda_k) - t\lambda_n/\alpha(\lambda_n)\} \leq M$ для всіх n і k.*

Якщо використати леми 1 і 10, прийдемо до такої теореми.

Теорема 5. *Нехай функція $\beta \in L$ і послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ задовольняють умови леми 8, $\varrho \in (0, +\infty)$ і $\mu \in (0, +\infty)$. Для того, щоб матриця $A = (a_{nk})$ відображала $\Omega^0_{*,\beta}(\varrho)$ в $\Omega^0_{*,\beta}(\mu)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $t > \mu$ існували такі $r > \varrho$ і $M \in (0, +\infty)$, що $|a_{nk}|\exp\{r\beta(\lambda_k) - t\beta(\lambda_n)\} \leq M$ для всіх n і k.*

Список використаної літератури

1. K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z. **53** (1951), 463–487.
2. H. B. Skerry, *On matrix maps of entire sequences*, Pacif. J. Math. **51** (1974), no. 2, 563–570.
3. М. М. Шеремета, *Про матричні відображення цілих послідовностей*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **82** (2016), 217–223.
4. Я. Д. Пьяныло, М. Н. Шеремета, *О росте целых функций, представленных рядами Дирихле*, Изв. вузов. Матем. (1975), no. 10, 91–93; **English version**: Soviet Math. (Iz. VUZ), **19** (1975), no. 10, 82–84.
5. М. Н. Шеремета, *Цілі ряди Діріхле*, ІСДО, Київ, 1993.
6. А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, Москва, 1976.
7. Ю. М. Галь, *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле*, Доп. АН УССР, Сер. А. (1978), no. 12, 1065–1067.
8. В. С. Бойчук, *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле*, Математический сборник, Наукова думка, Київ, 1976, c. 238–240.
9. Ю. М. Галь, *О росте аналитических функций, заданных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле.* Дрогобыч, 1980, Рукопись деп. ВИНИТИ, №4080-80-Деп.

Стаття: надійшла до редколегії 21.01.2018
доопрацьована 12.03.2018
прийнята до друку 24.04.2018

ON MATRIX MAPS OF ANALYTIC SEQUENCES

Oksana MULYAVA[1], Yuriy TRUKHAN[2], Myroslav SHEREMETA[2]

[1]*Kyiv National University of Food Technologies*
Volodymyrska Str. 68, Kyiv, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str. 1, Lviv, 79000
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

A sequence (x_n) of complex numbers is said to be analytic with respect to a sequence (λ_n) of positive numbers increasing to $+\infty$, if a Dirichlet series with coefficients x_n and exponents λ_n has the abscissa of absolute convergence $\sigma_a \in (-\infty, +\infty]$. We will call the generalized order of this Dirichlet series the generalized order of the sequence (x_n). Necessary and sufficient condition in order that a matrix (a_{nk}) maps a class of analytic sequences of the generalized order $\le \varrho \in (0, +\infty)$ onto a class of analytic sequences of the generalized order $\le \mu \in (0, +\infty)$ are found.

Key words: Dirichlet series, matrix map, generalized order.