ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 53–57
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 53–57

УДК 512.552.13

ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО КАНОНІЧНОГО ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБОРОТНИХ ГАНКЕЛЕВИХ МАТРИЦЬ

Богданна КУЗНІЦЬКА

*Львівський національний аграрний університет,
вул. В. Великого, 1, Дубляни, 80381, Львівська область
e-mail: kuznitska@ukr.net*

Доведено, що довільну матрицю другого порядку над комутативним кільцем елементарних дільників квадратного стабільного рангу 1 можна звести до канонічного діагонального вигляду за допомогою оборотних ганкелевих матриць. Визначено властивості оборотних ганкелевих матриць.

Ключові слова: квадратний стабільний ранг 1, ганкелева матриця, кільце елементарних дільників.

Бас [1], вивчаючи стабільні властивості функтора K_1, ввів поняття стабільного рангу, яке має широке застосування в проблемах скорочуваності модулів [2]. Водночас є багато досліджень, які узагальнюють поняття кільця стабільного рангу 1, зокрема, таким є поняття квадратного стабільного рангу 1. Важливе значення виявив той факт, що розклад матриць $\begin{pmatrix} b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ над кільцем $\mathbb{R}$ в добуток двох теплецевих матриць пов'язаний у зображенні одиницями форми a^2+bx, де $aR+bR = R$ [3]. Мета нашої праці — з'ясувати зв'язок поняття квадратного стабільного рангу 1 з факторизацією ганкелевих матриць.

Означення 1. Кільце R має (*правий*) *квадратний стабільний ранг* 1 ($ssr(R) = 1$), якщо для довільних $a, b \in R$ таких, що $aR+bR = R$ випливає, що a^2+bx є оборотним елементом кільця R для деякого елемента x.

Кільце дійснозначних функцій на топологічному просторі, дійсне кільце гомоморфності в формально дійсному полі є прикладами кілець квадратного стабільного рангу 1 [4].

Означення 2. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу* 1 ($sr(R) = 1$), якщо для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ існує оборотний елемент $u \in R$ такий, що $a + bt = u$ для деякого $t \in R$.

2010 Mathematics Subject Classification: 19B10

У випадку комутативних кілець виконується таке твердження.

Твердження 1 ([3]). *Якщо R – кільце стабільного рангу 1, то R є кільцем квадратного стабільного рангу 1.*

Але не всі кільця квадратного стабільного рангу 1 є кільцями стабільного рангу 1.

У цій праці під кільцем R розуміємо асоціативне кільце з 1, $1 \neq 0$.

Означення 3. Квадратна матриця C порядку n називається *ганкелевою*, якщо на всіх діагоналях, перпендикулярних до головної діагоналі, розташовані однакові елементи

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Ганкелева матриця другого порядку набуває вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -t \end{pmatrix},$$

де $a, b, t \in R$.

Зауважимо таке: якщо A – оборотна ганкелева матриця, то A^{-1} теж оборотна ганкелева матриця.

Означення 4. Комутативне кільце Безу R назвемо *ганкелевим*, якщо для довільних $a, b \in R$ існує оборотна ганкелева матриця T така, що виконується умова $(a, b)T = (-u, 0)$.

Твердження 2. *Нехай R – комутативне кільце $ssr(R) = 1$ та елементи $a, b \in R$ є такими, що $aR + bR = R$. Тоді існує оборотна ганкелева матриця T така, що $(a, b)T = (1, 0)$.*

Доведення. Нехай R – комутативне кільце квадратного стабільного рангу 1 і $aR + bR = R$ для довільних $a, b \in R$. Звідси отримаємо, що $-at - b^2 = -u$, де $-u$ – оборотний елемент. Позначимо

$$S = \begin{pmatrix} -t & -b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} (-u)^{-1} & 0 \\ 0 & (-u)^{-1} \end{pmatrix}$$

і виконаємо таке:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-u)^{-1} & 0 \\ 0 & (-u)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} SK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Зауважимо, що матриця $T = SK$ є ганкелевою.

$$\begin{pmatrix} -t & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-u)^{-1} & 0 \\ 0 & (-u)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t(-u)^{-1} & -b(-u)^{-1} \\ -b(-u)^{-1} & a(-u)^{-1} \end{pmatrix}$$

Отже, $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Твердження 3. *Нехай R – комутативне кільце і $ssr(R) = 1$. Тоді довільний унімодулярний рядок довжини 2 можна доповнити до оборотної ганкелевої матриці.*

Доведення. Нехай $aR + bR = R$, тоді (a, b) – унімодулярний рядок. Тоді згідно з твердженням 2, існує оборотна ганкелева матриця T така, що $(a, b)T = (1, 0)$. Звідси $(a, b) = (1, 0)T^{-1}$. Зауважимо, що обернена матриця до ганкелевої матриці другого порядку є теж ганкелевою. Нехай

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t \\ t & -t_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівності $(a, b) = (1, 0)T^{-1}$ отримаємо, що $a = t_{11}$, $b = t$, а звідси

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -t_{22} \end{pmatrix},$$

що і потрібно було довести. □

Теорема 1. *Нехай R – комутативне кільце Ерміта та $ssr(R) = 1$. Тоді R — ганкелеве кільце.*

Доведення. Нехай $a, b \in R$ і $aR + bR = dR$. Тоді $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $a_0 R + b_0 R = R$ [1]. Згідно з твердженням 2 отримаємо

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $-a_0 t - b_0^2 = -u$ – оборотний елемент. Звідси $-at - b_0 b = -du$, а це означає, що

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-u)^{-1} & 0 \\ 0 & (-u)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто R – ганкелеве кільце. □

Теорема 2. *Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників і $ssr(R) = 1$. Тоді для довільної матриці A другого порядку існують оборотні ганкелеві матриці P_1, P_2, Q_1, Q_2 такі, що $P_2 P_1 A Q_1 Q_2$ – канонічна діагональна матриця.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що для доведення нашого результату достатньо обмежитися матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$. Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді згідно з [4] існують такі елементи $p, q \in R$, що $paR + (pb + qc)R = R$, тобто

$$par + (pb + qc)s = 1 \tag{1}$$

для деяких елементів $r, s \in R$. Зауважимо, що $pR + qR = R$, $rR + sR = R$. Рівність (1) можна матрично записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 1. \tag{2}$$

Оскільки $pR+qR=R$, $rR+sR=R$, то існують оборотні ганкелеві матриці вигляду

$$P_1=\begin{pmatrix} p & q \\ * & * \end{pmatrix}, \quad Q_1=\begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}.$$

Із рівності (2) отримаємо

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}=A_1.$$

За допомогою трансквенції рядків і стовпців матриця A_1 зводиться до канонічного діагонального вигляду. Оскільки кожній такого вигляду трансквенцій відповідає домноження матриці A_1 справа та зліва на оборотні ганкелеві матриці вигляду

$$P_2=\begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2=\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то ми отримаємо

$$P_2P_1AQ_1Q_2=\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де P_1, P_2, Q_1, Q_2 – оборотні ганкелеві матриці. Цю матрицю, помноживши справа і зліва на оборотну ганкелеву матрицю $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, отримаємо

$$TP_2P_1AQ_1Q_2T=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

□

Теорема 3. *Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників і $ssr(R)=1$. Тоді будь-яка оборотна матриця другого порядку є добутком оборотних ганкелевих матриць.*

Доведення. Нехай A – оборотна матриця другого порядку над кільцем R. Згідно з теоремою 2, враховуючи, що A – оборотна, можемо знайти оборотні ганкелеві матриці P і Q другого порядку, що

$$PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси $A=P^{-1}Q^{-1}$. Оскільки обернена матриця до ганкелевої є ганкелева, то теорема доведена. □

Теорема 4. *Нехай R – комутативне кільце Ерміта одиничного квадратного стабільного рангу 1. Тоді будь-яка матриця другого порядку над R діагоналізується за допомогою оборотних ганкелевих матриць.*

Доведення. Згідно з обмеженням, накладеним на R, отримаємо, що для будь-яких елементів $a,b\in R$, де $aR+bR=dR$ і $a=da_0$, $b=db_0$ маємо, що $a_0R+b_0R=R$. Оскільки $ssr(R)=1$, то $a_0t+b_0^2=u$, а звідси $-a_0t-b_0^2=-u$, $-u,t$ — оборотні елементи і $-at-b_0b=-du$.

Доведемо, що R – кільце елементарних дільників. Для цього достатньо довести, що довільна матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$, має властивість канонічної діагональної редукції.

Оскільки $aR + bR = dR$, то згідно з доведеним вище маємо $-at - b_0b = -du$, $a = da_0$, $b = db_0$, $a_0R + b_0R = R$ і $-u, t$ – оборотні елементи. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & -b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -du & 0 \\ -ct & -cb_0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $aR + bR = dR$ і $aR + bR + cR = R$, то $dR + cR = R$. Отже маємо, що $duR + ctR = R$. Це означає, що матриця R є з властивістю канонічної діагональної редукції. □

Список використаної літератури

1. H. Bass, *K–theory and stable algebra*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **22** (1964), 5–60.
2. B. V. Zabavsky, *Diagonal reduction of matrices over rings*, Mat. Studies Monograph Ser. **16**, Lviv, 2012.
3. D. Khurana, T.Y. Lam, and Zhou Wang, *Rings of square stable range one*, J. Algebra **338** (2011), 122–143.
4. B. V. Zabavskii and N. Ya. Komarnitskii, *Distributive elementary divisor domains*, Ukr. Math. J. **42** (1990), no. 7, 890–892.

Стаття: надійшла до редколегії 23.12.2017
доопрацьована 05.02.2018
прийнята до друку 24.04.2018

REDUCTION OF MATRICES TO THE CANONICAL DIAGONAL FORM BY INVERTIBLE HANKEL MATRICES

Bohdanna KUZNITSKA

Lviv National Agrarian University,
V. Velykoho Str., 1, Dubliany, 80381, Lviv Region
e-mail: kuznitska@ukr.net

It is proved that an arbitrary matrix of the second order over a commutative ring of elementary divisors of square stable rank 1 can lead to a canonical diagonal form by invertible Hankel matrices. Properties of the reversible Hankel matrices are established.

Key words: square stable rank 1, Hankel matrix, ring of elementary dividers.